بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مازندران

دانشکده علوم‌پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان:

وجود و یکتایی جواب برای بعضی از معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری

استاد راهنما:

دکتر عزیزاللّه باباخانی

استاد مشاور:

پروفسور قاسم علیزاده افروزی

نگارش :

الهام انتقامی اوریمی

بهمن ماه ۱۳۸۷

تقدیم به

همسر عزیزم

قدردانی

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند و حساب گران از شمارش نعمت های او ناتوان و تلاش گران از ادای حق او درمانده اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی کنند و دست غوّاصان دریای علوم به او نخواهد رسید.

اکنون گاه آن است تا سپاسگزار بزرگوارانی باشم که خوشه چین خوان علم و اخلاق شان بودم .

ابتدا سپاس بیکران و خالصانه خویش را نثار پدر و مادر مهربانم می کنم که همواره حامی و مشوق من بوده اند، و همسر عزیزم که در این راه لحظه ای مرا تنها نگذاشتند.

از استاد مهربانم، دکتر عزیزاللّه باباخانی به پاس تمام راهنمایی ها و زحماتشان صمیمانه سپاسگزارم.

از استاد مشاور فرزانه و دانشمندم، پروفسور قاسم علیزاده افروزی که همیشه الگوی بنده در علم و اخلاق بوده اند، خالصانه سپاسگزارم.

از اساتید داور و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی که قبول زحمت کرده، از خانواده محترم همسرم و همه دوستان و عزیزانی که در این راه کمک و همراه بنده بوده اند نیز سپاسگزار و ممنونم.

چکیده

در این رساله ابتدا با استفاده از روش غیر خطی لری – شودر به بررسی یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل تابعی از مرتبه کسری زیر در یک فاز نامتناهی روی فضای فرشه می پردازیم:

$$\begin{cases} D^{\alpha}[y(t)-y(0)] = f(t,y_t), & t \in J=[0,\infty), \quad 0<\alpha<1, \\ y(t)=\phi(t), & t\in(-\infty,0]. \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} D^{\alpha}[y(t)-y(0)-g(t,y_t)+g(0,y_0)] = f(t,y_t), & t \in J=[0,\infty), \quad 0<\alpha<1, \\ y(t)=\phi(t), & t\in(-\infty,0]. \end{cases}$$

که D^{α} مشتق کسری ریمان – لیوویل است، $f,g: J\times B\to R^n$ و B نیز فضای پایه نامیده می شود.

سپس با استفاده از روش های نقطه ثابت باناخ و نقطه ثابت لری – شودر وجود جواب برای معادلات دیفرانسیل تابعی از مرتبه کسری زیر را ثابت می کنیم:

$$\begin{cases} D^{\alpha}y(t) = f(t,y_t)\ , & t \in J=[0,b],\ 0<\alpha<1, \\ y(t)=\phi(t)\ , & t\in(-\infty,0], \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} D^{\alpha}[y(t)-g(t,y_t)] = f(t,y_t)\ , & t \in J=[0,b],\ 0<\alpha<1, \\ y(t)=\phi(t)\ , & t\in(-\infty,0], \end{cases}$$

که $f,g: J\times B\to R$ و D^{α} مشتق کسری ریمان – لیوویل است.

در خاتمه نیز با استفاده از روش غیر خطی لری – شودر به مطالعه یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری زیر با ضرایب چند جمله ای در یک فاز نامحدود روی فضای فرشه می پردازیم:

$$\begin{cases} P(D)[y(t)-y(0)] = f(t,y_t), & t \in J=[0,\infty), \\ y(t)=\phi(t), & t\in(-\infty,0], \end{cases}$$

که در این معادلات $P(D) = D^{\alpha_n} - \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t) D^{\alpha_{n-j}}$، $f : J \times B \to R^n$، D^{α_j} ها مشتقات کسری ریمان — لیوویل می باشند و $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < 1$.

واژه‌های کلیدی : معادلات دیفرانسیل کسری؛ مشتق کسری؛ انتگرال کسری؛ فاز نامتناهی؛ وجود؛ نقطه ثابت.

فهرست مندرجات

لیست علائم و اختصارات

خلاصه تعریف	علائم
تابع گاما	$\Gamma(\alpha)$
تابع بتا	$B(z,w)$
تابع میتاگ لفلر دو پارامتری	$E_{\alpha,\beta}(z)$
مشتق کسری گرانوالد	${}_a^G D_x^{\alpha}$
انتگرال کسری گرانوالد	${}_a^G I_x^{\alpha}$
مشتق کسری ریمان — لیوویل	D_a^{α}
انتگرال کسری ریمان — لیوویل	I_a^{α}
مشتق کسری مارچاد	D^{α}
مشتق کسری کاپوتو	${}_a^C D_x^{\alpha}$
انتگرال کسری وایل	${}_a W_{\infty}^{-\alpha}$
مسئله مقدار اولیه	IVP
معادلات دیفرانسیل تابعی	$FDEs$
معادلات دیفرانسیل تابعی خنثی	$NFDEs$

پیشگفتار

حسابهای کسری [۱۵، ۱۶، ۱۹، ۲۰]، از قرن هفدهم توسط لایب نیز [۱] ، اویلر [۲] ، لاگرانژ [۳] ، آبل [۴] ، لیوویل [۵] ، ریمان [۶] و دیگران گسترش یافت. اولین تلاش گزارش شده تعمیم مشتقات به مرتبه کسری در مناظره بین لایب نیز (۱۶۹۵) و ال . هاسپیتال [۷] بود، که در آن لایب نیز نماد $\frac{d^n y}{dx^n}$ را برای $n = \frac{۱}{۲}$ شرح داد.

لاپلاس [۸] (۱۸۱۲) مشتق کسری را برحسب یک انتگرال تعریف کرد. در سال (۱۸۱۹) لاکریکس [۹] مشتق مرتبهٔ دلخواه را بیان کرد و فرمول مشتق معمولی

$$\frac{d^n\ x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \qquad m \geq n,\ m,n \in N,$$

را به مرتبهٔ دلخواه به صورت زیر تعمیم داد:

$$\frac{d^n\ x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+۱)}{\Gamma(m-n+۱)}x^{m-n},$$

۱ Leibniz

۲ Euler

۳ Lagrange

۴ Abel

۵ Liouville

۶ Riemann

۷ L'Hospital

۸ Laplace

۹ Lacroix

که m و n هر عددی می توانند باشند.

فوریه [۱۰] (۱۸۲۲) عملگرهای کسری را بااستفاده از نمایش انتگرالی $f(x)$ تعریف کرد، به این ترتیب که

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \ \int_{-\infty}^{\infty} cos(t(x-u))dt. \\ \frac{d^n f(x)}{dx^n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \int_{-\infty}^{\infty} t^n cos(t(x-u)) + \frac{1}{2}n\pi)dt. \end{aligned}$$

او α را به جای n قرار داد، که α عدد دلخواهی است. آبل اولین کسی بود که مشتقات مرتبه کسری را برای حل یک معادله انتگرالی بکار برد. این معادله در مسئله خم همزمانی [۱۱] بوجود آمد. معادله انتگرالی آبل به فرم زیر است.

$$k = \int_{0}^{x} (x-t)^{\alpha} f(t)dt. \tag{۱.۰.۰}$$

($\alpha = -1/2$ به عنوان یک حالت خاص بررسی شده بود.) انتگرال در معادله (۱.۰.۰) بجز برای عامل ضربی $1/\Gamma(\frac{1}{2})$، که یک حالت خاص از یک انتگرال معین است، تعریف انتگرال کسری است. در معادلات انتگرالی مثل معادله (۱.۰.۰) تابع f در انتگرالده باید معین باشد. آبل طرف راست معادله (۱.۰.۰) را بصورت $\sqrt{\pi}[d^{-1/2}f(x)/dx^{-1/2}]$ نوشت. سپس با اثر دادن $d^{1/2}/dx^{1/2}$ در هر دو سمت معادله عبارت زیر را بدست آورد:

$$\frac{d^{1/2}k}{dx^{1/2}} = \sqrt{\pi} f(x)$$

چون عملگرهای کسری (با شرایط کافی روی f) خصوصیت زیر را دارند.

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}[\frac{d^{-1/2}}{dx^{-1/2}}f] = \frac{d^{0}f}{dx^{0}} = f. \tag{۲.۰.۰}$$

بنابراین وقتی که مشتق کسری از مرتبه $\frac{1}{2}$ ثابت k در معادله (۱.۰.۰) محاسبه شود، $f(x)$ به دست می آید. این یک دست آورد قابل ملاحظه از آبل در حساب های کسری بود. نکته مهم اینجاست که

۱۰ Fourier

۱۱ Tautochorne Problem

مشتق کسری یک ثابت همیشه مساوی صفر نیست. فرمول انتگرالی فوریه و جواب زیبای آبل توجه لیوویل را جلب کرد. بنابراین او تئوری حساب های کسری را توسعه داد و از آن در حل مسائل تئوری پتانسیل استفاده کرد.

در سالهای اخیر عبارت «حساب های کسری» نامی بی معناست و به جای آن مشتق گیری و انتگرالگیری از مرتبهٔ دلخواه که ممکن است گویا، اصم یا مختلط باشد ترجیح داده می شود. شرح تحلیلی مشتق گیری و انتگرالگیری مختلط توسط سریواستاوا[۱۲] و اُوا [۱۳] در [۲۳] بحث شده است. این انتگرال ها و مشتق ها صرفاً کنجکاوی های ریاضیات نیستند بلکه در علوم مختلف مثل فیزیک، شیمی، زیست، پزشکی و... کاربردهایی نیز دارند. اخیراً کاربردهای مفیدی از معادلات دیفرانسیل کسری با عملگر مشتق ریمان – لیوویل در شاخه های گوناگونی بدست آمده است. همچنین حسابهای کسری برای مطالعه انواع فراکتال ها از توابعی مثل تابع وایراشتراس [۱۴] و تابع پلکانی لبگ [۱۵] مورد استفاده قرار گرفتند. در متون اخیر نیز تعمیم مشتقات و انتگرالهای کسری بسیار مورد توجه قرار گرفته اند.

هدف اصلی در این رساله بررسی وجود جواب و یکتایی جواب برای بعضی از معادلات دیفرانسیل کسری در یک فاز نامتناهی است. مطالب مندرج در این رساله در پنج فصل، به ترتیب زیر تنظیم شده است:

فصل اول، به معرفی توابع مهم و پرکاربرد در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری می پردازد.

فصل دوم، پیشنیاز فصول بعد می باشد و شامل معرفی انواع مشتق و انتگرال کسری، تعاریف و قضایای مقدماتی در معادلات دیفرانسیل کسری می باشد.

فصل سوم، به بررسی وجود جواب یکتا برای معادلات دیفرانسیل کسری در یک فاز نامتناهی روی

---

۱۲ Srivastava

۱۳ Owa

۱۴ Weierstrass

۱۵ Lebesgue

فضای فرشه [۱۶] می پردازد.

فصل چهارم، به بررسی وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل کسری در یک فاز نامتناهی اختصاص دارد.

فصل پنجم، به مطالعه وجود جواب یکتا برای معادلات دیفرانسیل کسری با ضرایب چند جمله‌ای در یک فاز نامتناهی روی فضای فرشه می پردازد.

۱۶ Fréchet

فصل ۱

تعاریف پایه

۱.۱ مقدمه

دراین فصل توابع خاصی که در حساب کسری با آنها سروکار داریم را معرفی می کنیم. این توابع عبارتند از: تابع گاما، تابع بتا و تابع میتاگ — لفلر.

این فصل از منابع [۱۵، ۱۹، ۲۰] گردآوری شده اشت.

۲.۱ تابع گاما

بدون شک یکی از توابع پایه‌ای حساب کسری، تابع گامای اویلر $\Gamma(z)$ است.

در این بخش علاوه بر تعریف، برخی نتایج و خواص تابع گاما را بررسی می کنیم.

۱.۲.۱ تعریف تابع گاما

تابع گاما $\Gamma(z)$، بوسیلهٔ انتگرال زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad (1.2.1)$$

که در نیم صفحهٔ راست صفحه مختلط $(Re(z) > 0)$ همگراست.

۲.۲.۱ خواص تابع گاما

یکی از خصوصیات مهم تابع گاما عبارت است از:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad (2.2.1)$$

که بوسیله انتگرالگیری جزء به جزء ، براحتی اثبات می شود:

$$\Gamma(z+1) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z} dt = \left[-e^{-t} t^{z}\right]_{t=0}^{t=\infty} + z\int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z). \qquad (3.2.1)$$

اگر n یک عدد صحیح باشد، آنگاه:

$$\Gamma(z+n)\Gamma(-z+n+1) = (-1)^{n}\Gamma(z)\Gamma(1-z), \quad \forall n. \qquad (4.2.1)$$

بدیهی است که $\Gamma(1) = 1$ و با استفاده از (۲.۲.۱) برای $n = 1, 2, 3, \cdots$ داریم:

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1 = 1!, \\
\Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\
\Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\
\cdots &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!
\end{aligned}$$

** برای ارتباط بیشتر با فصول بعد از این پس به جای حرف z از α استفاده می کنیم.

نماد $\alpha! = \Gamma(\alpha + ۱)$ به ازای هر α، حتی وقتی که $\alpha = -۱, -۲, -۳, \cdots$، نیز قابل استفاده است.

ضریب دو جمله ای بصورت زیر بیان می شود:

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(۱ + \alpha)}{\Gamma(\beta + ۱)\Gamma(۱ + \alpha - \beta)}.$$

در حالت خاص اگر β عدد صحیح نامنفی باشد (یعنی $\beta = n$)، آنگاه با استفاده از معادله (۴.۲.۱) بدست می آید:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(۱ + \alpha)}{n!\Gamma(۱ + \alpha - n)} = (-۱)^n \frac{\Gamma(n - \alpha)}{n!\Gamma(-\alpha)} = (-۱)^n \binom{n - \alpha - ۱}{n}. \qquad (۵.۲.۱)$$

۳.۲.۱ نمایش حدی تابع گاما

حد اویلر تعریف جامعی از $\Gamma(\alpha)$ ارائه کرده است.

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha + ۱)\cdots(\alpha + n)}, \qquad Re(\alpha) > ۰. \qquad (۶.۲.۱)$$

۳.۱ تابع بتا

در این بخش تابع وابسته به تابع گاما $\Gamma(z)$ یعنی تابع بتا $B(z, w)$ معرفی خواهد شد.

۱.۳.۱ تعریف تابع بتا

تابع بتا $B(z, w)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$B(z, w) = \int_{۰}^{۱} \tau^{z-۱}(۱ - \tau)^{w-۱} d\tau, \qquad (Re(z) > ۰,\ Re(w) > ۰). \qquad (۷.۳.۱)$$