بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

نقطه ثابت نگاشت های تک مقداری و نگاشت های چندمقداری

استاد راهنما:
دکتر بهرام محمدزاده

استاد مشاور:
دکتر حسین هدایتی

نگارش:
خدیجه بای پور

شهریور ۱۳۹۰

سپاس گزاری...

سپاس خداوند حکیم را که با لطف بیکران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

چکیده

این پایان نامه مبتنی بر ۵ فصل می باشد. در فصل اول به بیان مقدماتی مرتبط با پایان نامه می پردازیم. در فصل دوم، قضیه نقطه ثابت براوئر و تعمیم های آن را بیان می کنیم، که اصل کلیدی در این پایان نامه است. در فصل سوم قضیه کاکوتانی و تعمیم های آنرا مورد بررسی قرار می دهیم. در حقیقت قضیه کاکوتانی، قضیه براوئر را به نگاشت های چند مقداری تعمیم می دهد. در فصل چهارم قضیه نقطه ثابت تارسکی را بیان و اثبات می کنیم. این قضیه با توابع پیوسته سر و کار ندارد و وجود نقاط ثابت از نگاشت های تعریف شده روی مجموعه مشبکه تام، صادق در بعضی شرایط یکنوایی، را اثبات می کند. از آنجاییکه یک تابع پیوسته لزوما در شرایط قضیه تارسکی صدق نمی کند، در ادامه فصل چهارم یک ویژگی بیان می کنیم که تحت آن هر نگاشت ناپیوسته نقطه ثابت دارد. کاربردهای قضایای نقطه ثابت بسیار زیاد است. در فصل آخر، چند نمونه از این کاربرد ها را بیان می کنیم.

کلمات کلیدی: خاصیت نقطه ثابت توپولوژیکی; نقطه ثابت نگاشت های تک مقداری و نگاشت های چند مقداری; نقطه ثابت نگاشت های ناپیوسته; کاربردهایی از قضیه های نقطه ثابت;

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمه و تعاریف اصلی

۱.۱: مقدمه ای از آنالیز و توپولوژی

تعریف ۱.۱.۱ [47] گردایه τ از زیرمجموعه ها ی یک مجموعه X را یک توپولوژی در X گویند اگر τ ویژگی های زیر را داشته باشد :

i. $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$

ii. اگر $v_i \in \tau$ برای $i=1,\dots,n$ ، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} v_i \in \tau$

iii. اگر $\{v_\alpha\}$ یک گردایه دلخواه از اعضای τ باشد، آنگاه $\bigcup_{\alpha} v_\alpha \in \tau$.

اگر τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه (X,τ) یک فضای توپولوژیکی نامیده می شود. اعضای τ مجموعه های باز در X و متمم هایشان، مجموعه های بسته نامیده می شوند. به کمک قوانین دمورگان مشاهده می کنیم که خانواده مجموعه های بسته تحت اشتراک های دلخواه و اجتماع های متناهی بسته هستند.

اگر $A \subseteq X$ ، اجتماع همه مجموعه های باز مشمول در A ، درون A نامیده می شود. و اشتراک همه مجموعه های بسته شامل A، بستار A نامیده می شود. درون و بستار A را به ترتیب با A° و$\overline{A}$ نشان می دهیم. بوضوح A° بزرگترین مجموعه باز مشمول در A و $\overline{A}$ کوچکترین مجموعه بسته شامل A است. تفاضل $\overline{A} \setminus A^\circ$ مرز A نامیده می شود و با ∂A نشان داده می شود. اگر $\overline{A} = X$ ، آنگاه می گوییم A در X چگال است. نقطه $x \in X$ ، نقطه حدی A نامیده می شود، هرگاه به ازای هر همسایگی مانند U از x ، داشته باشیم : $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. مجموعه حدی از A عبارتست از مجموعه تمام نقاط حدی A ، این مجموعه با A' نشان داده می شود. مجموعه A را کامل گویند، اگر $A = A'$. مجموعه A پراکنده گفته می شود، اگر تنها زیرمجموعه های B از A که $B \subseteq B'$ مجموعه تهی باشد.

۱.۱.۲ : فضای متری [49] یک فضای متری مجموعه ای مانند X است که در آن یک متر مانند d با خواص زیر تعریف شده است :

۱) $d(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$

۲) به ازای هر x, y ، $0 \leq d(x,y) < \infty$

۳) به ازای هر x, y در X $d(x,y) = d(y,x)$

۴) به ازای هر x, y, z در X ، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

تعریف ۱.۱.۳ [49] دنباله $\{x_n\}$ در فضای متری X را کوشی گویند، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، N طبیعی موجود باشد بطوریکه $n , m \geq N$ ایجاب کند $d(x_n , x_m) < \varepsilon$.

تعریف ۱.۱.۴ [49] فضای متری X را تام گویند، هرگاه هر دنباله کوشی در X ، به نقطه ای از X همگرا باشد.

هر زیرمجموعه بسته از یک فضای متری تام، تام است و هر زیرمجموعه تام از یک فضای متری دلخواه، بسته است.

تعریف ۱.۱.۵ [48] فضای برداری X را یک فضای خطی نرمدار گویند، اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که :

۱) به ازای هر x, y در X ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$

۳) $\|x\| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب نماید.

هر فضای خطی نرمدار را می توان یک فضای متری در نظر گرفت.

هر فضای خطی نرمدار که با متر تعریف شده بوسیله ی نرمش تام باشد، یک فضای باناخ نامیده می شود. از ساده ترین فضاهای باناخ $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ می باشند.

تعریف ۱.۱.۶ [48] یک نیم نرم روی یک فضای برداری X ، عبارتست از یک تابع حقیقی مقدار P روی X ، بطوریکه

۱) به ازای هر $x \in X$ ، $P(x) \geq 0$

۲) به ازای هر x , y در X ، $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$

۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $P(\alpha x) = |\alpha|\, P(x)$

یک نیم نرم P، نرم است، اگر در ویژگی زیر صدق کند:

۳) $P(x) \neq 0$ اگر $x \neq 0$.

تعریف ۱.۱.۷ [48] فرض کنید X یک فضای برداری باشد مجموعه $A \subseteq X$ جاذب گفته می شود اگر برای هر $x \in X$ ، $x \in tA$ برای بعضی $t > 0$.

تعریف ۱.۱.۸ [48] فرض کنید X یک فضای برداری و $A \subseteq X$ باشد. تابعک مینکوفسکی μ_A به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_A(x) = \inf\{\, t > 0 \;:\; t^{-1}x \in A \,\} \qquad (x \in X).$$

تعریف ۱.۱.۹ [49] اگر X و Y فضاهای توپولوژیکی باشند و f یک نگاشت از X به توی Y باشد، آنگاه f را پیوسته گویند اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y ، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه باز در X باشد.

تعریف ۱.۱.۱۰ [49] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $F: X \to X$ انقباض گفته می شود اگر ثابت $k \in [0,1)$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x , y \in X$ داشته باشیم $d\,(F(x), F(y)) \leq k\, d(x, y)$.

تعریف ۱.۱.۱۱ [49] نگاشت f از فضای برداری E به توی $\mathbb{R}^n$ را کراندار گویند هرگاه عددی حقیقی مانند M موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x \in E$ ، $\|f(x)\| \leq M$.

تعریف ۱.۱.۱۲ [49] مجموعه X را محدب گویند، هرگاه به ازای هر زوج از نقاط X، قطعه خط واصل بین آنها نیز در X قرار گیرد. اگر C محدب باشد، آنگاه درونش، $\text{int}\ C$ ، و بستارش، $\bar{C}$ محدب اند.

تعریف ۱.۱.۱۳ [48] فرض کنید X یک مجموعه محدب و Y یک فضای برداری باشد، نگاشت $f: X \to Y$ را آفین گویند هرگاه:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall\, \lambda \in [0,1] \ , \ \forall\ x , y \in X .$$

تعریف ۱.۱.۱۴ [49] مجموعه X را فشرده گویند اگر هر پوشش باز از X ، یک زیرپوشش متناهی داشته باشد. این مطلب هم ارز است با بیان اینکه هر مجموعه از مجموعه های بسته در X با خاصیت اشتراک متناهی، اشتراک ناتهی دارد.

می دانیم در $\mathbb{R}^n$، فشردگی با بسته و کراندار بودن، معادل است. همچنین داریم:

- هر زیر مجموعه بسته از یک فضای فشرده، فشرده است.
- اگر f پیوسته و X فشرده باشد، پس $f(X)$ فشرده است.
- در یک فضای متریک فشرده، هر دنباله، دارای زیر دنباله ای همگرا است.

تعریف ۱.۱.۱۵ [40] اگر نقاط X را بتوان به وسیله مجموعه های باز و مجزا، از هم جدا کرد، X را هاسدورف گویند. همچنین داریم :

- در یک فضای هاسدورف، زیرمجموعه های فشرده، بسته هستند.
- یک فضای هاسدورف فشرده، نرمال است. بدین معنی که مجموعه های بسته مجزا را می توان بوسیله مجموعه های باز مجزا، از هم جدا کرد.

تعریف ۱.۱.۱۶ [40] یک زیرمجموعه بطور نسبی فشرده از یک فضای توپولوژیکی، زیرمجموعه ای است که بستارش، فشرده باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷ [48] فرض کنید τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد بطوریکه

۱. هر نقطه از X یک مجموعه بسته باشد،

۲. عملگر های فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشند.

تحت این شرایط τ یک توپولوژی برداری روی X گفته می شود، و X یک فضای برداری توپولوژیکی است.

- یک فضای برداری توپولوژیکی را موضعا محدب گویند، اگر یک همسایگی محدب حول مبدا وجود داشته باشد.
- یک فضای برداری توپولوژیکی را موضعا فشرده گویند، اگر یک همسایگی حول مبدا با بستار فشرده وجود داشته باشد.

۱.۱.۱۸ قضیه: [48] هر فضای برداری توپولوژیکی، هاسدورف است.

۱.۱.۱۹ قضیه: [48] هر فضای برداری توپولوژیکی موضعا فشرده، متناهی بعد است.

تعریف ۱.۱.۲۰ : [48] اگر Y , X فضاهای برداری توپولوژیکی باشند، آنگاه

$\mathcal{B}(X,Y) = \{ f: X \to Y :$ خطی کراندار $f \}$.

در حالتی که Y میدان اسکالر باشد، $\mathcal{B}(X,Y)$ فضای دوگان X است و با X^* نشان داده می شود.

تعریف ۱.۱.۲۱: [24] یک چند سقفی P در یک فضای برداری توپولوژیکی X، یک زیرمجموعه محدب فشرده ناتهی از X مشمول در یک زیرفضای متناهی بعد از X است.

تعریف ۱.۱.۲۲ : [24] فرض کنید P یک فضای اقلیدسی باشد. می گوییم تابع $f: P \to P$ حافظ جهت ناخالص موضعی است اگر برای هر $x \in P$ که $f(x) \neq x$، $\delta > 0$ موجود باشد بطوریکه برای هر $y , z \in B(x, \delta) \cap P$ تابع f در $(f(y) - y) . (f(z) - z) \geq 0$ صدق کند.

تعریف ۱.۱.۲۳ : [25] محمل (ساپورت) تابع $f : X \to \mathbb{R}$ عبارتست از مجموعه

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{ x \in X : f(x) \neq 0 \}} .$$

تعریف ۱.۱.۲۴: [25] یک پوشش $\{u_\alpha\}$ از X موضعا متناهی گفته می شود اگر برای هر $x \in X$ یک همسایگی از x موجود باشد که با تعداد متناهی از u_α ها اشتراک دارد.

تعریف ۱.۱.۲۵: [25] یک افراز یکانی روی مجموعه X، گردایه ای از توابع $\{ f_\gamma: X \to \mathbb{R} \}$ با ویژگی های زیر است :

۱. $f_\gamma \geq 0$ روی X
۲. $\{\mathrm{supp}(f_\gamma)\}$ یک پوشش موضعا متناهی از X باشد
۳. برای هر $x \in X$، $\sum_\gamma f_\gamma (x) = 1$.

یک افراز یکانی، وابسته به یک پوشش باز $\{A_\alpha\}$ از X گفته می شود، اگر برای هر γ ، یک A_α موجود باشد بطوریکه $\mathrm{supp}(f_\gamma) \subset A_\alpha$.
اگر X فشرده باشد، پس هر پوشش باز از X یک افراز یکانی وابسته به آن پوشش خواهد داشت.

۱.۲: مقدمه ای از سیمپلکس

تعریف۱.۲.۱: [53] پوش محدب از یک زیرمجموعه $A=\{a_1,\dots,a_k\}$ از $\mathbb{R}^n$، عبارتست از مجموعه $\mathrm{conv}(A)=\{\sum_{i=1}^{k} c_i a_i : c_i \geq 0 , \sum_{i=1}^{k} c_i = 1\}$.

تعریف۱.۲.۲: [53] یک زیرمجموعه S از $\mathbb{R}^n$ یک K- سیمپلکس نامیده می شود، اگر یک مجموعه $V=\{v_0,\dots,v_k\}$ وجود داشته باشد بطوریکه بردارهای $(v_1 - v_0), \dots, (v_k - v_0)$ مستقل خطی باشند و $S=\overline{\mathrm{conv}}\{v_0,\dots,v_k\}$.

v_i ها رئوس از S نامیده می شود. اگر ابهامی وجود نداشته باشد برای نشان دادن سیمپلکس S به سادگی می توانیم بنویسیم $S=\{v_0,\dots,v_k\}$.

یک p- صفحه از S ، پوش محدب بسته از هر زیرمجموعه شامل p نقطه در V است.

یک مجتمع سادکی X ، مجموعه ای از متناهی از سیمپلکس هایی است که در شرایط زیر صدق کند:

۱) X شامل صفحه های هر عضو باشد،

۲) اشتراک هر دو عضو از X یک صفحه باشد.

۱.۳: توابع چند مقداری

تعریف ۱.۳.۱: [23] فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیکی باشند. یک نگاشت چند مقداری $F: X \to 2^Y$ نگاشتی است که $x \in X$ را به زیرمجموعه های $F(x)$ از Y نظیر می کند.

- می نویسیم $\bigcup_{x\in X} F(x) = F(X)$.

- برای $y \in Y$ ، وارون F در y را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$F^{-1}(y) = \{ x \in X : y \in F(x) \}$$

- و برای B زیرمجموعه Y داریم :

$$F^{-1}(B) = \{ x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset \}$$

- گراف F عبارتست از مجموعه : $\mathrm{Gr}(F) = \{ (x,y) \in X \times Y : y \in F(x) \}$

- نگاشت F را نیم پیوسته بالایی گویند اگر برای هر مجموعه بسته $B \subset Y$، مجموعه $F^{-1}(B) = \{\, x \in X : \ F(x) \cap B \neq \emptyset \,\}$ در X بسته باشد.

- نگاشت F را نیم پیوسته پایینی گویند اگر برای هر مجموعه باز $B \subset Y$، مجموعه $F^{-1}(B) = \{\, x \in X : \ F(x) \cap B \neq \emptyset \,\}$ در X باز باشد.

- نگاشت F پیوسته است اگر و تنها اگر نیم پیوسته بالایی و نیم پیوسته پایینی باشد.

- نگاشت F بسته است اگر $Gr(F) = \{\, (x,y) \in X \times Y \ : \ y \in F(x) \,\}$ بسته باشد.

- نگاشت F فشرده است اگر $\overline{F(X)}$ یک زیرمجموعه فشرده از Y باشد.

۱.۳.۲ قضیه: [23] اگر Y فشرده و F یک نگاشت بسته باشد، پس F نیم پیوسته بالایی است.

۱.۳.۳ قضیه: [23] اگر Y فشرده، تصویر X تحت F بسته باشد، پس F، نیم پیوسته بالایی است اگر و فقط اگر $Gr(F)$ در $X \times Y$ بسته باشد.

توجه : در یک فضای برداری توپولوژیکی، یک نگاشت چند مقداری نیم پیوسته بالایی با تصاویر محدب بسته، ناتهی، به طور مختصر **cusco** نامیده می شود.

۱.۳.۴: نکاتی در مورد cusco :

نکته ۱: [53] فرض کنید X زیر مجموعه فشرده از یک فضای برداری توپولوژیکی، $F : X \to 2^X$ یک cusco و $f : X \to X$ خطی باشد. آنگاه $foF: f(x) \to 2^{f(x)}$ ، یک cusco است.

نکته ۲: [53] فرض کنید X زیرمجموعه ای بسته از فضای باناخ Y، $F: X \to 2^X$ یک cusco و $f: Y \to Y$ پیوسته باشد. آنگاه $Fof: Y \to 2^Y$ یک cusco است.

۱.۴: ترتیب ها

تعریف ۱.۴.۱: [40] یک ترتیب جزئی روی مجموعه ای ناتهی مانند X ، رابطه ای مانند R روی X با خواص زیر است :

۱) اگر $x\,R\,y$ و $y\,R\,z$ ، آنگاه $x\,R\,z$

۲) اگر $x\,R\,y$ و $y\,R\,x$ ، آنگاه $x = y$

۳) به ازای هر x ، $x\,R\,x$.

اگر R در خاصیت زیر نیز صدق کند، آنگاه R یک ترتیب خطی (کلی) نامیده می شود :

۴) اگر $x, y \in X$ ، آنگاه $x\,R\,y$ یا $y\,R\,x$.

مجموعه X با یک ترتیب جزئی (ترتیب کلی) R را ، مجموعه جزئا مرتب (کلا مرتب) می نامند و با (X, R) نشان می دهند.

تعریف ۱.۴.۲: [40] فرض کنید $(X, \leq)$ مجموعه جزئا مرتب باشد. $m \in X$ را عنصر ماکزیمال گویند، اگر به ازای هر $x \in X$ ، $m \leq x$ نتیجه دهد $x = M$.

یک مجموعه P را استقرایی گویند، اگر هر زیرمجموعه کلا مرتب P ، دارای عنصر ماکزیمال باشد.

لم زورن : [40] هر مجموعه جزئا مرتب، ناتهی و استقرایی، حداقل یک عنصر ماکزیمال دارد.

تعریف ۱.۴.۳ : [40] یک مجموعه P و یک رابطه $\leq$ روی P را در نظر می گیریم. آنگاه $\leq$ یک پیش ترتیب است اگر انعکاسی و تعدی باشد. یعنی برای هر a , b , c در P داشته باشیم :

۱) $a \leq a$

۲) اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ پس $a \leq c$.

یک مجموعه با یک پیش ترتیب، یک مجموعه پیش مرتب نامیده می شود. اگر یک پیش ترتیب، پاد متقارن باشد، یعنی $a \leq b$ و $b \leq a$ نتیجه دهد $a = b$ ، آنگاه یک ترتیب جزئی است. اگر یک پیش ترتیب، متقارن باشد، یعنی $a \leq b$ نتیجه دهد $b \leq a$ ، آنگاه یک رابطه هم ارزی است.

۱.۵: خاصیت نقطه ثابت توپولوژیکی

تعریف ۱.۵.۱ : [40] فرض کنید X یک مجموعه و $f : X \to X$ یک تابع باشد. $x \in X$ را یک نقطه ثابت f گویند اگر تابع f در شرط $f(x) = x$ صدق کند.

همه توابع نقطه ثابت ندارند. برای مثال، اگر f یک تابع تعریف شده روی خط حقیقی با ضابطه $f(x) = x + 1$ باشد، آنگاه f نقطه ثابت ندارد. چون به ازای هر عدد حقیقی، x هرگز با $x + ۱$ برابر نیست.

از نقطه نظر هندسی یک نقطه ثابت، نقطه $(x , f(x))$ است که روی خط $y = x$ قرار دارد، یا به عبارت دیگر نمودار f با خط $y = x$ نقطه مشترک داشته باشد. در مثال $f(x) = x + 1$ نمودار f با خط $y = x$ موازی است، پس هیچ نقطه مشترکی ندارد.

تعریف ۱.۵.۲ : [40] مجموعه X خاصیت نقطه ثابت توپولوژیکی دارد، اگر هر تابع پیوسته از X به خودش نقطه ثابت داشته باشد.

مثال ۱.۵.۳ : به وضوح فضای $\mathbb{R}^n$ خاصیت نقطه ثابت توپولوژیکی ندارد.

مثال ۱.۵.۴ : بازه $[0,1]$ خاصیت نقطه ثابت توپولوژیکی دارد.

حل : فرض کنید $f : [0,1] \to [0,1]$ نگاشت پیوسته باشد. اگر $f(0) = 0$ یا $f(1) = 1$ حکم برقرار است. در غیراینصورت تعریف می کنیم $g(x) = f(x) - x$. بوضوح g تابعی پیوسته است و داریم $g(0) > 0$ و $g(1) < 0$. لذا بنابر قضیه مقدار میانی، $c \in [0,1]$ وجود دارد، بطوریکه $g(c) = 0$ در نتیجه $f(c) = c$.

در کل شناخته شده نیست که دقیقا چه نوع مجموعه هایی خاصیت نقطه ثابت دارند.

مثال ۱.۵.۵ : نگاشت $x \longrightarrow x+1$ روی بازه $[0,\infty]$، یک تابع پیوسته از بازه ای بسته و بی کران از خط حقیقی، به خودش است ولی نقطه ثابت ندارد.

مثال ۱.۵.۶ : نگاشت $x \rightarrow \frac{x+1}{2}$ روی $(0,1)$ یک تابع پیوسته است اما نقطه ثابت در $(0,1)$ ندارد.

از آنجا که بسته و کراندار بودن در فضای $\mathbb{R}^n$ معادل با فشردگی است، پس از دو مثال ذکر شده در بالا، به نظر می رسد که فشردگی ویژگی ضروری باشد. با اینحال به وضوح این ویژگی کافی نیست. برای مثال مجموعه $[0,1] \cup [2,3]$ فشرده است اما خاصیت نقطه ثابت ندارد. از این مثال همچنین می توان دریافت کرد که مجموعه مورد نظرمان نباید هیچ حفره ای داشته باشد.
بنابراین بهتر است که مجموعه مورد نظرمان را به مجموعه های انقباض پذیر محدود کنیم. یعنی مجموعه هایی که می توانند به طور پیوسته به یک نقطه تغییر شکل یابند. البته این خاصیت به تنهایی کافی نیست، برای مثال $(0,1)$ انقباض پذیر است اما خاصیت نقطه ثابت ندارد. مرحله منطقی بعدی این است که آیا مجموعه هایی با هر دو خاصیت یعنی مجموعه های فشرده و انقباض پذیر، خاصیت نقطه ثابت دارند؟
این سؤال توسط برسوک [1] در ۱۹۳۲ مطرح و پس از ۲۰ سال توسط کینوشیتا[2] رد شد. [11]
آنچه نیاز داریم چیزی کمی قویتر از انقباض پذیری است. هر مجموعه محدب، انقباض پذیر است.
محدب و فشرده بودن شرایط کافی است که وجود نقاط ثابت را تضمین می کند.
همچنین برای مجموعه های محدب، فشردگی ضروری است. برای مثال $(0,1)$ خاصیت نقطه ثابت ندارد. هر چند وجود دارد مجموعه های غیر محدبی، که خاصیت نقطه ثابت دارند. برای مثال، بستار مجموعه $\{ (x,y) \; : \; y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \; , \; 0 < x \leq \frac{1}{\pi} \}$ همراه با کمان اتصالی نقاط $(0,1)$ و $(\frac{1}{\pi},0)$ یک مجموعه غیر محدب است که خاصیت نقطه ثابت دارد.
برای مجموعه های غیرمحدب، فشردگی و انقباض پذیری رابطه مستقیم با خاصیت نقطه ثابت ندارند. در کل شناخته شده نیست که چه نوع مجموعه های غیر محدبی دارای این خاصیت هستند.

1.Borsuc
2.Kinoshita

۱.۵.۷: نکاتی در مورد خاصیت نقطه ثابت توپولوژیکی

می دانیم دوسویی پیوسته با وارون پیوسته یک همئومورفیسم است. و یک خاصیت، پایای توپولوژیکی است، اگر تحت همئومورفسیم حفظ شود.

نکته۱: خاصیت نقطه ثابت توپولوژیکی، یک پایای توپولوژیکی است.

اثبات : فرض کنید X، خاصیت نقطه ثابت توپولوژیکی داشته باشد، $h: X \to Y$ یک همئومورفیسم و $f: Y \to Y$ پیوسته باشد. پس $h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$ پیوسته است. و بنابر فرض نقطه ثابت مانند x دارد. در نتیجه $f(h(x)) = h(x)$ ، و لذا Y خاصیت نقطه ثابت توپولوژیکی دارد.■

یادآوری می کنیم که یک درون بری از یک مجموعه X به توی زیرمجموعه Y از X عبارتست از تابع پیوسته $r: X \to Y$ به قسمی که $r|_y$ نگاشت همانی باشد.

نکته ۲: خاصیت نقطه ثابت توپولوژیکی تحت درون بری حفظ می شود.

اثبات : فرض کنید X، خاصیت نقطه ثابت داشته باشد، $r: X \to Y$ درون بری و $f: Y \to Y$ پیوسته باشد. پس $f \circ r : X \to X$ یک درونریختی پیوسته از X است. لذا x وجود دارد بطوریکه $f \circ r(x) = x$. چون $x \in Y$ و $r(x) = x$ ، در نتیجه x نقطه ثابت از f است، بنابراین Y، خاصیت نقطه ثابت توپولوژیکی دارد. ■

نکته ۳ : حاصلضربی از فضاها با خاصیت نقطه ثابت، لزوما خاصیت نقطه ثابت ندارند، حتی اگر یکی از این فضاها بازه بسته حقیقی باشد. [3]

۱.۶: نظریه نقطه ثابت

نظریه نقطه ثابت دو شاخه اصلی دارد: یکی نتایجی که با استفاده از ویژگی های توپولوژیکی بدست می آیند و دیگری نتایجی که از فرضیات متریک القا می شوند. در شاخه توپولوژیکی، دو قضیه مهم، قضیه براوئر[۱]، و نوع نامتناهی بعد آن، قضیه نقطه ثابت شویدر[۲] است. در هر دو قضیه، فشردگی نقش اساسی دارد. قضیه نقطه ثابت براوئر، یکی از نتایج مهم در آنالیز است. این قضیه وجود نقطه ثابت، برای یک نگاشت پیوسته از یک گوی بسته در فضای اقلیدسی را تضمین می کند. تعمیم های بسیاری برای قضیه براوئر وجود دارد. تعمیم به زیرمجموعه های محدب فشرده از فضای باناخ توسط شویدر و توسیع به فضاهای برداری توپولوژیکی موضعا محدب به وسیله تیخونوف[۳] ارائه شد.
در ۱۹۵۵، داربو[۴]، قضیه شویدر را به عملگرهای غیرفشرده، با معرفی نوعی نگاشت انقباضی، توسیع داد. توسیع هایی از قضیه های براوئر، شویدر، تیخونوف به نگاشت های مجموعه مقدار نیم پیوسته بالایی با مقادیر محدب بسته (به ترتیب) به وسیله کاکوتانی[۵]، فن[۶] و هیمیلبرگ[۷] ارائه شده است.
در رابطه با شاخه متریک، قضیه نقطه ثابت مهم، قضیه نقطه ثابت باناخ (اصل انقباض باناخ) است. اگر چه، به طور تاریخی دو شاخه از نظریه نقطه ثابت به طور مجزا توسعه یافتند، در ۱۹۵۸، کراسنسولسکی[۸] اثبات کرد که مجموع دو عملگر A+B، که A نگاشت پیوسته و فشرده و B نگاشت انقباض است، تحت شرایطی نقطه ثابت دارد. این قضیه، اصل انقباض باناخ و قضیه نقطه ثابت شویدر را ترکیب می کند و بنابراین آمیزه ای از دو شاخه است.

1.Brouwer
2.Schouder
3.Tychonoff
4.Darbo
5.Kakutani
6.Fan
7.Himmilberg
8.Krasnoselski

فصل دوم

قضیه نقطه ثابت براوئر

۲.۱: مقدمه

قضیه نقطه ثابت براوئر[۱] بیان می کند که زیرمجموعه های محدب، فشرده از $\mathbb{R}^n$ خاصیت نقطه ثابت دارند. براوئر نخستین کسی نبود که قضیه اش را اثبات کرد. ریشه ی قضیه به سال ۱۸۱۷ بر می گردد، هنگامیکه قضیه مقدار میانی بولزانو[۲] ظاهر شد. در ۱۸۸۳ پوانکاره [۳] این نتیجه را تعمیم داد به آنچه امروز به عنوان قضیه بولزانو– پوانکاره– میراندا[۴] شناخته شده است. نام میراندا به این قضیه متصل شد، چون در ۱۹۴۱ او اثبات کرد که این قضیه در حقیقت هم ارز با قضیه براوئر است. علاوه بر این، نتایج هم ارز دیگری هم وجود داشتند، به عنوان مثال، در ۱۹۰۴ ، بهل[۵] با بکارگیری قضیه گرین، اثبات کرد که هیچ درون بری از گوی n- بعدی به توی کرانش نمی تواند وجود داشته باشد.

1.Brouwer 2. Bolzano 3.Poincare

4.Miranda 5.Bohl