دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

آنالیز روی حاصلضرب‌های خاص از جبرهای باناخ

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی (آنالیز)

اقبال قادری

استاد راهنما

دکتر رسول نصر اصفهانی

۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی (آنالیز) آقای اقبال قادری

تحت عنوان

آنالیز روی حاصلضرب‌های خاص از جبرهای باناخ

در تاریخ ۱۳۸۷/۱۲/۱۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر رسول نصر اصفهانی
۲– استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر علی رجالی (دانشگاه اصفهان)
۳– استاد داور ۱	دکتر سعید مقصودی (دانشگاه زنجان)
۴– استاد داور ۲	دکتر محمود منجگانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده　　　　دکتر رسول نصر اصفهانی

به نام خدایی که فضلش همه جا گسترده و دست عطایش را به طرف همه کس دراز نموده است و بندگانش را برای رهایی از جهل و نادانی با چراغ ایمان و تفکر و اراده هدایت می‌کند. خدای بزرگ و دانا را شاکر و سپاسگزارم که بار دیگر به من این توفیق را عطا نمود تا بتوانم در سایه‌ی پرتو الطاف بیکرانش یکی دیگر از مراحل تحصیلی‌ام را با موفقیت به پایان برسانم.

از اساتید گرانقدر و ارجمندی که در این پایان نامه مرا همراهی نمودند نهایت سپاس و تشکر را دارم گر چه زبانم قاصر و قلمم عاجز از آن است که بتوانم تشکری را که درخورشان است داشته باشم.

از پدر و مادر عزیزم، پشتیبان‌های همیشگی، اسطوره‌های مهربانی و تنها سرمایه‌های زندگی‌ام که به عنوان استادهای زندگی همیشه با محبت‌ها و راهنمایی‌های خود به من توان زیستن دادند و مایه‌ی دلگرمی و قوت قلب در تمامی مراحل زندگی‌ام هستند از صمیم قلب تشکر می‌کنم و برای آنها سربلندی در درگاه ایزد منان را خواستارم.

صمیمانه‌ترین سپاس‌ها و تشکرات را تقدیم می‌کنم به استاد راهنمای گرامی‌ام جناب آقای دکتر رسول نصراصفهانی که نه تنها در انجام این پایان نامه، بلکه در طی این دو سال، رهنمودهای ارزشمندشان همچون چراغی فروزان فرا رویم بود و علیرغم داشتن مشکلات زیاد همواره با روی باز مرا یاری نمودند.

از جناب آقای دکتر علی رجالی از دانشگاه اصفهان که به عنوان استاد مشاور، همواره با نظرات ارزشمندشان مرا یاری نمودند و زحمت تصحیح این پایان نامه را قبول کردند، تشکر می‌کنم.

از اساتید ارجمند، آقای دکتر سعید مقصودی و دکتر سید محمود منجگانی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را پذیرفتند صمیمانه سپاسگزارم.

در پایان بر خود لازم می‌دانم که از تمام دوستان عزیزی که در طی گردآوری و تدوین این پایان نامه و نیز در این دوره‌ی تحصیلی مرا راهنمایی نمودند، سپاسگزاری کنم.

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه ضرب θ−لائو را روی $A \times B$ که در آن A و B دو جبر باناخ و θ یک تابعک خطی ضربی ناصفر روی B است تعریف می‌کنیم. $A \times B$ همراه با این ضرب تشکیل یک جبر می‌دهد که آن را با نماد $A \times_\theta B$ نشان می‌دهیم و به بررسی برخی از خواص این جبر و مقایسه‌ی آن‌ها با موارد مشابه روی جبرهای A و B می‌پردازیم. در ادامه نرم‌های A−محدب و m−محدب را روی جبرهای جابه‌جایی مطالعه می‌کنیم و ضمن معرفی نرم عملگری $\|.\|_{op}$، با مقایسه‌ی نرم‌های $\|.\|$ و $\|.\|_{op}$، دو مقدار ثابت به نام‌های ضریب m−محدبی و ضریب منظمی به دست می‌آوریم و به بررسی قضیه‌ی معروف گلفاند می‌پردازیم. نهایتاً با مطالعه‌ی یکدارساز $\mathbb{C} \times_1 A$ از A که حالت خاصی از $A \times_\theta B$ است، دو توسیع نرم منظم و کامل $\|.\|$ از A را به روی $\mathbb{C} \times_1 A$ به نام‌های l_1−توسیع و توسیع عملگری بیان می‌کنیم و ارتباط بین آن‌ها را به دست می‌آوریم.

رده بندی موضوعی: $46J05, 46J20, 46H10, 46H20$

کلمات کلیدی: جبرهای باناخ، توسیع، ایدآل، نرم محدب، نرم منظم، جبرهای نرم‌دار.

پیش‌گفتار

فرض کنیم A و B دو جبر باناخ باشند و $\theta \in \sigma(B)$. فضای حاصل‌ضربی دکارتی $A \times B$ را همراه با عمل جمع برداری و ضرب اسکالر و نرم $\|(a,b)\| = \|a\| + \|b\|$ در نظر می‌گیریم. همچنین ضرب θ–لائو را روی $A \times B$ برای هر $a, a' \in A$ و $b, b' \in B$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(a,b)(a',b') = (aa' + \theta(b')a + \theta(b)a', bb').$$

در این صورت $A \times B$ همراه با ضرب فوق یک جبر باناخ است که آن را با $A \times_\theta B$ نشان می‌دهیم. در حالت خاص $B = \mathbb{C}$ و $\theta = ۱$ داریم $A \times_\theta B$ همان یکدارساز A است. اگر A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد، آن‌گاه A نیم ساده است هرگاه هسته‌ی نگاشت گلفاند آن صفر باشد. بنابراین جبر باناخ جابه‌جایی و نیم‌ساده‌ی A می‌تواند به عنوان یک جبر باناخ در $C_\circ(\sigma(A))$ در نظر گرفته شود. جبر باناخ A را تاوبری نامیم هرگاه مجموعه‌ی تمام عناصر $\hat{a}$ که $a \in A$ و محمل $\hat{a}$ با توپولوژی گلفاند در $\sigma(A)$ فشرده‌است در A

چگال باشد. هسته‌ی مجموعه‌ی بسته E از $\sigma(A)$ را با $k(E) := \{a \in A : \ \ \phi(a) = ۰, \ \phi \in E\}$ و پوش مجموعه‌ی $I \subseteq A$ را با $h(I) := \{\phi \in \sigma(A) : \ \ \phi(a) = ۰, \ a \in I\}$ تعریف می‌کنیم. یک مجموعه‌ی بسته $E \subseteq \sigma(A)$ را مجموعه طیفی از A می‌نامیم هرگاه $k(E)$ تنها ایدآل بسته‌ای از A باشد که پوش آن برابر E باشد.

دوگان جبر باناخ A یک ساختار $A-$مدولی راست و چپ را به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle a.\phi, b\rangle = \langle \phi, ba\rangle \qquad \langle \phi.a, b\rangle = \langle \phi, ab\rangle \qquad (a, b \in A, \ \ \phi \in A^*).$$

حاصل‌ضرب آرنز اول (یا چپ) $\Box$ را روی A^{**} به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle \Phi\Box\Psi, \phi\rangle = \langle \Phi, \Psi \odot \phi\rangle \qquad \langle \Psi \odot \phi, a\rangle = \langle \Psi, \phi.a\rangle \qquad (\Phi, \Psi \in A^{**})$$

به طور مشابه حاصل‌ضرب آرنز دوم (یا راست) $\Diamond$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle \Phi\Diamond\Psi, \phi\rangle = \langle \Psi, \phi \odot \Phi\rangle \qquad \langle \phi \odot \Phi, a\rangle = \langle \Phi, a.\phi\rangle \qquad (\Phi, \Psi \in A^{**})$$

مرکز توپولوژیک چپ $Z_t^l(A^{**})$ از A^{**}، مجموعه‌ی تمام $\Phi \in A^{**}$ است به طوری که برای هر $\Psi \in A^{**}$ داشته باشیم $\Phi\Box\Psi = \Phi\Diamond\Psi$. جبر A را منظم آرنز نامیم هرگاه $Z_t^l(A^{**}) = A^{**}$. و قویاً نامنظم چپ آرنز می‌نامیم اگر $Z_t^l(A^{**}) = A$.

حال فرض کنیم A یک جبر جابه‌جایی و $\|.\|$ یک نرم روی A به عنوان فضای خطی باشد. در این صورت عنصر همانی آن را با e نشان می‌دهیم. ضرب روی A نسبت به نرم $\|.\|$ به طور مجزا پیوسته است هرگاه نگاشت $(x, y) \mapsto xy$ از $A \times A$ به A نسبت به هر یک از متغیرها پیوسته باشد. تواماً پیوسته است هرگاه نگاشت فوق همزمان نسبت به هر دو متغیر پیوسته باشد. نرم $\|.\|$ روی جبر جابه‌جایی A را $A-$محدب نامیم هرگاه برای هر عنصر $x \in A$، ثابتی مثبت وابسته به x مانند $M(x)$ موجود باشد به طوری که برای هر $y \in A$ داشته باشیم $\|xy\| \leq M(x)\|y\|$. نرم $\|.\|$ را $m-$محدب است هر گاه برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. نرم عملگری $\|.\|_{op}$ از $\|.\|$ روی A را برای هر $x \in A$ به صورت

$$\|x\|_{op} = \sup_{\|y\|\leq ۱} \|xy\|.$$

تعریف می‌کنیم. برای نرم $\|.\|$ روی A ضریب $m-$محدب را به صورت

$$m(\|.\|) = \sup_{\|y\|\leq ۱} \|y\|_{op}$$

و برای نرم $A-$محدب $\|.\|$ ضریب محدبی را به صورت

$$r(\|.\|) = \sup_{\|y\|_{op}\leq ۱} \|y\|.$$

تعریف می‌کنیم. نرم $A-$محدب $\|.\|$ منظم است هرگاه $\|.\|_{op} = \|.\|$، منظم ضعیف است هرگاه $r(\|.\|)$ متناهی باشد و نامنظم است هرگاه $r(\|.\|)$ نامتناهی باشد.

اگر $(A, \|.\|)$ یک جبر نرم‌دار منظم و A یک جبر دلخواه باشد، آن‌گاه نرم $\|.\|$ دارای دو توسیع به نام‌های l_1-توسیع و توسیع عملگری روی یکدارسازش؛ یعنی $A \times_1 \mathbb{C}$ است و به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\|(x, \lambda)\|_e = \|a\| + |\lambda|,$$

$$\|(x, \lambda)\|_{op} = \sup\{\|xy + \lambda y\|, \|yx + \lambda y\| : \quad y \in A, \|y\| = 1\}.$$

حاصلضرب $A \times_\theta B$ از جبرهای باناخ اولین بار توسط لائو [۱۶] در سال ۱۹۸۳ برای رده‌ای خاص از جبرهای باناخ معرفی شد و توسط ریاضیدانان متعددی مورد مطالعه قرار گرفت.

در سال ۲۰۰۶، منفرد [۱۹] این حاصلضرب را برای جبرهای باناخ دلخواه معرفی و بررسی نمود.

گائور و کواریک [۹] در سال ۱۹۹۳، نرم‌های l_1-توسیع $\|(.,.)\|_e$ و توسیع عملگری $\|(.,.)\|_{op}$ حاصل از توسیع نرم منظم $\|.\|$ از A را به روی $A \times_1 \mathbb{C}$ به دست آوردند و رابطه‌ی $\|(.,.)\|_e \leq 6\exp(1)\|(.,.)\|_{op}$ را برای آن‌ها ثابت کردند.

مقدار ثابت $6\exp(1)$ در رابطه‌ی فوق توسط پالمر [۲۳] در سال ۱۹۹۴ به $2\exp(1) + 1$ و نهایتاً توسط آرهیپانن و مولر [۴] در سال ۲۰۰۷ به کمترین و بهترین مقدار ممکن، یعنی ۳ بهبود یافت.

هدف این پایان نامه که شامل پنج فصل است، معرفی و مطالعه‌ی آنالیز روی جبر باناخ $A \times_\theta B$ و در حالت خاص روی یکدارساز A، یعنی $A \times_1 \mathbb{C}$، و همچنین مطالعه‌ی نرم‌های $A-$محدب روی جبرهای جابه‌جایی و نهایتاً توسیع آن‌ها به روی یکدارساز A است.

فصل اول، به مقدمه اختصاص یافته است که در آن، به بیان مختصری از تعاریف و قضایایی در آنالیز تابعی، آنالیز حقیقی و نظریه‌ی جبرهای باناخ می‌پردازد که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، جبر باناخ $A \times_\theta B$ را معرفی و بررسی می‌کنیم. در ادامه به مطالعه‌ی برخی خواص این جبر و ارتباط آن‌ها با موارد مشابه روی A و B می‌پردازیم و نتایجی را در این زمینه بیان و اثبات می‌کنیم.

در فصل سوم، ارتباط مفاهیم نیم‌ساده، منظم و تاوبری را برای جبر $A \times_\theta B$ بررسی می‌کنیم و بعد از مطالعه‌ی مجموعه‌های طیفی و غیرطیفی برای آن در حالت‌های خاص، به بیان یک نتیجه از قضیه‌ی تاوبری مجرد روی آن می‌پردازیم.

در فصل چهارم، برای یک نرم $\|.\|$ روی جبر جابه‌جایی A، مفاهیم $A-$محدب، $m-$محدب و نیم نرم عملگری $\|.\|_{op}$ را بیان می‌کنیم و مقادیر ثابت $m(\|.\|)$ به نام ضریب $m-$محدبی و $r(\|.\|)$ به نام ضریب منظمی را از مقایسه‌ی $\|.\|$ و $\|.\|_{op}$ به دست می‌آوریم. در ادامه قضیه‌ی معروف گلفاند را بیان می‌کنیم.

نهایتاً به کمک ضریب منظمی مفاهیم منظم، منظم ضعیف و نامنظمی را خواهیم آورد.

در فصل پنجم، برای نرم منظم و کامل $\|.\|$ روی جبر غیریکدار A، دو توسیع به نام‌های l_1–توسیع و توسیع عملگری را روی یکدارساز A که حالت خاصی از جبر $A \times_\theta B$ است، بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که l_1–توسیع بزرگترین نرم و توسیع عملگری کوچک‌ترین نرم در میان تمام توسیع‌های نرم $\|.\|$ به روی یکدارساز A هستند. در ادامه ارتباط بین این دو نرم را مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با هم معادلند.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل، به طور مختصر تعاریف و قضایایی از آنالیز تابعی، آنالیز حقیقی و نظریه‌ی جبرهای باناخ را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می‌کنیم.

فرض کنیم که $\mathfrak{A}$ یک مجموعه و رابطه‌ای مانند $\succeq$ روی $\mathfrak{A}$ وجود داشته باشد به طوری که $(\mathfrak{A}, \succeq)$،

(الف) متعدی باشد؛ یعنی برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{A}$ با شرط $\alpha \succeq \beta$ و $\beta \succeq \gamma$ داشته باشیم $\alpha \succeq \gamma$.

(ب) ارشمیدسی باشد؛ یعنی برای هر $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$، عنصر $\gamma \in \mathfrak{A}$ موجود باشد که $\gamma \succeq \alpha$ و $\gamma \succeq \beta$.

در این صورت $\mathfrak{A}$ را یک مجموعه‌ی جهتدار می‌نامیم.

منظور از یک تور در یک مجموعه‌ی X، تابعی است مانند $f : \mathfrak{A} \longrightarrow X$ که در آن $\mathfrak{A}$ یک مجموعه‌ی جهتدار است. در این جا معمولاً تور $f : \mathfrak{A} \longrightarrow X$ را با فرض $x_\alpha = f(\alpha)$ برای هر $\alpha \in \mathfrak{A}$، با نماد $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ یا به طور ساده با (x_α) نشان می‌دهیم.

فرض کنیم که $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{A}$ مجموعه‌های جهتدار باشند. در این صورت تور $(y_\beta)_{\beta\in\mathfrak{B}}$ را یک زیرتور $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ نامیم اگر تابع $g : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$ وجود داشته باشد به طوری که

(۱) $y_\beta = x_{g(\beta)}$ برای هر $\beta \in \mathfrak{B}$.

(۲) برای هر $\alpha \in \mathfrak{A}$، عنصر $\beta \in \mathfrak{A}$ موجود باشد به طوری که برای هر $\gamma \in \mathfrak{B}$ که $\gamma \geq \beta$ داشته باشیم $g(\gamma) \geq \alpha$.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم تور $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ در X به $x_\circ$ همگراست اگر برای هر همسایگی U از $x_\circ$ در X عنصر $\alpha_\circ\in\mathfrak{A}$ وجود داشته باشد به طوری که $x_\alpha\in U$ برای هر $\alpha\succeq\alpha_\circ$ و می‌نویسیم $x_\alpha\longrightarrow x_\circ$ یا $\lim_\alpha x_\alpha=x_\circ$.

برای هر $A\subseteq X$، اگر بستار A در X را با $\bar{A}$ نشان دهیم، آن‌گاه

(الف) $x\in\bar{A}$ است اگر و فقط اگر تور $(x_\alpha)_\alpha$ در A وجود داشته باشد که $x_\alpha\longrightarrow x$.

(ب) A در X فشرده است اگر و فقط اگر هر تور در A، دارای یک زیر تور همگرا در A باشد.

به علاوه اگر Y نیز یک فضای توپولوژیک و $\theta: X\longrightarrow Y$ یک تابع باشد، آن‌گاه θ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر تور (x_α) همگرا به x در X داشته باشیم $\theta(x_\alpha)\longrightarrow\theta(x)$.

برای جزییات بیشتر به [۲۷] مراجعه کنید.

فرض کنیم E و F دو فضای نرم‌دار باشند. در این صورت $B(E,F)$ فضای نرم‌دار همه‌ی عملگرهای خطی و کران‌دار T از E به F با نرم زیر است

$$\|T\|=\sup\{\|Tx\|:\quad x\in B_E\}.$$

که در آن B_E گوی یکه‌ی بسته در E را نشان می‌دهد. در حالت $E=F$، $B(E,E)$ را با $B(E)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که $B(E,F)$ کامل است اگر و فقط اگر F کامل باشد. همچنین در حالت $F=\mathbb{C}$، $B(E,F)$ را با E^* و مقدار $f\in E^*$ در $x\in E$ را با $f(x)$ یا $\langle f,x\rangle$ نشان می‌دهیم. در این حالت E^* را دوگان E می‌نامیم که با نرم زیر یک فضای باناخ است

$$\|f\|=\sup\{\|f(x)\|:\quad x\in B_E\}.$$

دوگان E^* را با E^{**} نمایش می‌دهیم و آن را دوگان دوم E می‌نامیم. با نماد $\iota: E\longrightarrow E^{**}$، نگاشت طبیعی با ضابطه‌ی

$$\iota(x)(f)=f(x)\qquad(x\in E,\ f\in E^*).$$

را تعریف می‌کنیم. معمولاً $\iota(x)$ را با $\hat{x}$ یا به طور ساده با x نمایش می‌دهیم. توجه کنیم که ι خطی و طولپاست. در حالتی که ι پوشا باشد، E را انعکاسی می‌نامیم.

۱.۱ قضیه (کران‌داری یکنواخت). فرض کنیم E یک فضای باناخ و F یک فضای نرم‌دار باشند و $\Lambda\subseteq B(E,F)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

(الف) برای هر $x \in E$، مجموعه‌ی $\Lambda(x) := \{T(x): \quad T \in \Lambda\}$ در F کران‌دار است؛ به عبارت دیگر

$$\sup\{\|Tx\|: \quad T \in \Lambda\} < \infty.$$

(ب) مجموعه‌ی Λ در $B(E,F)$ کران‌دار است؛ به عبارت دیگر، $\sup\{\|T\|: \quad T \in \Lambda\} < \infty$.

اثبات. به بخش ۲—٦ از [۹] رجوع کنید. □

فرض کنیم E و F و G فضاهایی نرم‌دار باشند. در این صورت نگاشت $S : E \times F \longrightarrow G$ را دو خطی گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

(الف) برای هر عنصر $x \in F$، نگاشت $y \mapsto S(x,y)$ خطی باشد.

(ب) برای هر عنصر $y \in E$، نگاشت $x \mapsto S(x,y)$ خطی باشد.

نگاشت دو خطی $S : E \times F \longrightarrow G$ را کران‌دار گوییم هرگاه عدد حقیقی مثبت M وجود داشته باشد به طوری که

$$\|S(x,y)\| \leq M\|x\| \ \|y\| \qquad (x \in E, y \in F).$$

مجموعه همه‌ی نگاشت‌های دو خطی کران‌دار از $E \times F$ به G را با $B(E,F;G)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت $B(E,F;G)$ با نرم زیر یک فضای باناخ است

$$\|S\| = \sup\{\|S(x,y)\|: \quad \|x\| \leq ۱, \|y\| \leq ۱\} \qquad (S \in B(E,F;G)).$$

منظور از توپولوژی ضعیف روی E، کوچک‌ترین توپولوژی روی E است که تحت آن هر $f \in E^*$ پیوسته است. این توپولوژی را با $\sigma(E,E^*)$ نمایش می‌دهیم. همگرایی تور (x_α) به x در E در توپولوژی ضعیف را همگرایی ضعیف (x_α) به x می‌نامیم و با $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ یا $x = w - \lim_\alpha x_\alpha$ نمایش می‌دهیم. توجه کنیم که $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ اگر و فقط اگر $f(x_\alpha) = f(x)$، برای هر $f \in E^*$.

منظور از توپولوژی ضعیف* روی E^*، کوچک‌ترین توپولوژی روی E^* است که خانواده‌ی $\iota(E)$ را پیوسته می‌سازد. این توپولوژی را با $\sigma(E^*,E)$ نمایش می‌دهیم. همگرایی تور (f_α) به f در این توپولوژی را همگرایی ضعیف*، $(f_\alpha)_\alpha$ به f می‌نامیم و با نمادهای $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ یا $f = w^* - \lim_\alpha f_\alpha$ نمایش می‌دهیم که معادل است با این که $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$، برای هر $x \in E$.

۲.۱ قضیه (باناخ–آلااُغلو). فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت گوی یکه‌ی B_{X^*} از X^*، فشرده‌ی ضعیف * است.

اثبات. برای اثبات به [۲۵] رجوع کنید. □

منظور از جبر A، یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است به طوری که مجهز به نگاشت $A \times A \longrightarrow A$ با ضابطه‌ی $(a,b) \mapsto ab$ باشد و برای هر $a,b \in A$ و هر $t \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

(۱) $a(bc) = (ab)c$.

(۲) $(a+b)c = ac + bc$.

(۳) $a(b+c) = ab + ac$.

(۴) $(ta)b = t(ab) = a(tb)$.

$B \subseteq A$ یک زیرجبر از A است هر گاه نسبت به عمل های روی A بسته باشد؛ یعنی با عمل‌های A تشکیل جبر دهد.

زیرجبر I از A را یک ایدآل چپ (راست) نامیم اگر $AI \subseteq I$ $(IA \subseteq I)$ و ایدآل چپ(راست) I را دوری نامیم هر گاه یک $a \in A$ وجود داشته باشد به طوری که $I = Aa$ $(I = aA)$.

جبر A نرم‌دار است هر گاه یک فضای خطی نرم‌دار باشد به طوری که برای هر $a,b \in A$ داشته باشیم $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$. در این حالت $\|.\|$ را یک نرم جبری نامیم.

جبر نرم‌دار A یک جبر باناخ است هر گاه به عنوان یک فضای خطی نرم‌دار کامل باشد.

جبر A یک $*$–جبر است هر گاه مجهز به یک برگشت $*$ باشد؛ یعنی یک نگاشت $* : A \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a,b \in A$ و $t \in \mathbb{C}$،

$$(a^*)^* = a,$$

$$(a+b)^* = a^* + b^*,$$

$$(ta)^* = \bar{t}a^*,$$

$$(ab) = b^*a^*.$$

یک $*$–زیرجبر از $*$–جبر A، یک زیرجبر A است که تحت عمل برگشت A بسته باشد.

جبر نرم‌دار A یک $*$–جبر نرم‌دار است هر گاه مجهز به یک برگشت پیوسته‌ی $*$ با شرط $\|a\| = \|a^*\|$ برای هر $a \in A$ باشد.

$*$−جبر باناخ A یک C^*−جبر است، هر گاه $\|aa^*\| = \|a\|^۲$ برای هر $a \in A$.

عنصر a در $*$−جبر A را هرمیتی یا خودالحاق نامیم هرگاه $a^* = a$. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر خودالحاق A را با A_{sa} نشان می‌دهیم. به علاوه چنانچه $a^*a = aa^*$ باشد، a را نرمال می‌نامیم.

جبر نرم‌دار A را یکدار نامیم، هر گاه تحت عمل ضرب عنصر همانی داشته باشد؛ یعنی عنصری یکتا مانند e در A وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a \in A$،

$$ae = ea = a$$

جبر A را جابه‌جایی نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $ab = ba$.

تور $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ در جبر نرم‌دار A را یک همانی تقریبی چپ (راست) برای A می‌نامیم اگر برای هر عضو $a \in A$ داشته باشیم $x_\alpha a \longrightarrow a$ $(ax_\alpha \longrightarrow a)$. منظور از یک همانی تقریبی، یک همانی تقریبی چپ و راست است. چنانچه مجموعه‌ی $\{\|e_\alpha\| : \alpha \in \Omega\}$ کران‌دار باشد، $(e_\alpha)_\alpha$ را همانی تقریبی کران‌دار برای $(A, \|.\|)$ می‌نامیم. به علاوه اگر برای هر $\alpha \in \Omega$ داشته باشیم $\|e_\alpha\| \leq ۱$، آن‌گاه $(e_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ را یک همانی تقریبی کمینه برای $(A, \|.\|)$ می‌نامیم.

عنصر a را یک عنصر پوچساز جبر جابه‌جایی A می‌نامیم هر گاه برای هر $b \in A$ داشته باشیم $ab = ۰$.

عنصر$a_۰ \in A$ را یک عنصر خودتوان کمین نامیم هرگاه

(۱) $a_۰^۲ = a_۰$.

(۲) برای هر $a \in A$ عنصری مانند $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود داشته باشیم به طوری که $a_۰ a a_۰ = \lambda a_۰$.

جبر باناخ جابه‌جایی A را نیم اول می‌نامیم اگر $\{۰\}$ تنها ایدآل دوطرفه‌ی J در A باشد به طوری که برای آن داریم $J^۲ = \{۰\}$.

به سادگی می‌توان دید که جبر باناخ A نیم اول است اگر و تنها اگر ایدآل aAa فقط به ازای $a = ۰$، برابر صفر شود.

۳.۱ مثال. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.

(الف) مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته‌ی مختلط−مقدار روی X را با $C(X)$ نمایش می‌دهیم. $C(X)$ همراه با اعمال نقطه‌ای توابع یک فضای خطی است و با ضرب نقطه‌ای توابع یک جبر جابه‌جایی است. تابع ثابت ۱، عضو همانی $C(X)$ است. برای $f \in C(X)$ محمل f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X : \quad f(x) \neq ۰\}}$$

(ب) فرض کنیم $C_b(X)$ مجموعه‌ی توابع کران‌دار در $C(X)$ باشد. در این صورت $C_b(X)$ زیرجبری

از $C(X)$ است که همراه با $\|.\|_\infty$ یک جبر باناخ با عضو همانی ۱ است، که در آن

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : \quad x \in X\} \qquad (f \in C_b(X)).$$

(ج) $C_\circ(X)$ مجموعه‌ی توابع $f \in C(X)$ است که در بی‌نهایت صفر می‌شوند؛ یعنی برای هر $\varepsilon > \circ$، زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی K_ε از X وجود داشته باشد به طوری برای هر $x \in X\backslash K_\varepsilon$ داشته باشیم $|f(x)| < \epsilon$. بوضوح $C_\circ(X)$ یک زیرجبر $C(X)$ و یک ایدآل در $C_b(X)$ است که همراه با نرم $\|.\|_\infty$ یک جبر باناخ جابه‌جایی است.

(د) $C_c(X)$ مجموعه توابع $f \in C(X)$ است که دارای تکیه‌گاه (محمل) فشرده هستند. $C_c(X)$ یک زیرجبر $C(X)$ ویک ایدآل در $C_b(X)$ است و همراه با نرم $\|.\|_\infty$ یک جبر نرم‌دار جابه‌جایی است. به علاوه $C_c(X)$ در $C_\circ(X)$ با نرم $\|.\|_\infty$ چگال می‌باشد. $C_c(X)$ را گاهی اوقات با $C_{\circ\circ}(X)$ نشان می‌دهیم. توجه کنیم که

$$C_{\circ\circ}(X) \subseteq C_\circ(X) \subseteq C_b(X) \subseteq C(X).$$

اگر X فشرده باشد داریم $C_{\circ\circ}(X) = C_\circ(X) = C_b(X) = C(X)$.

هر گاه X مجهز به توپولوژی گسسته باشد، $C_{\circ\circ}(X)$، $C_\circ(X)$ و $C_b(X)$ را به ترتیب با $c_{\circ\circ}(X)$، $c_\circ(X)$ و $c_b(X)$ نمایش می‌دهیم.

۴.۱ لم (اوریسون). فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدرف باشد. به علاوه فرض کنیم V یک مجموعه‌ی باز و K یک مجموعه‌ی فشرده در X باشند که $K \subseteq V$. در این صورت تابع $f \in C_{\circ\circ}(X)$ وجود دارد به طوری که

$$f|_K \equiv ۱, \quad \operatorname{supp}(f) \subseteq V, \quad f(X) \subseteq [\circ, ۱].$$

اثبات. به لم ۲–۲۰ از [۲۵] رجوع کنید. □

فرض کنیم A و B جبرهایی باناخ باشند. در این صورت نگاشت خطی $T : A \longrightarrow B$ را ضربی نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $T(ab) = T(a)T(b)$. هسته‌ی T را که یک ایدآل در A است به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\ker(T) = \{a \in A : \quad T(a) = \circ\}.$$

به علاوه برد T؛ یعنی $T(A)=\{T(a):\ a\in A\}$ زیرجبری از B است. نگاشت T را یکدار نامیم هرگاه A و B یکدار باشند و $T(e_A)=e_B$. که در آن e_A و e_B به ترتیب عنصرهای همانی A و B را نشان می‌دهند. همریختی T را یکریختی گوییم اگر T دوسویی نیز باشد. به علاوه T را طولپا می‌نامیم هرگاه برای هر $a\in A$ داشته باشیم $\|T(a)\|=\|a\|$.

حال فرض کنیم A یک جبر نرم‌دار باشد. برای هر $a\in A$ و $f\in A^*$، عناصر af و fa در A^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle fa,b\rangle=\langle f,ab\rangle,\qquad \langle af,b\rangle=\langle f,ba\rangle.$$

زیر فضای X از A^* را پایای چپ(راست) توپولوژیک نامیم اگر برای هر $a\in A$ داشته باشیم $aX\subseteq X$ $(Xa\subseteq X)$. X را پایای توپولوژیک نامیم اگر پایای چپ توپولوژیک و پایای راست توپولوژیک باشد. بوضوح A^* پایای توپولوژیک است.

اگر X یک زیرفضای پایای چپ توپولوژیک از A^* باشد، آن‌گاه برای هر $n\in X^*$ و $f\in X$ عنصر $n\odot f\in A^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle n\odot f,a\rangle=\langle n,f.a\rangle\qquad (a\in A).$$

روی فضای دوگان دوم A، برای هر $m,n\in A^{**}$، ضرب آرنز چپ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle m\Box n,f\rangle=\langle m,n\odot f\rangle\qquad (f\in A^*).$$

A^{**} همراه با این ضرب تشکیل یک جبر باناخ می‌دهد. ضرب $\Box$ را ضرب آرنز اول نیز می‌نامیم. به طور مشابه A^{**} مجهز به ضرب آرنز دوم $\Diamond$، یک جبر باناخ است.

مرکز توپولوژیک A را با نماد $Z_t^l(A^{**})$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z_t^l(A^{**})=\{m\in A^{**}:\ \ m\Box n=m\Diamond n,\qquad \text{برای هر } n\in A^{**}\text{،}\}.$$

اگر I یک ایدآل بسته‌ی جبر نرم‌دار A باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $A/I:=\{a+I:\ \ a\in A\}$ همراه با نرم و عمل‌های زیر برای $a,b\in A$ و $\lambda\in\mathbb{C}$ یک جبر نرم‌دار است

$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I,$$

$$\lambda(a+I) = \lambda a + I,$$

$$(a+I)(b+I) = ab + I,$$

$$\|a+I\| = \inf\{\|a+b\| : \quad b \in I\}.$$

در حالتی که A جبر باناخ باشد، A/I نیز یک جبر باناخ است.

ایدآل I در A را پیمانه‌ای نامیم هرگاه A/I دارای عنصر همانی باشد؛ یعنی عنصری مانند $u \in A$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$a - ua \in I, \quad a - au \in I.$$

اگر جبر A یکدار باشد، آن‌گاه هر ایدآل در A، پیمانه‌ای است. بوضوح با توجه به تعریف ایدآل پیمانه‌ای در می‌یابیم که هر ایدآل شامل یک ایدآل پیمانه‌ای نیز یک ایدآل پیمانه‌ای است. همچنین به سادگی از لم زرن می‌توان نتیجه گرفت که هر ایدآل محض و پیمانه‌ای I در جبر باناخ A، درون یک ایدآل پیمانه‌ای بیشین مانند J قرار می‌گیرد؛ به این معنی که J یک ایدآل محض A است که درون هیچ ایدآل محض و پیمانه‌ای A، جز خودش قرار نمی‌گیرد.

۵.۱ قضیه. فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد. در این صورت هر ایدآل پیمانه‌ای بیشین از جبر A، فضای پوچ یک تابعک خطی ضربی است.

اثبات. به صفحه‌ی ۷۹ از [۵] رجوع کنید. □

فرض کنیم A یک جبر یکدار با عنصر همانی $e \in A$ باشد. در این صورت طیف عنصر $a \in A$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{S}_p(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda e - a \ \text{وارون‌پذیر نیست}\}$$

و شعاع طیفی a را با نماد $r(a)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \mathcal{S}_p(a)\}.$$

۶.۱ گزاره. هر جبر باناخ نیم‌ساده، نیم‌اول است.

اثبات. صفحه‌ی ۱۵۵ در [۵] را ببینید. □

۷.۱ لم. فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار و $a \in A$ باشد. در این صورت $\mathcal{S}_p(a)$ یک زیرمجموعه‌ی بسته از گوی به مرکز مبدأ و شعاع $\|a\|$ در صفحه‌ی اعداد مختلط است. به علاوه داریم $\mathcal{S}_p(a) \neq \emptyset$.

اثبات. به صفحه‌ی ۸ از [۲۰] رجوع کنید. □

۸.۱ قضیه. فرض کنید A یک C^*-جبر یکدار و $a \in A$ باشد. در این صورت

(۱) اگر a هرمیتی باشد، داریم $r(a) = \|a\|$ و $\mathcal{S}_p(a) \subset \mathbb{R}$.

(۲) اگر a عنصری نرمال باشد، داریم $r(a) = \|a\|$.

اثبات. به صفحات ۳۷ و ۴۰ و ۴۱ از [۲۰] رجوع کنید. □

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی دلخواه باشد. در این صورت طیف جبر A را با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهیم و آن را برابر مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی و ضربی روی A تعریف می‌کنیم. یادآوری کنیم که عناصر $\sigma(A)$ پیوسته‌اند. اگر a عضو دلخواهی در A باشد، آن‌گاه تابع $\hat{a} : \sigma(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ را برای هر $\phi \in \sigma(A)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{a}(\phi) = \phi(a).$$

۹.۱ قضیه (نمایش گلفاند). فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی و $\sigma(A)$ ناتهی باشد. در این صورت نگاشت $\phi : A \longrightarrow C_\circ(\sigma(A))$ با ضابطه‌ی $\phi(a) = \hat{a}$، همریختی و نرم ـکاهشی است.

اثبات. برای اثبات به [۲۰] رجوع شود. □

توپولوژی گلفاند را کوچک‌ترین توپولوژی روی $\sigma(A)$ در نظر می‌گیریم به طوری که همه‌ی توابع $\hat{a}$ به ازای a در A، پیوسته باشند. توجه کنیم که توپولوژی گلفاند، توپولوژی القایی از توپولوژی ضعیف* روی A^* به $\sigma(A)$ است. توجه کنیم که برای هر $a \in A$ و هر $\varepsilon > 0$ دلخواه داده شده، مجموعه‌ی

$$K_\varepsilon = \{f \in \sigma(A) : \ |f(a)| \geq \varepsilon\}$$

به طور ضعیف * در گوی بسته‌ی یکه‌ی A^* بسته است. امّا با توجه به قضیه‌ی باناخ—آلااُغلو، B_{A^*} به طور ضعیف * فشرده است. بنابراین K_ε فشرده‌ی ضعیف* است. در نتیجه داریم $\hat{a} \in C_\circ(\sigma(A))$. نگاشت تعریف شده در قضیه‌ی فوق را نمایش گلفاند جبر باناخ A می‌نامیم.

جبر باناخ A را تاوبری نامیم هرگاه مجموعه‌ی زیر در A چگال باشد

$$A_c := \{a \in A : \quad \text{با توپولوژی گلفاند فشرده باشد } \sigma(A) \text{ در } supp(\hat{a})\}.$$

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد. رادیکال جبر A را که فضای پوچ نمایش گلفاند جبر A است با $\mathrm{rad(A)}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{rad(A)} = \{a \in A : \quad f(a) = \circ,\ f \in \sigma(A)\} = \ker(\phi).$$

که ϕ همان نگاشت تعریف شده در ۹.۱ است. جبر A را رادیکال نامیم، هرگاه $\mathrm{rad(A)} = A$ و نیم ساده نامیم هرگاه $\mathrm{rad(A)} = \{\circ\}$؛ یعنی نمایش گلفاند آن یک به یک باشد.