بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه کاشان

دانشکده‌ی فیزیک

گروه فیزیک نظری

پایان نامه

جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشته‌ی فیزیک نظری

عنوان:

اثر میدان‌های الکترومغناطیسی بر دیسک‌های مورگان – مورگان

استاد راهنما:

دکتر رضا رمضانی آرانی

به وسیله‌ی :

سعید نائیه

بهمن ماه ۱۳۹۰

دانشگاه کاشان

تاریخ :

شماره:

پیوست :

مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

نام و نام خانوادگی دانشجو : سعید نائیه　　　شماره دانشجویی : ۸۸۱۱۵۴۰۰۰۴

رشته : فیزیک گرایش نظری　　　دانشکده : **فیزیک**

عنوان پایان‌نامه :

"اثر میدان های الکترومغناطیسی بر دیسک های مورگان - مورگان"

این پایان‌نامه به مدیریت تحصیلات تکمیلی به منظور بخشی از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد ارائه می‌گردد.دفاع از پایان نامه در تاریخ ۱۳۹۰/۱۱/۱۰ مورد تأیید و ارزیابی هیأت داوران قرار گرفت و با نمره به عدد: ۱۹٫۵ به حروف: نوزده و نیم تمام و درجه عالی به تصویب رسید.

اعضاء هیأت داوران

عنوان	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱. استاد راهنما :	دکتر رضا رمضانی آرانی	استادیار	
۲. متخصص و صاحب نظر داخل دانشگاه :	دکتر مجید منعم زاده	استادیار	
۳. متخصص و صاحب نظر دوم دانشگاه :	دکترسروش زمانی مقدم	استادیار	
٤. نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه :	دکتر احمد رضا رحمتی	استادیار	

ابراهیم نعمتی لای

مدیر تحصیلات تکمیلی

تقدیم به :

کسانی که در زندگی مرا بی دریغ مورد لطف و محبت قرار داده‌اند

به خصوص پدر و مادرم

تشکر و قدردانی

با حمد و ستایش از لطف پروردگار متعال و عنایات حضرت ولیعصر (عج) لازم می دانم ازتمامی اساتید و دوستانی که مرا در عرصه‌ی فراگیری علم ، همراهی کردند ؛ و با پیشنهادات و انتقادات خود در بهبود فعالیتهایم یاری و راهنماییم نمودند قدردانی نمایم .

از آقایان:

دکتر رضا رمضانی آرانی در مقام استاد راهنما

دکتر مجید منعم زاده به عنوان استاد داور داخلی

دکتر سروش زمانی مقدم به عنوان استاد داور دوم داخلی

دکتر احمد رضا رحمتی به عنوان نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی

کمال تشکر را دارم .

و با یاد و تشکر از **ابوالفضل فرداد** دوست ، استاد و همراه همیشگی‌ام در تحصیل و زندگی .

چکیده :

جواب‌های معادلات اینشتین به عنوان جامع‌ترین نظریه‌ی گرانش نقش مهمی در شناخت ساختارهای کیهانی دارد . در میان این جواب‌ها ، ساختارهای متقارن محوری از اهمیت بیشتری برخوردارند چون در بسیاری از ساختارهای کیهانی می‌توان چنین تقارنی را یافت .

در این تحقیق ابتدا به معرفی فضازمان وایل ، یکی از زیرمجموعه‌های فضا زمان متقارن محوری پرداخته شده است . در ادامه به بررسی ساختارهای دیسک گونه و به دست آوردن تانسور انرژی– تکانه‌ی دیسک به روشی موسوم به روش توزیعی اشاره شده است . به طور خاص دیسک‌های مورگان – مورگان که دارای گسترش محدود هستند مورد بررسی قرارگرفته است . با استفاده از حدس هورسکی – میتسکویچ ، جواب مورگان – مورگان در حضور آثار الکترومغناطیسی بررسی می‌شود .

به عنوان یک بحث تکمیلی ، بر هم نهی دیسک و سیاه چاله‌ی شوارتزشیلد دردو حالت ؛ یکی دیسک باردار و یکی دیسک بدون بار مورد مطالعه قرار می گیرد و تأثیر حضور سیاهچاله بر ساختار دیسک بررسی خواهد شد .

کلمات کلیدی : فضا زمان متقارن محوری ، تانسور انرژی تکانه ، دیسک مورگان – مورگان ، آثار الکترومغناطیسی

فهرست مطالب

فهرست شکل ها

فهرست نمودارها

قراردادها:

۱- ثابت‌های بنیادی : $G = c = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$

۲- علامت متریک : $(t, \rho, \phi, z) : (-, +, +, +)$

۳- اندیس : اندیس یونانی $\mu, \nu, \rho, ...$ مربوط به هر چهار مختصه‌ی فضازمان

اندیس لاتین i, j مربوط به مختصه‌های مکانی

۴- نماد کریستوفل نوع دوم : $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho} \right)$

۵- مشتق : مشتق جزئی $U_{,\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}$

مشتق هموردا $F^{\mu\nu}{}_{;\rho} = F^{\mu\nu}{}_{,\rho} + F^{\sigma\nu} \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} + F^{\mu\sigma} \Gamma^{\nu}_{\sigma\rho}$

فصل اول : مقدمات

۱-۱- تاریخچه

حدود یک قرن از معرفی معادلات میدان اینشتین به عنوان اصلی ترین و در عین حال موفق‌ترین نظریه‌ی توصیف کننده‌ی گرانش می گذرد . مانند تمامی نظریه های فیزیکی ، هدف ریاضی- فیزیک دانان یافتن جواب هایی جدید برای این معادلات و ارائه‌ی تعبیر فیزیکی معقول برای آنهاست .

اولین جواب این معادلات که به صورت تحلیلی به دست آمد جواب شوارتزشیلد[۱] است . این جواب که مربوط به یک جسم کروی یکنواخت بدون دوران است ، در عین زیبایی از اهمیتی خاص برخوردار است و می‌تواند به عنوان مدلی برای توصیف ساختار ستارگان استفاده شود . روی کر[۲] سال‌ها بعد توانست جواب های تحلیلی مربوط به یک جسم کروی دوران کننده‌ی باردار را به دست آورد.

جواب‌ها در حوزه‌ی کیهان‌شناسی نیز جالب توجه است . در سال ۱۹۱۷ اینشتین جواب‌هایی در توصیف ساختار عالم ارائه نمود . در همان سال دوسیته[۳] جواب هایی را برای ساختار دیگری به دست آورد و نشان داد که جواب های اینشتین درست نیست . [۱] در خلال سال‌های ۱۹۲۲ تا ۱۹۲۴ فریدمان[۴] توانست جواب هایی در این حوزه به دست آورد که

[۱] Schowarzchild
[۲] Roy Kerr
[۳] de Sitter
[۴] Friedmann

مدل‌های دو دانشمند فوق را در مدلی واحد می‌گنجاند . با اینکه این جواب‌ها تا سالها مورد توجه قرار نگرفتند ،اما پس از مشاهدات هابل به اهمیت آن پی برده شد و تا به امروز از آنها استفاده می‌شود .

در طول سالیان متمادی تلاش ها برای یافتن جواب های جدید ادامه داشته است و دانشمندان توانسته‌اند جواب‌های زیادی را ارائه نموده و توصیف کنند . مرجع [۲] به طور خاص به معرفی بسیاری از این جواب‌ها پرداخته است .

۱–۲– اهداف

در ادامه پیش از هر چیز به بررسی فضا زمان‌های مختلف می‌پردازیم و به طبقه‌بندی‌های آن اشاره می‌کنیم . به طور خاص فضا زمان‌های متقارن محوری را معرفی کرده و فضا زمان وایل را به عنوان زیر مجموعه‌ای از آن بررسی می‌کنیم . همچنین معادلات اینشتین و چند نمونه از جواب‌هایی را که افراد مختلف از لحاظ فیزیکی و در دستگاه‌های مختلف بررسی کرده‌اند ، فهرست وار بیان می‌کنیم .

در فصل دوم به بررسی فیزیکی دیسک‌های ایستای گرانشی می‌پردازیم . تانسور انرژی-تکانه‌ی دیسک را به روشی موسوم به روش توزیعی به دست آورده و شرایط انرژی حاکم بر ساختار دیسک را نظر می‌گذرانیم . این شرایط قیدهای فیزیکی را بر ساختار تحمیل می‌کنند . در ادامه دیسک مورگان - مورگان را به عنوان مثال خاص بررسی می‌کنیم . یکی از روش‌های مولد در اعمال کردن اثر الکترومغناطیسی ، حدس هورسکی – میتسکویچ می‌باشد . پس از معرفی این حدس ، اِعمال کردن آن بر جواب مورگان – مورگان را بررسی کرده و شرایط فیزیکی حاکم بر دیسک را در حالت جدید مطالعه می‌کنیم .

در فصل سوم به عنوان یک بحث تکمیلی ، برهم نهی دیسک و سیاهچاله‌ی شوارتزشیلد بررسی می‌شود . خطی بودن یکی از معادلاتِ مورد بررسی ، اجازه‌ی چنین کاری را می‌دهد . بر هم نهی دیسک مورگان- مورگان با سیاه‌چاله‌ی شوارتزشیلد در حالت بدون اثر الکترومغناطیسی را از نظر گذرانده و برهم نهی در حضور اثر الکتریکی بطور خلاصه بررسی خواهیم کرد .

۱-۳- معادلات میدان اینشتین

این معادلات مجموعه‌ی ۱۰ معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشد .

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{۱-۱}$$

که در آن $R_{\mu\nu}$ تانسور ریچی[۱] ، R اسکالر ریچی و $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه و در واقع نشان‌دهنده‌ی توزیع ماده و انرژی است . مهم‌ترین تانسورهای مورد بررسی عبارتند از : خلاء ، میدان الکترومغناطیسی ، تابش خالص ، گردوغبار و شاره‌ی خالص[۲] . جواب این معادله در واقع چیزی است که به عنوان فضا زمان می‌شناسیم :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{۲-۱}$$

مواردی که سبب دشواری کار می‌شود ؛ سروکار داشتن با بیش از سه بعد و غیر خطی بودن معادلات است که باعث می‌شود در حالت کلی مجموع دو یا چند جواب معادله ، جواب دیگر معادله نباشد . به عبارتی اصل برهم نهی درحالت کلی برقرار نیست .

۱-۴- دسته بندی فضا زمان ها

طبقه بندی فضا زمان‌ها را می‌توان از نقطه نظرهای مختلف بررسی نمود . از لحاظ ساختاری فضا زمان ها به ۴ شکل طبقه بندی می‌شوند [۲]:

۱- طبقه بندی جبری خمش همدیس[۳] (نوع پتروف[۴])

۲- طبقه بندی جبری تانسور ریچی (نوع پلبانسکی یا سگره[۵])

۳- طبقه بندی بر اساس توصیف فیزیکی تانسور انرژی-تکانه

۴- گروه‌های تقارنی پذیرفته شده‌ی متریک

به دلیل مرتبط نبودن با بحث ما و البته سروکار داشتن با پیچیدگی‌های خاص ریاضی ، در اینجا به این موارد نمی‌پردازیم و تنها به تعریف فضا زمان ثابت و زیر مجموعه‌های آن خواهیم پرداخت .

---

[۱] Ricci
[۲] Perfect Fluid
[۳] Conformal Curvature
[۴] Petrov Type
[۵] Plebanski or Segre Type

یک فضا زمان را ثابت[۱] می‌گوییم اگر ضرایب متریک مستقل از مختصه‌ی زمانی باشند که به آن مختصه ، زمان جهانی[۲] می‌گوییم . انتخاب این مختصه ، یکتا نیست و می‌توان هر تابع دلخواهی از مختصات فضایی را به آن اضافه کرد و یا در هر عدد ثابتی ضرب نمود . این کار تغییری در هندسه‌ی فضا زمان ایجاد نمی‌کند . منشأ ایجاد یک فضا زمان ثابت می‌تواند فقط یک سیستم تک جسمی باشد زیرا برهم کنش بین اجسام می‌تواند باعث حرکت آن‌ها و بر هم خوردن هندسه‌ی فضا زمان بر اثر گذشت زمان شود . البته نباید میدان ثابت را با میدان یکنواخت[۳] اشتباه بگیریم . برای ایجاد یک میدان یکنواخت باید یک گستره‌ی نامحدود جرمی داشته باشیم که در عمل غیر ممکن است . دو زیر مجموعه‌ی فضا زمان ثابت عبارتند از [۳]:

۱- فضا زمان ایستا[۴] : در این فضا زمان ، تغییر $t \to -t$ در فرم متریک تغییر ایجاد نمی‌کند و به اصطلاح تقارن وارونی زمان داریم . با توجه به ثابت بودن فضا زمان می‌توان گفت که عناصر غیر قطری g_{it} ($i = 1,2,3$) در متریک وجود ندارد . (دقت کنید که تغییر فرم متریک ناشی از تغییر علامت عنصر دیفرانسیلی $dx^i dt$ می‌باشد) . فرم کلی متریک در این فضا زمان به صورت زیر است :

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j \qquad i, j = 1,2,3 \qquad (۳-۱)$$

یا به فرم همدیس :

$$ds^2 = -e^{2U}dt^2 + e^{-2U}\gamma_{ij}dx^i dx^j \qquad (۴-۱)$$

که در آن U و γ_{ij} توابعی از مختصات فضایی هستند . می‌توان ثابت کرد که می‌شود این متریک را به فرم قطری نوشت .

۲- فضا زمان پایا[۵](ایستور) : در این فضا زمان تقارن وارونی زمان نداریم . به این معنی که در آن عناصر g_{it} وجود دارد . عواملی چون دوران (متریک کر) و تک‌قطبی مغناطوگرانشی (متریک نات[۶]) عوامل پایایی فضا زمان هستند . بر خلاف حالت ایستا نمی‌توان قسمت‌های فضایی و زمانی را از هم جدا کرد .

---

۱ Constant
۲ World Time
۳ Uniform
۴ Static
۵ Stationary
۶ NUT

۱-۵- فضا زمان متقارن محوری[1]

از لحاظ تقارنی ، دو ساختاری که در نسبیت عام بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرند ، ساختارهای متقارن کروی و متقارن محوری هستند . جواب‌های دقیق در ساختارهای متقارن محوری نقش مهمی در کاربردهای اخترفیزیکی نظریه ایفا می‌کنند . به طور خاص پیکربندی‌های دیسک گونه از اهمیت برخوردارند که به جای خود به آن‌ها می‌پردازیم .

عنصر کلی فضا زمان متقارن محوری را می‌توان در حالت کلی به صورت زیر نوشت :[۲]

$$ds^2 = -e^{2U}\left(dt - A\,d\phi\right)^2 + e^{-2U}\left(\gamma_{ij}dx^i dx^j + W^2 d\phi^2\right) \qquad (۱-۵)$$

که γ_{ij} ، U ، W و A توابعی از ρ و z هستند . حال اگر $\gamma_{ij} = e^{2k}\delta_{ij}$ با فضا زمان همسانگرد[2] روبرو هستیم :

$$ds^2 = -e^{2U}\left(dt - A\,d\phi\right)^2 + e^{-2U}\left(e^{2K}\left(d\rho^2 + dz^2\right) + W^2 d\phi^2\right) \qquad (۱-۶)$$

توابع U ، W ، A و K دارای شرایطی هستند . مثلاً W باید روی محور z صفر شود و در بینهایت مکانی باید $U,K \rightarrow \text{constant}$ و $W \rightarrow \rho$. به معنای دیگر باید دور از توزیع ماده و انرژی ، متریک به فرم متریک مینکوفسکی شده و اصطلاحاً مجانبی تخت[3] باشد .

اگر $W = \rho$ و $A = 0$ فضا زمان استاتیک وایل[4] را خواهیم داشت :

$$ds^2 = -e^{2U}dt^2 + e^{-2U}\left(e^{2K}\left(d\rho^2 + dz^2\right) + \rho^2 d\phi^2\right) \qquad (۱-۷)$$

برای متریک فوق ، معادلات اینشتین در خلاء به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla^2 U = 0 \qquad (۱-۸)$$

$$K_{,\rho} = \rho\left(U_{,\rho}^2 + U_{,z}^2\right) \qquad (۱-۹)$$

$$K_{,z} = 2\rho U_{,\rho} U_{,z} \qquad (۱-۱۰)$$

که دو معادله‌ی آخر را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$K\left[U\right] = \int \rho\left[\left(U_{,\rho}^2 + U_{,z}^2\right)d\rho + 2U_{,\rho}U_{,z}dz\right] \qquad (۱-۱۱)$$

معادله‌ی (۱-۸) معادله‌ی لاپلاس است . با قرار دادن جواب آن در معادله‌ی (۱-۱۱)

---

[1] Axisymmetric Space-Time
[2] Isotropic
[3] Asymptotically Flat
[4] Weyl Static Space-Time

می‌توان K را به دست آورد . جواب‌های معادله‌ی (۱-۸) در دستگاه‌های دیگر شکل‌های ساده‌تری دارند . چند نمونه از جواب این معادله را بیان می‌کنیم .

۱-۵-۱- مختصات کروی

در مختصات کروی ، جواب‌های مجانبی تخت به صورت زیر است :

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{r^{n+1}}P_n\left(\cos\theta\right) \qquad (۱-۱۲)$$

$$K=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_n a_l\,(l+1)(n+1)}{(n+l+2)r^{n+l+2}}\left(P_l P_n-P_{l+1}P_{n+1}\right) \qquad (۱-۱۳)$$

که در آن $P_l(\cos\theta)$ چند جمله‌ای لژاندر مرتبه‌ی l می‌باشد . ساده‌ترین مورد آن (به ازای $l=n=0$ و $a_0=-m$ و برای $n\geq 1$ ؛ $a_n=0$) را چازی و کارزان[۱] در ۱۹۲۴ بررسی کردند .

$$U=-\frac{m}{r} \qquad (۱-۱۴)$$

$$K=-\frac{m^2\sin^2\theta}{2r^2} \qquad (۱-۱۵)$$

که (۱-۱۴) پتانسیل یک جرم نقطه‌ای است . همان گونه که می‌بینید این جواب‌ها در مبدأ دارای تکینگی هستند که بررسی آن بحث جداگانه‌ای می‌طلبد . جواب‌های دیگر را می‌توان در مرجع [۴] یافت .

۱-۵-۲- مختصات کره‌وار(شبه کروی) کشیده[۲]

ارتباط این مختصات با مختصات استوانه‌ای به شکل زیر است :

$$\rho=\varepsilon\sqrt{\left(\sigma^2-1\right)\left(1-\tau^2\right)} \qquad \varepsilon=\text{constant}$$
$$z=\varepsilon\sigma\tau \qquad (۱-۱۶)$$

جواب کلی معادله‌ی لاپلاس (۱-۷) در این دستگاه به فرم زیر است :

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}C_n Q_n(\sigma)P_n(\tau) \qquad (۱-۱۷)$$

که در آن Q_n چند جمله‌ای لژاندر نوع دوم مرتبه‌ی n است . در مورد خاص که $l=0$ و $C_0=-1$ داریم :

---

۱ Chazy and Curzon

۲ Prolate Spheroidal Coordinates

$$U = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \qquad (۱۸-۱)$$

$$K = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma - 1}{\sigma^2 + \tau^2} \qquad (۱۹-۱)$$

اگر در (۱-۱۶) قرار دهیم $\varepsilon = m$ و روابط (۱-۱۶) را معکوس کنیم ، روابط (۱-۱۸) و (۱-۱۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$U = \frac{1}{2} \ln \frac{r_+ + r_- - 2m}{r_+ + r_- + 2m} \qquad (۲۰-۱)$$

$$K = \frac{1}{2} \ln \frac{(r_+ + r_-)^2 + 4m^2}{4r_+ r_-} \qquad (۲۱-۱)$$

که در آن $r_{\pm}^2 = \rho^2 + (z \pm m)^2$. جواب فوق حالت خاصی از جواب زیپو[۱] است : [۲] ، [۴]

$$U = \frac{\delta}{2} \ln \frac{r_+ + r_- - 2m}{r_+ + r_- + 2m} \qquad (۲۲-۱)$$

$$K = \frac{\delta}{2} \ln \frac{(r_+ + r_-)^2 + 4m^2}{4r_+ r_-} \qquad (۲۳-۱)$$

فرم خاص دیگر (۱-۱۷) را ارز[۲] و روزن[۳] بررسی کرده‌اند :

$$U = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} + C_n Q_n(\sigma) P_n(\tau) \qquad (۲۴-۱)$$

آنان جواب فوق را به صورت میدان گرانشی یک ذره دارای گشتاور $2l$ - قطبی جرمی تعبیر کردند . کوئه‌ودو[۴] جواب این دو را تعمیم داد :

$$U = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} C_n Q_n(\sigma) P_n(\tau) \qquad (۲۵-۱)$$

او توانست نشان دهد که این جواب نشان‌دهنده‌ی برهم نهی متریک شوارتزشیلد و مجموعه‌ی دلخواه گشتاور چند قطبی جرمی است . در مرجع [۴] ویژگی‌های دیگر این جواب بررسی شده است .

۱-۵-۳- مختصات بیضی‌وار پخت [۵]

---

[۱] Zipoy
[۲] Erez
[۳] Rosen
[۴] Quevedo
[۵] Oblate Ellipsoidal Coordinates

جواب‌ها در این دستگاه مورد توجه ماست . ارتباط این مختصات با مختصات استوانه‌ای به شکل زیر است (برای آشنایی بیشتر با این دستگاه و جواب‌های معادله‌ی لاپلاس در آن به پیوست مراجعه کنید):

$$\begin{aligned} &\rho = \varepsilon\sqrt{(1+\xi)^2(1-\eta)^2} \qquad \varepsilon = \text{constant} \\ &z = \varepsilon\xi\eta \end{aligned} \tag{۲۶-۱}$$

که در آن $-1 \le \eta \le +1$ و $0 \le \xi < \infty$. همان‌طور که پیداست ، این مختصات بسیار به دستگاه کره‌وار کشیده است . کافیست تبدیلات $\sigma \to i\xi$ ، $\tau \to \eta$ ، $\varepsilon \to -i\varepsilon$ را در مختصات کره‌وار کشیده اعمال کنیم . معادله‌ی لاپلاس در این دستگاه به فرم زیر است :

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= \frac{1}{\varepsilon(\xi^2+\eta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\xi^2)\frac{\partial U}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial U}{\partial\eta}\right]\right\} \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} = 0 \end{aligned} \tag{۲۷-۱}$$

مورگان و مورگان مسأله‌ی دیسک‌های گرانشی را در دستگاه فوق بررسی کردند . [۵] مختصات دیسک در این دستگاه شکل ساده‌ای دارد که در فصل دوم به آن می‌پردازیم . کلی‌ترین جواب در تقارن استوانه‌ای به صورت زیر است :

$$U = -\sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} P_{2m}(\eta) q_{2m}(\xi) \tag{۲۸-۱}$$

که در آن $q_{2m}(\xi) = i^{2m+1} Q_{2m}(i\xi)$. در فصل بعد به جواب‌های مورگان - مورگان که در حقیقت دو جمله‌ی اول سری فوق هستند ، خواهیم پرداخت .

۱-۵-۴- دستگاه مختصات استوانه‌ای

جواب‌های معادله‌ی (۱-۸) را براساس تکنیک جداسازی متغیرها می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$U(\rho,z) = R(\rho)Z(z) \tag{۲۹-۱}$$

بر این اساس کلی ترین جواب را می توان به یکی از دو صورت زیر نوشت [۴]:

$$U(\rho,z) = \left(c_1 I_0(\lambda\rho) + c_2 K_0(\lambda\rho)\right)\sin\left(\lambda z + \alpha_0\right) \tag{۳۰-۱}$$

$$U(\rho,z) = \left(c_1 J_0(\lambda\rho) + c_2 Y_0(\lambda\rho)\right)\sinh\left(\lambda z + \alpha_0\right) \tag{۳۱-۱}$$