بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۲/۵/۲۷

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

عنوان

کیلی گرافهای نرمال یال انتقالی متناهی

نگارش

محمدرضا سالاریان

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

استاد راهنما

دکتر مهدی علائیان

پاییز ۱۳۸۱

تقدیم به

روان پاک پدر بزرگوارم

که چون شقایق داغ نبودنش را بر سینه دارم.

مادر عزیز و مهربانم

که همواه بوسه بر دستانش آرزویم است.

برادران و خواهران گرامی ام

که همواره یاری گر من بوده اند.

چکیده

فـرض کنـیم G یـک گـروه غیر بدیهی باشد. دراین صورت نشان می دهیم که کیلی گراف نـرمال یـال انتقالـی $\Gamma = \Gamma(G,S)$ دارای حداقـل یـک تصـویر هومومورفیکی است که آن نیز یک کیلـی‌گـراف نرمال یال انتقالی از یک گروه خارج قسمتی مشخصأ ساده G است. بعلاوه برای یک کیلـی‌گـراف خـارج قسمتی Γ_H از گروه خارج قسمت $\frac{G}{H}$ یک شرط لازم و کافی برای وجود یک کیلـی‌گراف نرمال یال‌انتقالی Γ از G ارائه کرده‌ایم بطوریکه Γ_H تصویر هومومورفیک Γ می باشد و روش بدست آمدن این چنین گرافها را بیان کرده‌ایم.

در ادامه گرافهای دوری نرمال یال‌انتقالی را مورد بررسی قرار داده‌ایم و تمام گرافهای دوری نرمال یال‌انتقالی از گروه Z_{p^m} را بر حسب حاصلضرب ترکیبی گرافها مشخص کرده‌ایم.

تقدیر و تشکر

سپاس بیکران بر ایزد یکتا که در سراسر زندگی مرا مورد لطف و عنایت خود قرار داده و توانم داده تا در راه او قدم بردارم.

بر خود واجب می دانم از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر مهدی علائیان تشکر صمیمانه داشته باشم.ایشان در طی این دو سال استاد راهنما وناظر علمی این پایان نامه بودند.

از اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر حمید تولایی، دکتر علیرضا جمالی و خانم دکتر مستقیم که داوری این پایان نامه را پذیرفتند، بسیار متشکرم.

در این جا لازم می دانم از برادر بزرگوار خودم جناب آقای دکتر شکرالله سالاریان که همواره راهنما ومشوق من هستند تشکر و قدردانی نمایم.از برادرزاده عزیزم سبحان بسیار متشکرم.

از دوستان مقطع کارشناسی ارشدم آقایان: حمید رضا کشاورز، مهدی قمی، محمد ضارب نیا، هاشم ونکی و از سرکار خانم یوسفی کارشناس محترم تحصیلات تکمیلی دانشکده ریاضی و سرکار خانم کردبچه مسئول محترم کتابخانه دانشکده ریاضی به خاطر زحمات و مساعدتهای بی‌دریغشان بی نهایت سپاسگزارم.

در پایان از خانم‌ها خورشید داش‌خانه و شهناز داش‌خانه که با دقت نظر بسیارشان در تایپ و تنظیم این پایان نامه مرا یاری نموده اند، کمال تشکر را دارم.

محمد رضا سالاریان

آبان ۱۳۸۱

فهرست

فصل یک

برخی مفاهیم و قضایا در نظریه گروهها

در این فصل مفاهیم، تعریفها و قضایایی از نظر یه گروهها، که در فصلهای آتی استفاده می شوند را بیان می کنیم.چند قضیه را بدون برهان ذکر کرده ایم زیرا برهان این قضایا در بیشتر کتابهای مربوط به نظریه گروهها موجود است وعلاقه مندان می توانند جهت ملاحظه برهان به مراجع مورد اشاره مراجعه نمایند.

۱-۱گروههای جایگشتی

فرض کنید G یک گروه و Ω یک مجموعه ناتهی باشد. می گوئیم G روی Ω عمل می کند, هرگاه نگاشتی مانند $\alpha : G\times\Omega \to \Omega$ موجود باشد بطوریکه به إزاء هر $x \in \Omega$ وهر $g_1, g_2 \in G$

الف) $\alpha(g_1, \alpha(g_1 g_2, x)) = \alpha(g_1 g_2, x)$

ب) $\alpha(e,x) = x$ (e عضو خنثی گروه G است)

فرض کنید گروه G روی مجموعه Ω عمل کند. فرض کنید $x \in \Omega$ دلخواه باشد در این صورت مدار G شامل x عبارتست از مجموعه $\{x^g, g \in G\}$ و با نماد x^G یا orb (x) نشان می دهیم. اگر G فقط شامل یک مدار روی Ω باشد آنگاه می گوئیم G روی Ω انتقالی عمل می کند و یا با اختصار می کنیم G روی Ω انتقالی است. بطور معادل G را روی Ω انتقالی گوئیم هر گاه داشته باشیم

$$\forall x, y \in \Omega \quad \exists g \in G,\ s.t \qquad x^g = y.$$

۱-۱-۱ قضیه فرض کنید گروه G روی مجموعه Ω عمل کندو Hزیرگروهی انتقالی از Gباشد. در این صورت $G = HG_\alpha$ که در آن αمتعلق است به Ωو $G_\alpha = \{g \in G;\ \alpha^g = \alpha\}$.

برهان فرض کنید $g \in G$ و $\alpha \in \Omega$اگر $g \in G_\alpha$ که حکم ثابت است.در غیر این صورت فرض کنید $\alpha^g = \beta$.چون Hروی Ωانتقالی است لذا hی متعلق به Hموجود است که $\beta^h = \alpha$. بنابراین $\alpha^h = \alpha^{h^{-1}}$ در نتیجه $\alpha^{gh} = \alpha$یعنی $gh \in G_\alpha$ولذا $g \in HG_\alpha$. ▲

فرض کنید گروه G روی مجموعه Ω عمل کندو $X \subseteq \Omega$. در این صورت Xرا یک مجموعه -G پایا گوئیم. هرگاه به ازاء هر g متعلق به G داشته باشیم. $X^g := \{x^g, x \in X\} = X$.

۲-۱-۱ تعریف فرض کنید Gگروه متناهی و Ω یک مجموعه باشد. فرض کنید G روی Ω عمل کند.دراین صورت می گوئیم G روی Ω منظم است, هر گاه G روی Ω انتقالی باشد و برای هر x متعلق به Ωداشته باشیم $G_x = 1$.

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد.برای هر gمتعلق به Gنگاشت $R_g : G \to G$ را با ضابطه $R_g : x \to xg^{-1}$تعریف می کنیم . قرار می دهیم $R(G) := \{R_g, g \in G\}$. براحتی می توان نشان داد $R(G)$ روی G منظم است و نگاشت $R : G \to R(G)$ با ضابطه $R : g \to R_g$ یک ایزومورفیسم گروههاست.

متشابهاً برای هر gمتعلق به Gمی توانیم نگاشت $L_g : G \to G$ را با ضابطه $L_g : x \to gx$تعریف کنیم و قرار دهیم $L(G) := \{L_g, g \in G\}$.. براحتی می توان نشان داد $L(G)$ روی G منظم است و نگاشت $L : G \to L(G)$ با ضابطه $L : g \to L_g$ یک ایزومورفیسم گروههاست.

۱-۱-۳ تعریف فرض کنید Gیک گروه و Ω یک مجموعه باشد. یک نمایش جایگشتی از G روی Ω یک همومورفیسم گروهی مانند λ از G به$\mathrm{Sym}(\Omega)$ است. در اینصورت $\mathrm{Ker}(\lambda)$را هسته نمایش جایگشتی و $\lambda(G)$ را گروه جایگشتی G روی Ω می گوئیم.

۱-۱-۴ تعریف فرض کنید G یک گروه با دو نمایشی جایگشتی روی دو مجموعه Ω و Ω' باشد. یک ایزومورفیسم جایگشتی نگاشتی یک به یک و پوشا مانند ψ از Ω به Ω' است بطوریکه $\forall \alpha \in \Omega, \forall g \in G, \psi(\alpha^g) = (\psi(\alpha))^g$.

در این صورت دو نمایشی جایگشتی را بطور جایگشتی ایزومورف گوئیم. (بجای $\lambda(g)$از خود gاستفاده کرده ایم)

۱-۱-۵ لم هر گروه جایگشتی منظم G روی یک مجموعه Ω با نمایشی جایگشتی راست منظم Gبطور جایگشتی ایزو مورف است

برهان نگاشت θ را از G به Ω با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

$$\theta(x) = \alpha^x \qquad \forall x \in G \quad (\text{وثابت } \alpha \in \Omega)$$

چون G روی Ω منظم است θ یک به یک و پوشاست.و برای هر $x, g \in G$ داریم

$$\theta(x^g) = \theta(xg) = \alpha^{xg} = (\alpha^x)^g = (\theta(x))^g$$

بنابر این دو نمایشی جایگشتی ایزو مورف هستند.▲

۱-۱-۶ تعریف فرض کنید گروه G روی مجموعه Ω عمل کند. یک زیرمجموعه غیر تهی B از Ω را یک بلوک برای گروه G می گوئیم هر گاه برای هر $g \in G$ داشته باشیم $B^g \cap B = \phi$ یا $B^g = B$ به Ω و زیرمجموعه های تک عضوی از Ω بلوک بدیهی گروه G می‌گوئیم.

۱-۱-۷ تعریف اگر G روی Ω انتقالی عمل کند ($|\Omega| \geq 2$) و تنها بلوکهای Gبلوکهای بدیهی باشند، G را روی Ω اولیه ودر غیر این صورت گروه G را روی Ω غیر اولیه می گوئیم.

۱-۱-۸ قضیه فرض کنیدگروه G روی مجموعه Ω انتقالی عمل کند و B یک زیر مجموعه غیر تهی Ω باشد آنگاه ،

i) B یک بلوک برای G است اگر و فقط اگر مجموعه $\{B^g, g \in G\}$ یک افراز G پایا باشد.(یک افراز P از Ω را G پایا گوئیم اگر و فقط اگر $P^G = P$.)

ii) اگر B یک بلوک G باشد. برای هر $B^g, g \in G$ نیز یک بلوک برای G است.

iii) اگر B یک بلوک برای G باشد. G روی مجموعه $P = \{B^g, g \in G\}$ انتقالی است و G_B روی B انتقالی است. واگر Ω متناهی باشد. $|\Omega| = |P||B|$.

برهان برهان این قضیه در مرجع [24] آمده است.

۱-۲ زیرگروههای نرمال و زیر گروههای مشخصه

فرض کنید G یک گروه و Nزیرگروه G باشد، N را یک زیر گروه مشخصه Gمی گوئیم هرگاه N تحت $\mathrm{Aut}(G)$ پایا باشد. وآنرا با نماد $N \lhd^c G$ نشان می دهیم.اگر G زیر گروه مشخصه ای غیر از خودش و زیر گروه بدیهی نداشته باشد، G را مشخصاً ساده گوئیم.

۱-۲-۱ قضیه فرض کنید Gیک گروه و M,N دو زیر گروه G باشندبطوریکه $M \lhd^c N, N \lhd G$ در این صورت $\mathrm{M} \lhd \mathrm{G}$.

برهان فرض کنید $g \in G, m \in M$ نشان می دهیم $\mathrm{g^{-1}mg \in M}$.چون M زیرگروه Nاست و N در G نرمال است لذا اتومورفیسم داخلی φ_g یک اتومورفیسم N است. و در نتیجه $g^{-1}mg \in M$.
▲

۱-۲-۲ لم هر زیر گروه نرمال مینیمال گروه G یک گروه مشخصاً ساده است.

برهان فرض کنید N یک زیر گروه نرمال مینیمال گروه G باشد و $\alpha \in Aut(G)$. فرض کنید M یک زیرگروه مشخصه غیربدیهی N باشد. بنا به قضیه فوق $\mathrm{M \lhd G}$ که با نرمال مینیمال بودن گروه Nتناقض دارد.▲

۱-۲-۳ قضیه فرض کنید G یک گروه و M,N دوزیرگروه Gباشندبطوریکه $M \lhd^c N, N \lhd^c G$ در این صورت $M \lhd^c G$.

برهان فرض کنید $\alpha \in Aut(G)$ تحدید α به N یک اتو مورفیسم از N است بنابراین $\mathrm{M^{\alpha} = M}$. و در نتیجه $\mathrm{M \lhd^C G}$.▲

۱-۲-٤ قضیه فرض کنید G یک گروه متناهی باشد.در این صورت

$$GAut(G) = N_{sym(G)}(G) \ .$$

برهان قرار می دهیم $N := N_{sym(G)}(G)$. واضح است که $G.Aut(G) \leq N$. حال فرض کنید $\alpha \in N$بطوریکه α عضو 1_G را ثابت نگه دارد. چون α یک جایگشت روی G است پس یک به یک و پوشاست. نشان می دهیم α ساختار را حفظ می کند.

فر ض کنید x,y دو عضو دلخواه G باشند چون $(1_G)^{xy} = xy$ داریم. $(1_G)^{xy\alpha} = (xy)^{\alpha}$از طرفی $(1_G)^{xy\alpha} = (1_G)^{\alpha x^{\alpha} y^{\alpha}} = (1_g)^{x^{\alpha} y^{\alpha}} = x^{\alpha} y^{\alpha}$.

بنابراین α ساختار را حفظ می کند. در نتیجه $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ فرض کنید $\alpha \in N$ و $(1_G)^{\alpha} = x$ در این صورت αx^{-1} عضو 1_G را ثابت نگه دارد .پس داریم

$$\alpha x^{-1} \in Aut(G) \Rightarrow \alpha \in G.Aut(G) \ . \blacktriangle$$

فرض کنید Gو M دو گروه باشند. حاصلضرب مستقیم Gو M را با $G \times M$نشان می دهیم و بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$G \times M = \{(g,m), g \in G, m \in M\}$$

فرض کنید $g_1, g_2 \in G, m_1, m_2 \in M$.عمل زیر را در $G \times M$تعریف می کنیم

$$(\mathrm{g}_1, \mathrm{m}_1)\,(\mathrm{g}_2, \mathrm{m}_2) = (g_1 g_2, m_1 m_2)\,.$$

$G \times M$با این عمل تشکیل یک گروه می دهد.

۱-۲-۵ قضیه یک گروه مشخصاً ساده متناهی یا ساده است و یا بصورت حاصلضرب مستقیم گروههای ساده دو به دو ایزومورف است.

برهان فرض کنید G یک گروه مشخصاً ساده باشدو G_1 زیر گروه غیر بدیهی از G باشد بطوریکه $G_1 \lhd G$ و مرتبه G_1 کوچکترین مرتبه زیر گروهی از G باشد که در G نرمال است. .

فرض کنید H بزرگترین زیر گروه G باشد بطوریکه $H = G_1 \times G_2 \times .....\times G_r$ که در ان هر G_i ($1 \le i \le r$) زیرگروهی از G است و با G_1 ایزومورف است .

به ازاء هر $\alpha \in Aut(G)$ و به ازاء هر $1 \le j \le r$ و $G_j^\alpha \lhd G$, $G_j^\alpha \cong G_j$

اگر به ازاءیک $1 \le i \le r$ $G_i^\alpha \not\subset H$ داریم $G_i^\alpha \cap H \lhd G,$ و $|G_i^\alpha \cap H| < |G_1|$.با توجه به انتخاب G_1 نتیجه می-شود $G_i^\alpha \bigcap H = 1$.بنابراین $G_i \times H$ یک زیرگروه G است.واین با ماکسیمال بودن H تناقض دارد.

بنابراین $G_i^\alpha \subseteq H$.ودر نتیجه H یک زیرگروه مشخصه G است.چون G مشخصاً ساده است $H = G$.

حال نشان می دهیم G_1 ساده است.

$G = G_1 \times G_2 \times ....\times G_r$ پس هر زیر گروه نرمال G_1 در G نیز نرمال است .بنابراین چون مرتبه G_1 کوچکترین مرتبه زیر گروه نرمال G است. نتیجه می‌شود G_1 زیر گروه نرمال غیر بدیهی ندارد و بنابراین G_1 ساده است.▲

۱-۲-۶ نتیجه بنا به لم ۱-۲-۲ هر زیر گروه نرمال مینیمال از یک گروه متناهی G مشخصا ساده است.بنابراین بنا به قضیه ۱-۲-۵ هر زیر گروه نرمال از یک گروه متناهی G یا یک p گروه آبلی مقدماتی است و یا بصورت حاصلضرب مستقیم گروههای ساده غیر آبلی دو به دو ایزومورف است.

۱-۲-۷ تعریف فرض کنید G یک گروه متناهی و H یک زیرگروه G باشد. فرض کنید π زیر مجموعه اعداد اولی باشد که مرتبه G را می شمارند.در این صورت

i) یک π-عدد, عددی صحیح است بطوریکه اعداد اولی که آن را می شمارند در π واقع باشند.

ii) زیر گروه H را یک π-زیرگروه هال Gگوئیم. هر گاه $|H|$ یک π -عدد باشد و $(|H|,[G:H])=1$.

iii) زیر گروه H را یک زیرگروه هال G گوئیم, هرگاه $(|H|,[G:H])=1$.

۱-۲-۸ قضیه فرض کنید G گروه متناهی حلپذیر باشدو π مجموعه ای از اعداد اول باشد که مرتبه G را می شمارند. در این صورت

i) G حداقل یک π- زیر گروه هال دارد.

ii) هر دو π- زیر گروه هال G مزدوجند.

iii) هر π- زیر گروه از G مشمول در یک π- زیر گروه هال است.

برهان برهان این قضیه در مرجع [22] آمده است.

۱-۲-۹ قضیه گروه متناهی G حلپذیر است اگر و فقط اگر برای هر مجموعه π از اعداد اول که مرتبه آن را می شمارند, یک π- زیر گروه هال موجود باشد.