بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

گراف های r – بخشی کامل Q – انتگرال

استاد راهنما:

دکتر غلامحسن شیردل

نگارنده:

معصومه ابراهیمی

شهریور/ ۱۳۹۳

تقدیم به:

روح پاک شهدای گمنام دانشگاه قم

تقدیم به:

خانواده عزیزم، مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های زیبای زندگی‌ام مدیون حضور سبز آن‌هاست.

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او گزاردن نتوانند.

بی‌شک جایگاه معلم والاتر از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ برحسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق" : از **پدر و مادر عزیزم**، این دو معلم بزرگوارم که همواره بر کوتاهی و درشتی‌ام، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم‌داشت برایم بوده‌اند؛ از استاد شایسته‌ام، جناب آقای دکتر **غلام حسن شیردل** که در محضرشان درس اخلاق و فروتنی آموختم و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛ از اساتید فرزانه جناب آقای دکتر محمودی و جناب آقای دکتر فروغی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ و از دوست ارجمندم خانم مریم سرآبادان که صمیمانه یاری‌ام کردند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

چکیده

در این پایان‌نامه گراف‌های r - بخشی کامل Q - انتگرال و انتگرال را مورد بررسی قرار می‌دهیم. گراف ساده G را Q - انتگرال (انتگرال)گوییم اگر مقادیر مشخصه چند جمله‌ای مشخصه لاپلاسین بی‌علامت (چند جمله‌ای مشخصه)آن اعداد صحیح باشد. در ادامه با استناد به قضایای مطرح شده، تعداد نامتناهی کلاس جدید از گراف‌های Q - انتگرال (انتگرال) می‌سازیم. همچنین نشان می‌دهیم که دقیقاً **۱۷۲** گراف Q - انتگرال همبند با حداکثر ۱۰ رأس وجود دارد.در آخر روی دو گراف همبند که نه منتظم و نه دو بخشی کامل هستند، تأکید می کنیم که هم‌زمان انتگرال، L - انتگرال و Q - انتگرال می‌باشند.

واژه‌های کلیدی:

گراف r - بخشی کامل، ماتریس لاپلاسین بی‌علامت، طیف گراف، L - انتگرال، Q - انتگرال

مقدمه

گراف ساده G با مجموعه گره‌های $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ مفروض است. ماتریس لاپلاسین بی‌علامت (ماتریس لاپلاسین) G، بصورت $Q(G) = D(G) + A(G)$ ($L(G) = D(G) - A(G)$) تعریف می‌شود که در آن $A(G)$ ماتریس مجاورت و $D(G) = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ ماتریس قطری درجه گره‌های G است. چند جمله‌ای $P_G(x) =| xI_n - A(G) |$ چند جمله‌ای مشخصه گراف G نامیده می‌شود. که در آن I_n ماتریس همانی است. همچنین چند جمله‌ای $Q_G(x) =| xI_n - Q(G) |$ چندجمله‌ای مشخصه لاپلاسین بی‌علامت G یا بطور ساده‌تر Q - چندجمله‌ای نامیده می‌شود. L - چند جمله‌ای گراف G - نیز بصورت $L_G(x) =| xI_n - L(G) |$ تعریف می شود. گراف G، Q - انتگرال نامیده می‌شود اگر همه مقادیر مشخصه‌ی چندجمله‌ای مشخصه لاپلاسین بی‌علامت $Q_G(x)$ اعداد صحیح باشند. همچنین گراف G، L-انتگرال (انتگرال)است اگر همه مقدار مشخصه‌های چندجمله‌ای مشخصه لاپلاسین $L_G(x)$(مقدار مشخصه‌های چند جمله‌ای مشخصه) اعداد صحیح باشند.

گراف‌های r - بخشی کامل بصورت $K_{p_1, p_2, \cdots, p_r}$، نمایش داده می‌شوند.

گراف r - بخشی کامل $K_{p_1, p_2, \ldots, p_r}$ یک گراف با مجموعه $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$ از n گره، $(p_1 + p_2 + \cdots + p_r = n)$ است که V_iها مجموعه‌های ناتهی جدا از هم هستند و $| V_i |= p_i$ برای $(1 \leq i \leq r)$. بطوریکه دو گره در V مجاورند اگر به V_iهای متفاوت تعلق داشته باشند.

اگر تعداد اعداد صحیح متمایز $p_1, p_2, \cdots, p_r$، s باشد، بطوریکه $(p_1 < p_2 < \cdots < p_s)$ و a_i مرتبه تکرار هر p_i، $(i = 1, 2, \cdots, s)$ باشد، آنگاه گراف r - بخشی کامل $K_{p_1, p_2, \ldots, p_r}$ را بصورت $K_{a_1 \cdot p_1, a_2 \cdot p_2, \cdots, a_s \cdot p_s}$ نمایش می‌دهیم.

مطالعه گراف‌های Q - انتگرال در سال ۱۹۷۴ آغاز شد.و در سال‌های اخیر شروع به گسترش کرد. در [۱۱] سیمیک [1] و استنیک [2] همه گراف‌های Q - انتگرال، با ماکزیمم درجه یالی ۴ و برخی گراف‌های Q - انتگرال با ماکزیمم درجه یالی ۵ را مشخص کرده‌اند. در [۹] لو [3] دو شرط لازم و کافی برای Q - انتگرال شدن گراف‌های ۴-بخشی کامل $K_{m,m,n,n}$ و $K_{m,m,m,n}$ ارائه کرده است. در [۱۰] یک خانواده نامتناهی از گراف‌های سه بخشی کامل انتگرال ساخته شده است.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است. فصل اول شامل تعاریف و مقدمات کلی می‌باشد.

در فصل دوم گراف های r - بخشی کامل Q - انتگرال را معرفی کرده و یک شرط لازم و

[1] simic
[2] stanic
[3] Lu

کافی برای Q - انتگرال شدن گراف‌های r-بخشی کامل $K_{p_1,p_2,\cdots,p_r} = K_{a_1.p_1,a_2.p_2,\cdots,a_s.p_s}$ بیان و اثبات می‌کنیم. سپس با استفاده از قضایای مطرح شده تعداد نامتناهی کلاس جدید از گراف‌های Q - انتگرال برای حالت $s = ۳$ می‌سازیم.و در انتها سؤالات پیش رو را برای حالت $s \geq ۴$، مطرح می‌کنیم.

در فصل سوم گراف‌های r - بخشی کامل انتگرال را با روندی مشابه فصل دوم مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

در فصل چهارم نشان خواهیم داد که دقیقاً **۱۷۲** گراف همبند Q - انتگرال با حداکثر ۱۰ رأس وجود دارد. سپس برخی از ویژگی‌های این گراف‌ها از قبیل هم طیف بودن یا خود مکمل بودن را بررسی می‌کنیم. و در پایان فصل دو گرافی را معرفی خواهیم کرد که نه منتظم و نه دو بخشی کامل هستند، اما هم‌زمان انتگرال، L - انتگرال و Q - انتگرال می‌باشند.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

تعریف ۱.۱. سه تایی مرتب $G = (V(G), E(G), \psi_G)$، را که در آن $V(G)$ مجموعه‌ای غیرتهی است که آنها را گره نامیده، $E(G)$ مجموعه‌ای از دوتایی‌ها از عناصر $V(G)$ بوده که آنها را یال نامیده و ψ_G تابعی است که به هر یال دو گره نسبت دهد، **گراف** G می‌نامند.

تابع ψ_G را تابع وقوع گراف G نامند. اگر $\psi_G(e) = xy$ آنگاه دو گره x و y را همجوار و گره‌های x و y را با یال e هموقوع نامند.

تعریف ۲.۱. اگر $\psi_G(e) = xx$ آنگاه یال e را **حلقه** [۱] و اگر $\psi_G(e_1) = \psi_G(e_2) = \cdots = \psi_G(e_n) = xy$ آنگاه xy را **یال** n **گانه** می‌نامیم.

گراف ساده گرافی است که فاقد حلقه و یال چندگانه باشد.

تعریف ۳.۱. گراف ساده‌ای که در آن هر دو گره با هم همجوار باشند، گراف **کامل** می نامند. گراف کامل با n گره را با k_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱. یک $x-y$ راه در گراف G، عبارت است از دنباله‌ای از گره‌ها و یالها به صورت $x = x_0 e_1 x_1 e_2 x_2 \cdots x_{i-1} e_i x_i \cdots x_{n-1} e_n x_n = y$، به طوری که برای هر $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ داشته باشیم $\psi_G(e_i) = x_{i-1}x_i$.

اگر در راه هیچ یالی تکرار نشود آن را **راه ساده** می‌نامند. اگر علاوه بر آن هیچ گره‌ای نیز تکرار نشود آن را **مسیر** می‌نامند.

تعریف ۵.۱. گراف G را **همبند** گوئیم هرگاه بین هردو گره آن مسیری موجود باشد.

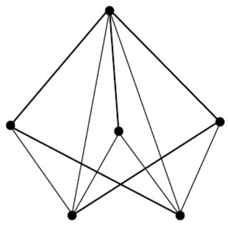
تعریف ۶.۱. فرض کنیدG=(V, E) یک گراف و v گره‌ای از G باشد **درجه** گره v در گراف G را با $deg_G(v)$ $(d(v))$نمایش داده و برابر است با تعداد یالهایی که در G با v هموقوعند. در محاسبه هر گره، هر حلقه دوبار شمرده می شود.

تعریف ۷.۱. گراف G، r – منتظم است اگر درجه هر گره آن برابر r باشد.

[۱] Loop

تعریف ۸.۱. گراف r - بخشی کامل $K_{p_1,p_2,\ldots,p_r}$ یک گراف با مجموعه $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$ از n گره، $(p_1 + p_2 + \cdots + p_r = n)$ است که V_iها مجموعه‌های ناتهی جدا از هم هستند و $\mid V_i \mid = p_i$ برای $(1 \leq i \leq r)$. بطوریکه دو گره در V مجاورند اگر به V_iهای متفاوت تعلق داشته باشند.

مثال ۹.۱. گراف $K_{1,2,3}$ ، یک گراف ۳ - بخشی کامل است.

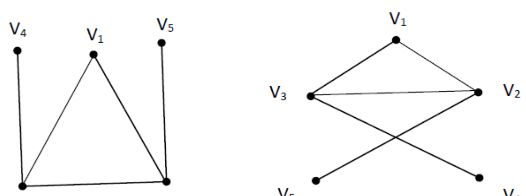


تعریف ۱۰.۱. فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه گره‌های $V(G)$ است. **مکمل** G را با $\bar{G}$ نمایش می‌دهند. $\bar{G}$ گراف ساده‌ای است که همان مجموعه گره‌های $V(G)$ را دارد. و در آن هر دو گره مجاورند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند.

تعریف ۱۱.۱. دو گراف G و H یکریخت هستند اگر و فقط اگر تابعی یک به یک و پوشا بصورت $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ بین مجموعه گره‌های دو گراف G و H وجود داشته باشد، بطوریکه $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. در این صورت می‌نویسیم: $G \cong H$.

تعریف ۱۲.۱. گراف G را خود مکمل گویند اگر G با $\bar{G}$ یکریخت باشد.

مثال ۱۳.۱. گراف ۵ گرهی زیر خود مکمل است.



تعریف ۱۴.۱. ماتریس $A(G) = [a_{ij}]_{V \times V}$ که در آن a_{ij} تعداد یال‌هایی است که v_i و v_j را به هم متصل می‌کند، ماتریس مجاورت نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱۵. ماتریس $D = [a_{ij}]_{n\times n}$ که در آن به ازای $(i \neq j)$، $(i,j = a_{ij} = \circ$ $1,2,...,n)$ ماتریس قطری نامیده می‌شود. ماتریس قطری را با $diag$ نشان می‌دهند.

ماتریس قطری که در آن درایه a_{ij}، درجه گره i ام گراف G می‌باشد را، ماتریس قطری درجه گره‌های گراف G می‌نامند. و آن را با $D(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱.۱۶. ماتریس لاپلاسین گراف ساده G بصورت زیر تعریف می‌شود

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

که در آن $D(G)$ ماتریس قطری درجه گره‌های گراف G، و $A(G)$، ماتریس مجاورت گراف G می‌باشد.

تعریف ۱.۱۷. ماتریس لاپلاسین بی‌علامت گراف ساده G، بصورت زیر تعریف می‌شود

$$Q(G) = D(G) + A(G)$$

که $D(G)$ و $A(G)$ همان‌هایی است که در تعریف ۱.۱۶ آورده شد.

تعریف ۱.۱۸. فرض کنید G یک گراف، A ماتریس مجاورت گراف G، D ماتریس قطری درجه گره‌های گراف G و I_n ماتریس همانی باشد. در اینصورت چندجمله‌ای مشخصه گراف G بصورت زیر تعریف می‌شود

$$P_G(x) = \mid xI_n - A(G) \mid$$

همچنین چندجمله‌ای مشخصه لاپلاسین یا L - چندجمله‌ای گراف G بصورت زیر تعریف می‌شود

$$L_G(x) = \mid xI_n - L(G) \mid$$

که در آن $L = D - A$.

و نیز چندجمله‌ای لاپلاسین بی‌علامت یا Q - چندجمله‌ای گراف G بصورت زیر تعریف می‌شود

$$Q_G(x) = \mid xI_n - Q(G) \mid$$

که در آن $Q = D + A$.

تعریف ۱۹.۱. ریشه‌های $P_G(x)$ را مقادیر ویژه(مقادیر مشخصه) چندجمله‌ای $P_G(x)$ مینامند. همچنین، مقادیر ویژه $L_G(x)$ و $Q_G(x)$ را به ترتیب L – مقادیر ویژه و Q – مقادیر ویژه نامند.

تعریف ۲۰.۱. گراف G، انتگرال نامیده می‌شود اگر همه مقادیر مشخصه چندجمله‌ای $P_G(x)$ اعداد صحیح باشند.

همچنین گراف G، L – انتگرال نامیده می‌شود اگر همه مقادیر مشخصه چندجمله‌ای $L_G(x)$ اعداد صحیح باشند.

و نیز گراف G، Q – انتگرال نامیده می‌شود اگر همه مقادیر مشخصه چندجمله‌ای $Q_G(x)$ اعداد صحیح باشند.

تعریف ۲۱.۱. فرض کنید $x_1 < x_2 < \cdots < x_t$ ، t مقدار مشخصه متمایز چندجمله‌ای $P_G(x)$ با مرتبه تکرار $k_1, k_2, \ldots, k_t$ باشند، در اینصورت طیف گراف G بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$spec(G) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_t \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_t \end{pmatrix}$$

حال اگر $k_1, k_2, \ldots, k_t$ ، t مقدار مشخصه متمایز چندجمله‌ای $L_G(x)$ یا $Q_G(x)$ باشند، آنگاه به ترتیب L – طیف گراف G و Q – طیف گراف G، مشابه طیف گراف G تعریف می‌شود.

تعریف ۲۲.۱. دو گراف را **هم طیف** [۲] گوییم، اگر طیف آن‌ها برابر باشد.

اگر L – طیف و Q – طیف دو گراف با هم برابر باشند، آن دو گراف به ترتیب هم‌طیف در مفهوم L – طیفی و هم‌طیف در مفهوم Q – طیفی نامیده می‌شوند.

تعریف ۲۳.۱. معادله سیاله خطی با ضرایب صحیح $ax + by = c$ را که جواب‌های صحیح آن مورد نظر باشد، یک معادله دیوفانتی [۳] یا یک معادله سیاله خطی دو مجهولی می‌نامند.

[۲] cospectral
[۳] Diophantine

قضیه ۲۴.۱. (**بولتزانو**) [۴] اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند، آنگاه

$$\exists x_\circ \in (a,b) \quad s.t \quad f(x_\circ) = \circ$$

نکته ۲۵.۱. اگر f در $[a,b]$ اکیداً صعودی و شرط فوق برقرار باشد، آنگاه فقط یک $x_\circ$ وجود دارد که به ازای آن $f(x_\circ) = \circ$.

قضیه ۲۶.۱. (**مقدار میانی**) [۵] فرض کنید f تابعی پیوسته از $[a,b] \longrightarrow R$ و λ عددی حقیقی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد. در اینصورت

$$\exists x \in (a,b) \quad s.t \quad f(x) = \lambda$$

[۴] Bolzano
[۵] Intermediate Value

فصل ۲

گراف‌های r - بخشی کامل Q - انتگرال

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا چندجمله‌ای مشخصه‌ی لاپلاسین بی‌علامت گراف‌های r - بخشی کامل را بدست می‌آوریم و با استفاده از این Q - چندجمله‌ای و بیان چند قضیه، شرط لازم و کافی برای Q - انتگرال شدن گراف‌های r - بخشی کامل در حالت $s = ۲, ۳$ ارائه می‌دهیم. در ادامه با به کار گیری نکات و قضایای مطرح شده، تعداد نامتناهی کلاس جدید از چنین گراف‌های Q - انتگرال می سازیم، که تعدادی از این گراف‌ها در غالب جدول آورده شده اند، بطوریکه به ازای هر گراف موجود در جدول نیز مجدداً می‌توان تعداد نامتناهی گراف r - بخشی کامل Q - انتگرال ساخت.

۲.۲ شرط لازم و کافی برای Q - انتگرال شدن گراف‌های r - بخشی کامل

قضیه ۱.۲. [۱۷] اگر G گراف r - بخشی کامل $K_{p_1,p_2,\dots,p_r}$ با n گره باشد، آنگاه Q - چندجمله‌ای G بصورت زیر می‌باشد.

$$Q_G(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-n+p_i)^{p_i-1}\prod_{i=1}^{r}(x-n+2p_i)\left(1-\sum_{i=1}^{r}\frac{p_i}{x-n+2p_i}\right)$$

اثبات. فرض کنید G گراف r - بخشی کامل $K_{p_1,p_2,\dots,p_r}$ با n گره باشد، از تعریف ۱.۱۸ داریم

$$Q_G(x)=\mid xI_n-Q(G)\mid$$

که $Q(G)=D(G)+A(G)$.

با توجه به r - بخشی کامل بودن $K_{p_1,p_2,\dots,p_r}$ داریم: $\sum_{i=1}^{r}p_i=n$ و درجه هر گره که به بخش i تعلق داشته باشد، برابر است با $n-p_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{r}p_j$. بنابراین ماتریس $D(G)$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$D(G)=\begin{vmatrix}(n-p_1)I_{p_1} & & & O\\ & (n-p_2)I_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & (n-p_r)I_{p_r}\end{vmatrix}$$

از طرفی $K_{p_1,p_2,\dots,p_r}$، r - بخشی کامل است. پس در هر بخش p_i، هیچ یک از گره‌ها مجاور نیستند. و هر گره بخش i، با تمام گره‌های بخش‌های دیگر مجاور است. لذا ماتریس مجاورت آن به شکل زیر می‌باشد. که در آن $J_{p_i\times p_j}$ یک ماتریس $p_i\times p_j$ است که تمام درایه‌های آن ۱ است.

$$A(G)=\begin{vmatrix}0I_{p_1} & J_{p_1\times p_2} & \dots & J_{p_1\times p_r}\\ J_{p_2\times p_1} & 0I_{p_2} & \dots & J_{p_2\times p_r}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ J_{p_r\times p_1} & J_{p_r\times p_2} & \dots & 0I_{p_r}\end{vmatrix}$$

در نتیجه $Q(G)$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$Q(G)=\begin{vmatrix} (n-p_1)I_{p_1} & J_{p_1\times p_2} & \cdots & J_{p_1\times p_r}\\ J_{p_2\times p_1} & (n-p_2)I_{p_2} & \cdots & J_{p_2\times p_r}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ J_{p_r\times p_1} & J_{p_r\times p_2} & \cdots & (n-p_r)I_{p_r} \end{vmatrix}$$

از طرفی $Q_G(x)=\mid xI_n-Q(G)\mid$. بنابراین داریم:

$$Q_G(x)=\begin{vmatrix} (x-n+p_1)I_{p_1} & -J_{p_1\times p_2} & \cdots & -J_{p_1\times p_r}\\ -J_{p_2\times p_1} & (x-n+p_2)I_{p_2} & \cdots & -J_{p_2\times p_r}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ -J_{p_r\times p_1} & -J_{p_r\times p_2} & \cdots & (x-n+p_r)I_{p_r} \end{vmatrix}$$

می‌توان $Q_G(x)$ را بصورت زیر نیز نوشت

$$Q_G(x)=\begin{vmatrix} \begin{bmatrix} x-n+p_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & x-n+p_1 \end{bmatrix}_{p_1\times p_1} & & -1\\ & \ddots & \\ -1 & & \begin{bmatrix} x-n+p_r & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & x-n+p_r \end{bmatrix}_{p_r\times p_r} \end{vmatrix}$$

حال -1 برابر سطر $\sum_{j=1}^{k} p_j$ را به سطرهای t ، $(\sum_{j=0}^{k-1} p_j+1\le t\le \sum_{j=1}^{k} p_j-1)$، $(k=1,2,\ldots,r)$ اضافه می کنیم. دترمینان زیر حاصل می‌شود.

$$Q_G(x)=\begin{vmatrix} \begin{bmatrix} x-n+p_1 & & -(x-n+p_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & & x-n+p_1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} & 0 & \\ & & \\ -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix}\\ & \ddots & \\ \begin{bmatrix} & 0 & \\ & & \\ -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} x-n+p_r & & -(x-n+p_r)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & & x-n+p_r \end{bmatrix} \end{vmatrix}$$