بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان :

روش انتگرال اول برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی مختلط

از:

مونا نژند فومنی

استاد راهنما:

دکتر نصیر تقی زاده

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به آنکس که بداند و بداند که بداند

و آنکس که نداند و بداند که نداند و بخواهد که بداند

رسیدن، به دانش است و به کردار نیک...

و بی دانش به کردار نیک هم نتوان رسید، که نیکی را پیشتر باید شناختن، آنگاه بجای آوردن. پس دانش به همه حال می‌باید تا به رستگاری توان رسیدن. و چون دانش راه آمد، به بهترین چیزها که آدمی را تواند بودن. و در اوّل آفرینش حاصل نیست و بعضی از آن بی رنج و اندیشه حاصل شود، پس هر آینه مهمتر چیزی باشد که در حاصل کردنش عمر گذرانند، لیکن برخی هست که بی اندیشه حاصل آید و بعضی را ناچار به اندیشه حاجت بود، و آنچه به اندیشه حاصل شود دانسته‌ای خواهد که در و اندیشه کنند تا این نادانسته بدان اندیشه که در آن دانسته کنند دانسته شود، و از هر دانسته هر نادانسته را نتوان شناخت، بلکه هر نادانسته را به دانسته‌ای که در خور او بود توان شناخت. و منطق آن علم است که در و راه انداختن نادانسته به دانسته دانسته شود...

پس منطق ناگزیر آمد بر جوینده ی رستگاری.[1]

[1] مقدمه‌ی رساله‌ی منطق دانشنامه‌ی علائی، شیخ‌الرئیس ابن‌سینا

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللهَ عزّ و جلّ" :

از خانواده عزیزم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر تقی زاده که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از استادان فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر یاقوتی و سرکار خانم دکتر اکبری که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند و سرکار خانم دکتر لامعی به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی کمال تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

فهرست مطالب

چکیده:

روش انتگرال اول برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی مختلط

مونا نژند فومنی

در این پایان نامه، یک روش کارآمد و موثر برای به دست آوردن جواب‌های دقیق برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی بیان شده است.
ما با استفاده از روش انتگرال اول، به حل چند معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی مختلط می‌پردازیم.
در ادامه، روش دیگری را بیان خواهیم کرد و معادله‌ای را به هر دو روش حل می کنیم.
در انتها به مقایسه جواب‌های به دست آمده از این دو روش می‌پردازیم.

کلید واژه:
روش انتگرال اول، معادله فازی هامیلتونی جدید، معادله شرودینگر، معادلات فیلد هیگز دوگانه، روش بسط $(\frac{G'}{G})$، معادله $mKdV$.

Abstract:

The first integral method to some complex nonlinear partial differential equations

Mona Najand Foomany

In this dissertation, an efficient and effective method for obtaining exact solutions of some nonlinear partial differential equations is introduced.
We will solve some complex nonlinear partial differential equations by the first integral method.
Next, we will describe another method and solve an equation with both methods.
Finally, we will compare the solutions which we obtained from two methods.

Key words:
The first integral method, New Hailtonian amplitude equation, Schrödinger equation, Coupled Higgs filed equations, $(\frac{G'}{G})$-expansion method, $mKdV$ equation.

پیشگفتار:

پدیده‌های غیرخطی در طیف گسترده‌ای از علوم نظیر فیزیک پلاسما، فیزیک حالت جامد، دینامیک سیالات و ... ظاهر می‌شوند.

برای این منظور، ریاضی‌دانان برای پیدا کردن جواب‌های دقیق آنها تلاش‌های زیادی انجام می‌دهند.

چندین روش قدرتمند و خوب برای به دست آوردن جواب‌های دقیق معادلات غیرخطی مثل روش پراکندگی وارون[۱] [۲]، روش تبدیل بکلند[۲] [۱۴،۱۷]، روش تبدیل داربوکس[۳] [۱۰،۱۳]، روش دوخطی هیروتا[۴] [۱۱،۱۲]، روش تعادل همگن[۵] [۵،۱۸]، روش بسط گویا معادله ریکاتی[۶] [۳]، روش تانژانت هایپربولیک[۷] [۷،۱۹]، روش بسط F[۸] [۱،۶،۸،۲۰] و غیره، ارائه شده است.

روش انتگرال اول برای اولین بار توسط فنگ[۹] [۹]، برای حل معادله برگر-KdV[۱۰] پیشنهاد شد که بر پایه نظریه حلقه‌ها در جبر جابجایی است.

مطالب این پایان نامه به شرح زیر می‌باشد:

در فصل اول، تعاریف و مقدمات اولیه که پیش نیاز این پایان نامه است، بیان می‌شود.

در فصل دوم، ابتدا به بیان تعاریف و قضایایی که برای شرح روش انتگرال اول نیاز است، می‌پردازیم و سپس روش انتگرال اول را بیان می کنیم و در انتها برای درک بهتر، معادله MEW را هم به روش کلاسیک و هم روش انتگرال اول حل می کنیم.

در فصل سوم، ابتدا به بیان تاریخچه معادله فازی هامیلتونی جدید، معادله شرودینگر و معادله فیلد هیگز دوگانه می‌پردازیم. سپس این معادلات را به روش انتگرال اول حل می کنیم.

در فصل چهارم، ابتدا به بیان تعاریف و قضایایی که برای شرح روش بسط $(\frac{G'}{G})$ نیاز است، می‌پردازیم و سپس روش بسط $(\frac{G'}{G})$ را بیان می کنیم و در انتها برای درک بهتر، معادله برگر را هم به روش کلاسیک و هم روش بسط $(\frac{G'}{G})$ حل می کنیم.

در فصل پنجم، ابتدا به بیان تاریخچه معادله $mKdV$ می‌پردازیم سپس این معادله را به روش‌های کلاسیک،

---

[۱] The inverse scattering method [۲] The Backlund transformation method [۳] The Darboux transformation method [۴] The Hirota billinear method [۵] The homogeneous balance method [۶] The Riccati equation rational expansion method [۷] The tanh method [۸] The F-expansion method [۹] Feng [۱۰] Burger-KdV equation

انتگرال اول و بسط $\left(\frac{G'}{G}\right)$ حل می‌نماییم.

و در انتها به مقایسه دو روش انتگرال اول و روش بسط $\left(\frac{G'}{G}\right)$ می‌پردازیم.

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱ - ۱ مقدمه

در این فصل به تعاریف و مقدمات اولیه که در این پایان نامه از آنها استفاده می‌شود، می‌پردازیم.

۱ - ۲ نکات مقدماتی

معادله دیفرانسیل:

هر معادله‌ای برحسب یک متغیر وابسته و یک یا چند متغیر مستقل و مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیر یا متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل[۱] می‌نامیم.

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی:

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی[۲] در هندسه و فیزیک هنگامی پدید می‌آیند که تعداد متغیرهای مستقل مسئله مورد بحث ۲ یا بیشتر از ۲ باشد. در چنین حالتی، هر متغیر وابسته، احتمالا تابع بیش از یک متغیر است، لذا نسبت به یک متغیر تنها مشتق عادی ندارد بلکه مشتقات جزئی نسبت به چند متغیر دارد. مثلا در بررسی تأثیرات حرارتی در یک جسم صلب، ممکن است دمای u از نقطه‌ای به نقطه دیگر و همچنین از لحظه‌ای به لحظه دیگر تغییر کند، در نتیجه مشتقات

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}$$

در حالت کلی صفر نباشند. بعلاوه، ممکن است در مسئله بخصوصی چنین پیش آید که مشتقات جزئی مراتب بالاتر، مثل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}, \cdots$$

دارای معنی فیزیکی باشد.

هنگامی که قوانین فیزیک را برای مسائلی از این نوع به کار می‌بریم، بعضی اوقات رابطه‌ای مانند

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, \cdots) = 0$$

بین مشتقات به دست می‌آوریم. چنین رابطه‌ای، که مشتقات جزئی را به هم ربط می‌دهد، به یک معادله دیفرانسیل

[۱] Differential Equation

[۲] Partial Differential Equation (PDE)

با مشتقات جزئی مرسوم است.

- اگر F برحسب u و مشتقات آن به صورت خطی در معادله ظاهر شود، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را خطی گویند.
- اگر F برحسب u و مشتقات آن به صورت غیرخطی در معادله ظاهر شود، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را غیرخطی گویند.

معادلات دیفرانسیل انتگرال پذیر و انتگرال ناپذیر:

فرض می‌کنیم معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی مفروض است، با استفاده از تغییر متغیر $u = u(\xi)$ که $\xi = k(x - vt)$، به یک معادله دیفرانسیل معمولی[۱] تبدیل می‌شود. اگر از معادله ODE مورد نظر بتوان انتگرال گرفت آن را معادله دیفرانسیل انتگرال پذیر می‌نامیم، در غیر این صورت معادله دیفرانسیل را انتگرال ناپذیر می‌نامیم.

روش متغیرهای جدا از هم[۲]:

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $Lu = 0$ که در آن

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i D_{x_i} + c$$

در نظر می گیریم، که در آن

$$u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$$

و با اختیار

$$u = X_1(x_1)\ X_2(x_2)\ ...\ X_n(x_n) \qquad (۱-۲-۱)$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D_{x_i} u &= D_{x_i} \prod_{k=1}^{n} X_k(x_k) \\ &= \frac{dX_i(x_i)}{dx_i} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} X_k(x_k) \end{aligned}$$

[۱] Ordinary Differential Equation (ODE)

[۲] Separation method

$$\begin{aligned}
D_{x_i}D_{x_j}u &= D_{x_i}D_{x_j}\prod_{k=1}^{n}X_k(x_k)\\
&= D_{x_i}\Big(\frac{dX_j(x_j)}{dx_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}X_k(x_k)\Big)\\
&= \frac{dX_i(x_i)}{dx_i}\,\frac{dX_j(x_j)}{dx_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}X_k(x_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Lu &= \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}D_{x_i}D_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iD_{x_i}+c\Big)\prod_{k=1}^{n}X_k(x_k)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}D_{x_i}D_{x_j}\Big(\prod_{k=1}^{n}X_k(x_k)\Big)+\sum_{i=1}^{n}b_iD_{x_i}\Big(\prod_{k=1}^{n}X_k(x_k)\Big)+c\Big(\prod_{k=1}^{n}X_k(x_k)\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_i'(x_i)X_j'(x_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j\\i\neq j}}^{n}X_k(x_k)+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}X_i''(x_i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}X_k(x_k)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}b_iX_i'(x_i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}X_k(x_k)+c\prod_{k=1}^{n}X_k(x_k)\\
&= 0 \qquad (۱-۲-۲)
\end{aligned}$$

اگر با انجام یک سری اعمال جبری مجاز و مناسب، تساوی (۱-۲-۲) به صورت زیر

$$F_1(X_1''(x_1),X_1'(x_1),X_1(x_1))=...=F_n(X_n''(x_n),X_n'(x_n),X_n(x_n)) \qquad (۱-۲-۳)$$

شود. با توجه به این که متغیرهای $x_1,x_2,...,x_n$ مستقل از هم می‌باشند، شرط برقراری تساوی (۱-۲-۳) آن است که داشته باشیم

$$F_1(X_1''(x_1),X_1'(x_1),X_1(x_1))=...=F_n(X_n''(x_n),X_n'(x_n),X_n(x_n))=\lambda\in\mathbb{R} \qquad (۱-۲-۴)$$

با حل معادلات دیفرانسیل معمولی (۱-۲-۴) $X_k(x_k)$ها، $k=1,2,...,n$، به دست خواهند آمد که با جایگذاری آنها در رابطه‌ی (۱-۲-۱) جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی اولیه به دست خواهد آمد.

$$\begin{cases}
X_k(x_k)=c_{1k}X_{k1}(x_k)+c_{2k}X_{k2}(x_k)\\
k=1,2,...,n
\end{cases}$$

در این صورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} u &= X_1(x_1)\ X_2(x_2)\ ...\ X_n(x_n) \\ &= \prod_{k=1}^{n} X_k(x_k) \\ &= \prod_{k=1}^{n} [c_{1k}X_{k1}(x_k) + c_{2k}X_{k2}(x_k)]. \end{aligned}$$

موج:

هر سیگنال قابل تشخیص که از مکانی به مکان دیگر با سرعت تکثیر قابل شناختی حرکت کند، موج نامیده می‌شود.

امواج سیار:

امواجی که به صورت $u(x,t) = f(x - vt)$ نمایش داده می‌شوند، امواج سیار نامیده می‌شوند.
چنین تابعی، آشفتگی‌ای را نشان می‌دهد که با سرعت v حرکت می کند.

جواب موج سیار:

جواب موج سیار یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، جوابی است که به صورت $u(x,t) = f(x - vt)$ نوشته می‌شود.

تئوری جواب‌های موج سیار[۱] یکی از زمینه‌های رو به گسترش در ریاضیات مدرن است که نوع خاصی از جواب‌ها هستند و از دید فیزیکی فرآیند انتقال را توصیف می کنند.

سولیتون:

در ریاضیات و فیزیک، سولیتون[۲] یک موج منزوی خودتقویت کننده (یک بسته موج یا پالس) است که وقتی با سرعت ثابت حرکت می کند شکلش را حفظ می کند.

پدیده سولیتونی اولین بار توسط جان اسکات راسل[۳] توصیف شد. او یک موج سولیتونی را در کانال مشترک در اسکاتلند مشاهده کرد. او این پدیده را در یک مخزن موج بازسازی کرد و آن را موج انتقال نامید.

به عبارت دیگر، سولیتون به دسته خاصی از جواب‌های موضعی یک معادله غیرخطی موج گفته می‌شود که با

---

[۱] The Theory of travelling wave solution

[۲] Soliton

[۳] John Scott Russell

شکل، ارتفاع و سرعت ثابت به پیشروی و انتشار در محیط ادامه می‌دهند.

البته توافق عام بر سر تعریف سولیتون وجود ندارد و در منابع مختلف سولیتون را به صورت‌های متفاوت تعریف می‌کنند.

درازین[1] و جانسون[2] سه خاصیت به سولیتون‌ها نسبت دادند، به موجی که سه خاصیت زیر را داشته باشد سولیتون گفته می‌شود

۱- شکل آن تغییر نکند.

۲- در منطقه‌ای از فضا محدود باشد.

۳- بعد از برخورد با سولیتون‌های دیگر شکل خود را مگر با یک انتقال فاز حفظ کند.

تعریف‌های رسمی بیشتری وجود دارد، اما آن تعریف‌ها نیازمند ریاضیات محکمی هستند. با این حال، بعضی دانشمندان اصطلاح سولیتون را برای پدیده‌هایی که دقیقا این سه خاصیت را ندارند استفاده می‌کنند (برای مثال، گلوله نور در اپتیک غیرخطی علی‌رغم اینه حین بر هم کنش انرژی از دست می‌دهد، سولیتون نامیده می‌شود).

[1] Drazin

[2] Johnson

فصل ۲

روش انتگرال اول

۲-۱ مقدمه

در این فصل، ابتدا یک سری نکات مقدماتی را بیان می‌کنیم و سپس به بیان روش انتگرال اول می‌پردازیم. همچنین برای درک بهتر این روش، معادله MEW[۱] را به این روش حل می کنیم.

۲-۲ نکات مقدماتی

دستگاه‌های خودگردان و غیر خودگردان:

اگر $x_k = x_k(t)$، $k = 1, 2, ..., n$، در این صورت دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

که در آن f_kها، $k = 1, 2, ..., n$، توابع مستقل از t می باشند، یک دستگاه خودگردان یا غیروابسته نامیده می‌شود.

از طرف دیگر در دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

که در آن F_kها، $k = 1, 2, ..., n$، توابع وابسته به t هستند، یک دستگاه غیر خودگردان یا وابسته نامیده می‌شوند.

برای تبدیل یک دستگاه غیر خودگردان به یک دستگاه خودگردان تغییر متغیر

$$t = \tau \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\tau}{dt} = 1$$

را در نظر می گیریم. از آنجا می‌توان نوشت

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = F_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = F_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

[۱] Modified Equal Width Wave Equation

در این صورت داریم

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = F_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{d\tau} = F_n(t, x_1, ..., x_n) \\ \frac{dt}{d\tau} = 1 = F_{n+1}(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

که دستگاه حاصل، یک دستگاه خودگردان می‌شود.

انتگرال اول:

انتگرال اول[1]، یک تابع غیرثابت و بطور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر است که مشتق آن بر جواب‌های آن معادله عینا صفر است.

برای یک معادله عددی

$$y' = f(x, y) \qquad (۱-۲-۱)$$

یک انتگرال اول، یک تابع $F(x,y)$ است که $F(x,y) = c$ جواب عمومی معادله (۲-۲-۱) است. همچنین c یک ثابت اختیاری است.

پس، $F(x,y)$ در معادله خطی زیر که شامل مشتقات جزئی مرتبه اول است، صدق می کند

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} f(x,y) = 0.$$

نکته۱:

لازم نیست که در همه نقاط تعریف شده در دامنه (۲-۲-۱)، انتگرال اول موجود باشد اما همیشه در یک همسایگی کوچک نقاطی که در آن تابع $f(x,y)$ بطور پیوسته انتگرال پذیر است، انتگرال اول موجود است.

نکته۲:

انتگرال اول منحصربفرد نیست. برای مثال، برای معادله $y' = -\frac{x}{y}$ انتگرال اول فقط $x^2 + y^2$ نیست بلکه برای مثال، $e^{x^2+y^2}$ نیز یک انتگرال اول است.

با دانستن چگونگی پیداکردن انتگرال اول برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، می‌توان انتگرال اول را برای

[1] First Integral