بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شیخ بهایی

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی

یک فرمول مشتق‌گیری عددی کسری جدید برای تقریب مشتق کسری کپوتو و کاربردهای آن

پژوهشگر

سمیرا ادیمی

استاد راهنما

دکتر رضا مختاری

بهمن ۱۳۹۳

چکیده

در این پایان‌نامه قصد داریم فرمول مشتق‌گیری عددی کسری جدیدی معروف به $L1-2$ را بررسی کنیم. این فرمول جدید برای بدست آوردن تقریبی از مشتق کسری کپوتو از مرتبه‌ی α $(0<\alpha<1)$ توسعه داده می‌شود که به طور رسمی به عنوان یک اصلاح فرمول قدیمی $L1$ شناخته می‌شود زیرا برای ساخت فرمول جدید $L1-2$ از تقریب درون‌یابی درجه‌ی دوم در هر بازه‌ی $[t_{j-1},t_j]$ برای $j\geqslant 2$ و فقط برای بازه‌ی $[t_0,t_1]$ از درون‌یابی خطی استفاده می‌شود در صورتی‌که برای ساخت فرمول قدیمی $L1$ از تقریب درون‌یابی خطی برای هر بازه‌ی کوچک $[t_{j-1},t_j]$ برای $j\geqslant 1$ استفاده شده است.

این فرمول جدید هم از نظر کارایی محاسباتی و هم از نظر دقت عددی از فرمول $L1$ برتر است. به وسیله‌ی این فرمول جدید دو طرح تفاضلات متناهی با مرتبه‌ی بالا در زمان برای حل معادلات کسری زمانی زیر–انتشار در دامنه‌های مکانی متناهی و نامتناهی ارائه می‌شود. علاوه بر این استفاده از فرمول جدید در حل معادلات دیفرانسیل معمولی کسری نیز بررسی می‌شود.

مقایسه نتایج متناظر بدست آمده از روش تفاضلات متناهی که به وسیله‌ی فرمول $L1$ ساخته شده است نشان می‌دهد که فرمول $L1-2$ در حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری زمانی بسیار دقیق‌تر از فرمول $L1$ است. همچنین نشان می‌دهیم که مرتبه‌ی همگرایی فرمول $L1-2$ در مشتقات کسری زمانی کپوتو از مرتبه‌ی α دربازه‌ی اول برابر $2-\alpha$ و در سایر بازه‌ها برابر $3-\alpha$ است که نسبت به فرمول $L1$ که $2-\alpha$ است، مرتبه‌ی همگرایی بهتری دارد.

واژگان کلیدی: مشتق کسری کپوتو، فرمول مشتق‌گیری کسری، فرمول $L1$، فرمول $L1-2$، زیر–انتشار.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیش‌گفتار

حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری یا حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه‌ی ناصحیح به عنوان تعمیمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه‌ی صحیح از مدت زمان بسیار طولانی مورد توجه ریاضیدانان بوده است. تاریخچه پیدایش آن را می‌توان به لایب‌نیتز نسبت داد. در سال ۱۶۹۵ هوپیتال طی نامه‌ای به لایب‌نیتز می‌نویسد که $\frac{d^n y}{dx^n}$ برای $n = \frac{1}{2}$ چگونه توجیه می‌شود؟ لایب‌نیتز در پاسخ او به رابطه بین مشتقات و سری‌های نامتناهی اشاره می‌کند و این را یک نقض آشکار از چیزی می‌داند که روزی نتایج مفیدی در بر خواهد داشت. بعد از لایب‌نیتز تعمیم حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه‌ی صحیح به ناصحیح مورد توجه ریاضیدان‌های بسیاری از جمله اویلر (۱۷۳۰)، لاگرانژ (۱۷۷۲)، لاپلاس (۱۸۱۲)، فوریه (۱۸۲۲)، لیوویل (۱۸۳۲)، ریمان (۱۸۴۷)، گرونوالد (۱۸۶۷)، لتنیکوف (۱۸۶۸)، ویل (۱۹۱۷) و کپوتو (۱۹۶۷) قرار گرفت. امروزه حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه‌ی ناصحیح تحت عنوان "حسابان کسری" شناخته شده است.

در سال‌های اخیر حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری در زمینه‌های نظری و کاربردی پیشرفت زیادی کسب کرده است که باعث برطرف کردن نقایص حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه

عدد صحیح شده است. از کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری می‌توان به بررسی جریان سیال مواد پرمنفذ، نظریه انتشار غیرعادی، انتشار موج صوتی در مواد کشدار و چسبناک، مکانیک حرکت اجسام در ساختار مشابه، پردازش سیگنال، نظریه مالی و میزان رسانایی الکتریکی در دستگاه های زیستی اشاره کرد.

مشتقات کسری چندین تعریف مختلف دارند که دو تا از مهم‌ترین آنها مشتق کسری ریمان–لیوویل و مشتق کسری کپوتو است. رابطه‌ی نزدیکی بین مشتق کسری ریمان–لیوویل و مشتق کسری کپوتو وجود دارد به این صورت که می‌توان مشتق کسری ریمان–لیوویل را تحت برخی فرضیات تابع به مشتق کسری کپوتو تبدیل کرد [۲۴، ۲۲]. درمعادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی، مشتقات زمانی کسری به طور معمول با استفاده از مشتقات کپوتو تعریف می‌شوند. این به آن دلیل است که در تعریف مشتق کسری ریمان–لیوویل به شرایط اولیه با مقادیر حدی مشتق کسری ریمان–لیوویل در مبدأ زمان نیاز است که معانی فیزیکی زیاد روشنی ندارد در حالی که شرایط اولیه در مورد مشتق کسری کپوتو همانند شرایط اولیه برای معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی صحیح است [۲۴، ۲۲، ۲۷].

بسیاری از مقالات به کاوش جواب‌های تحلیلی با استفاده از روش‌های تبدیل لاپلاس، تبدیل فوریه، تبدیل ملین، روش جداسازی متغیرها و روش‌های دیگر پرداخته‌اند[۲۴، ۲۰]، هر چند جواب‌های تحلیلی دقیق آنها تنها برای توابع خاصی شناخته شده است[۲۴، ۲۰]. بسیاری از محققان روش‌های تفاضل متناهی، روش‌های المان متناهی و روش‌های المان طیفی [۳۰، ۴، ۵، ۳، ۲۸، ۱۲، ۲۹، ۱۷، ۱۶، ۷، ۱۴، ۱۵، ۳۱، ۸] را به حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری اختصاص داده‌اند که در این میان روش تفاضل متناهی با توجه به سادگی آن در محاسبه و تجزیه و تحلیل مورد توجه است.

ادبیات [۱۵] الگوریتمی برای تقریب زدن انتگرال و مشتق کسری ارائه کرد که در آن قاعده ذوزنقه‌ای اصلاح شده استفاده شد و مشتق کسری کپوتو به وسیله مجموع وزنی مشتقات تابع تقریب زده شد. های لی چن و همکاران [۱۳] برخی از تقریب‌های عددی مرتبه‌ی بالا را بر اساس درون‌یابی مکعبی هرمیتی و درون‌یابی اسپلاین مکعبی پیشنهاد دادند و چندین الگوریتم عددی را

برای تقریب زدن مشتقات کسری کپوتو به وسیله‌ی درون‌یابی درجه دوم ایجاد کردند و همچنین تفکر مشابهی توسط کائو و ایکس یو [۲] برای تقریب زدن معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه شد. فرمول گرونوالد-لتنیکوف (GL) و فرمول $L1$ دو فرمول عمده مشتق‌گیری عددی مشتقات کسری هستند که فرمول GL به طور معمول برای مشتق کسری از مرتبه‌ی $\alpha(1 > \alpha > 0)$ فقط می‌تواند دقت مرتبه‌ی اول [۲۴، ۳۰، ۴، ۵، ۳، ۲۸] و فرمول $L1$ می‌تواند دقت بهبود یافته از مرتبه‌ی $2 - \alpha$ را دهد [۱۲، ۲۹، ۱۷، ۱۶، ۷، ۱۴، ۸]. اساس کار در این پایان‌نامه بررسی فرمول $L1 - 2$ و مقایسه آن با فرمول $L1$ می‌باشد که فرمول $L1 - 2$ به تازگی توسط گائو و همکاران ارائه شده است [۹]. بخش‌های عمده این پایان نامه به این صورت است که در فصل دوم ابتدا به طور مختصر به بررسی و ساخت فرمول $L1$ و سپس به طور مفصل به بررسی و نحوه‌ی ساخت فرمول جدید $L1 - 2$، شرح مرتبه‌ی همگرایی و خواص ضریب مربوط به این فرمول می‌پردازیم و در آخر پیاده سازی این فرمول را در محاسبه‌ی مشتق کپوتو ارائه می‌دهیم، در فصل سوم پیاده سازی فرمول در حل معادلات دیفرانسیل جزیی کسری روی دامنه‌ی مکانی کراندار و بی‌کران را بیان می‌کنیم و برای مقایسه حل معادلات را با فرمول $L1$ نیز انجام می‌دهیم و در ادامه به حل معادلات دیفرانسیل معمولی کسری به وسیله‌ی فرمول $L1 - 2$ می‌پردازیم.

۲.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲.۱. قاعده‌ی ذوزنقه‌ای برای بدست آوردن تقریبی از انتگرال تابع f به صورت زیر است

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

قضیه ۲.۲.۱. خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای به صورت زیر بدست می‌آید

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),$$

که در آن η بین a و b است، به شرط آن‌که f'' پیوسته باشد.

قضیه ۳.۲.۱. (مقدار میانگین برای انتگرال‌ها)فرض می‌کنیم تابع ω نامنفی و بر بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه برای هر $\xi \in [a,b]$ داریم

$$\int_a^b \omega(x) f(x)\, ds = f(\xi) \int_a^b \omega(x)\, dx.$$

قضیه ۴.۲.۱. (مقدارمیانی) فرض می‌کنیم تابع h بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b} h(x) \leqslant \xi \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b} h(x),$$

آن گاه ηای وجود دارد که،

$$h(\eta) = \xi, \quad a \leqslant \eta \leqslant b,$$

به عبارت دیگر، هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی بسته و کراندار، هر مقدار بین ماکسیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند.

قضیه ۵.۲.۱. (هاینه-برل)برای مجموعه‌ی E در R^k خواص زیر معادل هستند

۱- E بسته و کراندار است؛

۲- E فشرده است.

قضیه ۶.۲.۱. (مقدار ماکزیمم و مینیمم)فرض می‌کنیم f یک تابع پیوسته بر فضای فشرده X باشد و

$$M = \sup_{x\in X} f(x), \quad m = \inf_{x\in X} f(x),$$

در این‌صورت، نقاطی مانند $x_1, x_2 \in X$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$M = f(x_1), \quad m = f(x_2),$$

یعنی تابع f به ماکزیمم خود در x_1 و به مینیمم خود در x_2 می‌رسد.

قضیه ۷.۲.۱. (تیلر) فرض می‌کنیم $n \geqslant 0$ و تابع f، $n+1$ بار مشتق‌پذیر پیوسته بر بازه‌ی $[a,b]$ باشد و $x, x_0 \in [a,b]$. در این‌صورت

$$\begin{aligned} f(x) = &f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) \\ &+ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \end{aligned}$$

که ξ مقداری است بین x_0 و x.

ماتریس سه قطری A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & 0 & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & & c_{N-1} \\ & & & & b_N & a_N \end{bmatrix}$$

قضیه ۸.۲.۱. ماتریس سه قطری A معکوس‌پذیر است اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد

۱- A غالب قطری اکید باشد.

۲- A غالب قطری باشد و به ازای هر i، $c_i \neq 0$ ،$|b_N| < |a_N|$.

برای اثبات قضایای این بخش می‌توان به مراجع [۲۶، ۲۵] مراجعه کرد.

۳.۱ حسابان کسری

در این بخش به معرفی مشتق کسری کپوتو و همچنین معرفی و ارائه برخی خواص مهم توابع گاما، میتگ لفلر و مایناردی که از جمله توابعی هستند که نقش به سزایی در حسابان کسری دارند، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. تابع گاما Γ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad z \in \mathbf{c}.$$

برخی از خواص تابع گاما در قضیه بعد آورده شده است.

قضیه ۲.۳.۱. تابع گاما در روابط زیر صدق می‌کند

۱- تابع گاما به صورت زیر نیز قابل تعریف است

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (\ln(\frac{1}{t}))^{z-1}\, dt.$$

۲- مهم ترین خاصیت تابع گاما عبارت است از

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z).$$

۳- برای هر عدد طبیعی n داریم

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

۴- نمایش حدی تابع گاما به صورت زیر است

$$\Gamma(z) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}.$$

۵- تابع گاما همواره مخالف صفر است.

۶- برای عدد ناصحیح z داریم

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

۷- رابطه زیر که به رابطه لژاندر معروف است برای $z \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, \cdots$ برقرار است

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} 2^{2z-1} \Gamma(2z).$$

۸- برای هر a و b دلخواه تابع گاما در خاصیت مجانبی زیر صدق می‌کند

$$z^{b-a}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = 1 + O(z^{-1}).$$

اثبات. برای اثبات به [۲۴] مراجعه شود. □

تعریف ۳.۳.۱. تابع میتگ لفلر برای هر $\mu > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu n+1)}, \quad \forall z \in \mathbf{c},$$

همچنین تابع تعمیم یافته‌ی میتگ لفلر برای هر $\mu, \nu > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_{\mu,\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu n+\nu)}, \quad \forall z \in \mathbf{c}. \qquad (۱.۱)$$

در قضیه زیر برخی از خواص تابع میتگ لفلر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۳.۱. تابع میتگ لفلر دارای خواص زیر است

۱- برای $|z| < 1$،تابع میتگ لفلر در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\int_0^{+\infty} (e^{-t} t^{\nu-1} E_{\mu,\nu}(t^\mu z))\, dt = \frac{1}{1-z}.$$

۲- تبدیل لاپلاس تابع میتگ لفلر به صورت زیر است

$$L(E_\mu(az^\mu)) = \frac{s^{\mu-1}}{s^\mu - a}, \quad s > |a|^{\frac{1}{\mu}}.$$

۳- تابع میتگ لفلر برای هر $z \in \mathbf{c}$ همگراست.

۴- برای برخی مقادیر خاص μ تابع میتگ لفلر به صورت زیر است

$$E_0(z) = \frac{1}{1-z},$$

$$E_1(z) = e^z,$$

$$E_2(z^2) = \cosh(z),$$

$$E_2(-z^2) = \cos(z).$$

اثبات. برای اثبات به [۲۴] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۵.۳.۱. فرض می‌کنیم که $f \in C^1[0, t_k]$ برای $k \geqslant 0$. مشتق کسری کپوتو برای هر α که $0 < \alpha < 1$ است به صورت زیر تعریف می‌شود

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} f(t)|_{t=t_k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_k} \frac{f'(s)}{(t_k - s)^{\alpha}}\, ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{f'(s)}{(t_k - s)^{\alpha}}\, ds. \tag{۲.۱}$$

تعریف ۶.۳.۱. تابع ماینادری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{M}_{\beta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!\Gamma[-\beta n + (1-\beta)]}, \quad 0 < \beta < 1, \quad z \in \mathbf{c}, \tag{۳.۱}$$

که حالت خاصی از آن به صورت $\mathrm{M}_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{z^2}{4})$ است.

۴.۱ درون‌یابی لاگرانژ

قضیه ۱.۴.۱. (چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ)فرض می‌کنیم $x_0, x_1, \ldots, x_n$، $n+1$ نقطه متمایز و f تابعی با مقادیر معلوم در این نقاط باشد، آنگاه چندجمله‌ای منحصر به فردی مانند p از درجه‌ی حداکثر n وجود دارد با این خاصیت که

$$f(x_k) = p(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

این چندجمله‌ای با رابطه‌ی زیر بدست می‌آید

$$p(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x),$$

که در آن

$$L_{n,k} = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}, \qquad k=0,1,\dots,n.$$

قضیه ۲.۴.۱. (خطای چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ)فرض می‌کنیم $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایزی در بازه‌ی $[a,b]$ باشد و $f \in C^{n+1}[a,b]$ ، آنگاه به ازای هر x در بازه‌ی $[a,b]$، نقطه‌ای مانند $\xi(x)$ در بازه‌ی (a,b) وجود دارد با این خاصیت که

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

که در آن p چند جمله‌ای درونیاب در قضیه (۱.۴.۱) است.

اکنون می‌خواهیم بنابر قضایای (۱.۴.۱) و (۲.۴.۱) توابع درون‌یاب خطی و درجه دو، خطا و مشتقات آنها را ارائه دهیم که برای این کار به تعاریفی به صورت زیر نیاز داریم.

برای $k \geqslant 0$ ، تعریف می‌کنیم

$$t_k = k\Delta t, \qquad t_{k+\frac{1}{2}} = \frac{(t_{k+1}+t_k)}{2},$$

و عملگرهای خارج قسمت تفاضلی

$$\delta_t f_{k-\frac{1}{2}} = \frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{\Delta t}, \qquad \delta_t^2 f_k = \frac{1}{\Delta t}(\delta_t f_{k+\frac{1}{2}} - \delta_t f_{k-\frac{1}{2}}), \qquad k \geqslant 1,$$

را در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که Δt طول گام زمانی می‌باشد.

بنابر قضیه‌ی (۱.۴.۱) برای هر بازه‌ی کوچک $[t_{j-1}, t_j]$ که $1 \leqslant j \leqslant k$، تابع درون‌یاب خطی $\prod_{1,j} f$ از تابع f را به صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$\prod_{1,j} f(t) = f(t_{j-1})\frac{t_j - t}{\Delta t} + f(t_j)\frac{t-t_{j-1}}{\Delta t}. \tag{۴.۱}$$

از تابع درون‌یاب خطی (۴.۱) نسبت به t مشتق می‌گیریم. در این‌صورت

$$(\prod_{1,j} f(t))' = \frac{f(t_j)-f(t_{j-1})}{\Delta t},$$

بنابر تعریف عملگر $\delta_t f_{k-\frac{1}{2}} = \frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{\Delta t}$ داریم

$$(\prod_{1,j} f(t))' = \delta_t f_{j-\frac{1}{2}}. \tag{۵.۱}$$

بنابر قضیه‌ی (۲.۴.۱) خطای تابع درون‌یاب خطی به صورت زیر است

$$f(t) - \prod_{1,j} f(t) = \frac{f''(\xi_j)}{2}(t-t_{j-1})(t-t_j), \tag{۶.۱}$$

به‌طوری‌که

$$t \in [t_{j-1}, t_j], \quad \xi_j \in (t_{j-1}, t_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

بنابر قضیه‌ی (۱.۴.۱) برای $j \geqslant 2$ تابع درون‌یاب درجه دوم $\prod_{2,j} f$ از تابع f را با استفاده از سه نقطه $(t_{j-2}, f(t_{j-2})), (t_{j-1}, f(t_{j-1})), (t_j, f(t_j))$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}\prod_{2,j} f(t) &= f(t_{j-2})\frac{(t-t_{j-1})(t-t_j)}{2\Delta t^2} \\ &\quad + f(t_{j-1})\frac{(t-t_{j-2})(t_j-t)}{\Delta t^2} + f(t_j)\frac{(t-t_{j-1})(t-t_{j-2})}{2\Delta t^2} \\ &= \sum_{l=0}^{2} f(t_{j-l}) \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq l}}^{2} \frac{t-t_{j-i}}{t_{j-l}-t_{j-i}}.\end{aligned}$$

با کم و زیاد کردن تابع درون‌یاب خطی $\prod_{1,j} f(t) = f(t_{j-1})\frac{t_j-t}{\Delta t} + f(t_j)\frac{t-t_{j-1}}{\Delta t}$ به تابع درون‌یاب درجه‌ی دوم $\prod_{2,j} f$ و فاکتورگیری داریم

$$\begin{aligned}\prod_{2,j} f(t) &= f(t_{j-2})\frac{(t-t_{j-1})(t-t_j)}{2\Delta t^2} \\ &\quad + f(t_{j-1})\frac{(t-t_{j-2})(t_j-t)}{\Delta t^2} + f(t_j)\frac{(t-t_{j-1})(t-t_{j-2})}{2\Delta t^2} \\ &\quad - \left(f(t_{j-1})\frac{t_j-t}{\Delta t} + f(t_j)\frac{t-t_j}{\Delta t}\right) + \left(f(t_{j-1})\frac{t_j-t}{\Delta t} + f(t_j)\frac{t-t_j}{\Delta t}\right) \\ &= f(t_{j-2})\frac{(t-t_{j-1})(t-t_j)}{2\Delta t^2} + \prod_{1,j} f(t) \\ &\quad + f(t_{j-1})\frac{(t_j-t)}{\Delta t^2}(t-\underbrace{(t_{j-2}+\Delta t)}_{=t_{j-1}}) \\ &\quad + f(t_j)\frac{(t-t_{j-1})}{2\Delta t^2}(t-\underbrace{(t_{j-2}+2\Delta t)}_{=t_j}).\end{aligned}$$

با فاکتورگیری مجدد و بنابر تعریف عملگر $\delta_t f_{k-\frac{1}{2}}$ داریم

$$\prod_{2,j} f(t) = \prod_{1,j} f(t) + \frac{(t-t_{j-1})(t-t_j)}{2\Delta t}\left[\underbrace{\frac{f(t_j)-f(t_{j-1})}{\Delta t}}_{=\delta_t f_{j-\frac{1}{2}}} - \underbrace{\frac{f(t_{j-1})-f(t_{j-2})}{\Delta t}}_{=\delta_t f_{j-\frac{3}{2}}}\right].$$

از طرفی بنابر تعریف عملگر $\delta_t^2 f_k$ داریم $\delta_t^2 f_{j-1} = \frac{\delta_t f_{j-\frac{1}{2}} - \delta_t f_{j-\frac{3}{2}}}{\Delta t}$ در این‌صورت

$$\prod_{2,j} f(t) = \prod_{1,j} f(t) + \frac{1}{2}(\delta_t^2 f_{j-1})(t-t_{j-1})(t-t_j). \tag{۷.۱}$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۷.۱) نسبت به t داریم

$$(\prod_{2,j} f(t))' = \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} \frac{t-t_{j-\frac{3}{2}}}{\Delta t} + \delta_t f_{j-\frac{3}{2}} \frac{t_{j-\frac{1}{2}}-t}{\Delta t}.$$

عملگر $\delta_t f_{j-\frac{1}{2}}$ را به مشتق تابع درون‌یاب درجه دوم $\prod_{2,j} f$ یا $(\prod_{2,j} f)'$ اضافه و از آن کم می‌کنیم و عملیات فاکتورگیری را انجام می‌دهیم در نتیجه

$$\begin{aligned}
(\prod_{2,j} f(t))' &= \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} \frac{t-t_{j-\frac{3}{2}}}{\Delta t} + \delta_t f_{j-\frac{3}{2}} \frac{t_{j-\frac{1}{2}}-t}{\Delta t} + \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} - \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} \\
&= \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} + \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} \frac{t-(t_{j-\frac{3}{2}}+\Delta t)}{\Delta t} + \delta_t f_{j-\frac{3}{2}} \frac{t_{j-\frac{1}{2}}-t}{\Delta t} \\
&= \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} + \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} \frac{t-t_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \delta_t f_{j-\frac{3}{2}} \frac{t-t_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \\
&= \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} + \frac{\delta_t f_{j-\frac{1}{2}} - \delta_t f_{j-\frac{3}{2}}}{\Delta t}(t-t_{j-\frac{1}{2}}),
\end{aligned}$$

بنابر تعریف عملگر $\delta_t^2 f_k$، داریم

$$(\prod_{2,j} f(t))' = \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} + (\delta_t^2 f_{j-1})(t-t_{j-\frac{1}{2}}), \quad t \in [t_{j-1}, t_j]. \tag{۸.۱}$$

طبق قضیه‌ی (۲.۴.۱) خطای درون‌یابی درجه‌ی دوم به صورت زیر است

$$f(t) - \prod_{2,j} f(t) = \frac{f'''(\vartheta_j)}{6}(t-t_{j-2})(t-t_{j-1})(t-t_j), \quad t \in [t_{j-2}, t_j], \tag{۹.۱}$$

به‌طوری‌که

$$\vartheta_j \in (t_{j-2}, t_j), \quad 2 \leqslant j \leqslant k.$$

برای اثبات قضایای این بخش می‌توان به مرجع [۲۶] مراجعه کرد.

فصل ۲

تقریب‌هایی برای مشتق کپوتو

فرمول‌های $L1-2$ و $L1$ فرمول‌هایی برای بدست آوردن تقریبی از مشتق کپوتو هستند، تفاوت این دو فرمول در این است که برای ساخت فرمول $L1$ از تابع درون‌یاب خطی $\prod\limits_{1,j} f$ استفاده می‌شود در حالی‌که برای ساخت فرمول $L1-2$ تنها در بازه‌ی کوچکی از تابع درون‌یاب خطی $\prod\limits_{1,j} f$ و در سایر بازه‌ها از تابع درون‌یاب درجه دوم $\prod\limits_{2,j} f$ استفاده می‌شود که جزئیات ساخت این فرمول در این فصل به طور کامل شرح داده می‌شود و خواهیم دید که به دلیل استفاده از تابع درون‌یاب درجه‌ی دوم در ساخت فرمول $L1-2$ مرتبه‌ی همگرایی این فرمول بهتر از فرمول $L1$ خواهد شد و در نتیجه در حل معادلات دیفرانسیل زیر-انتشار به وسیله‌ی فرمول $L1-2$ نتایج بسیار دقیق‌تری نسبت به فرمول $L1$ بدست خواهد آمد که این امر طی چند مثال مختلف در فصل بعد نشان داده خواهد شد. برای ساخت فرمول $L1-2$ ابتدا فرمول $L1$ را بررسی می‌کنیم.

۱.۲ فرمول $L1$

تابع f در تعریف مشتق کپوتو را روی هر بازه‌ی $[t_{j-1}, t_j]$ برای $j \geqslant 1$ به وسیله تابع درون‌یاب خطی $\prod\limits_{1,j} f$ تقریب می‌زنیم و پس از آن رابطه (۵.۱) را جایگذاری می‌کنیم، در این‌صورت تقریبی برای مشتق کپوتو به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha f(t)|_{t=t_k} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{f'(s)}{(t_k - s)^\alpha}\, ds \\
&\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{(\prod\limits_{1,j} f(s))'}{(t_k - s)^\alpha}\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\delta_t f_{j-\frac{1}{2}}}{(t_k - s)^\alpha}\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - s)^{-\alpha}\, ds.
\end{aligned}$$

فرمول بدست آمده برای تقریب مشتق کپوتو را $L1$ می‌نامیم و قرار می‌دهیم

$$\mathsf{D}_t^\alpha f(t)|_{t=t_k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - s)^{-\alpha}\, ds. \tag{۱.۲}$$

ساخت فرم دیگری از فرمول $L1$

حاصل انتگرال موجود در فرمول $L1$ را با روش تغییرمتغیر بدست می‌آوریم، برای این منظور قرار می‌دهیم $u = (t_k - s)^{-\alpha}$ در این‌صورت

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}_t^\alpha f(t)|_{t=t_k} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - s)^{-\alpha}\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-\alpha} \left[(t_k - t_{j-1})^{1-\alpha} - (t_k - t_j)^{1-\alpha} \right] \right),
\end{aligned}$$

بنابر تعریف $t_k = k\Delta t$ برای $k \geqslant 0$، جایگذاری‌های $t_{j-1} = (j-1)\Delta t$، و $t_j = j\Delta t$ را انجام می‌دهیم و سپس با اعمال خواص تابع گاما (قسمت دوم قضیه ۲.۳.۱) داریم

$$\mathsf{D}_t^{\alpha} f(t)|_{t=t_k} = \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} \left((k-j+1)^{1-\alpha} - (k-j)^{1-\alpha}\right),$$

اکنون $\{a_j^{(\alpha)}\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a_j^{(\alpha)} = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1,$$

در این‌صورت داریم

$$a_{k-j}^{(\alpha)} = (k-j+1)^{1-\alpha} - (k-j)^{1-\alpha},$$

در نتیجه

$$\mathsf{D}_t^{\alpha} f(t)|_{t=t_k} = \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} a_{k-j}^{(\alpha)} \delta_t f_{j-\frac{1}{2}}, \tag{۲.۲}$$

از طرفی طبق تعریف عملگر $\delta_t f_{k-\frac{1}{2}}$ داریم

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}_t^{\alpha} f(t)|_{t=t_k} &= \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} a_{k-j}^{(\alpha)} \delta_t f_{j-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} a_{k-j}^{(\alpha)} (\frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{\Delta t}) \\
&= \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} a_{k-j}^{(\alpha)} (f(t_j) - f(t_{j-1})), \qquad (۳.۲)
\end{aligned}$$

با بسط دادن سیگمای موجود در (۳.۲) و انجام عملیات فاکتورگیری داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} a_{k-j}^{(\alpha)}(f(t_j)-f(t_{j-1})) = -a_{k-1}^{(\alpha)} f(t_0)&\\ &+ (a_{k-1}^{(\alpha)}-a_{k-2}^{(\alpha)})f(t_1) + (a_{k-2}^{(\alpha)}-a_{k-3}^{(\alpha)})f(t_2)\\ &+ \cdots + (a_1^{(\alpha)}-a_0^{(\alpha)})f(t_{k-1}) + \underbrace{a_0^{(\alpha)}}_{=1} f(t_k)\\ &= f(t_k) + \sum_{j=1}^{k-1}(a_{k-j}^{(\alpha)}-a_{k-j-1}^{(\alpha)})f(t_j) - a_{k-1}^{(\alpha)} f(t_0)\\ &= f(t_k) - \sum_{j=1}^{k-1}(a_{k-j-1}^{(\alpha)}-a_{k-j}^{(\alpha)})f(t_j) - a_{k-1}^{(\alpha)} f(t_0).\end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\mathsf{D}_t^{\alpha} f(t)|_{t=t_k} &= \frac{\Delta t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} a_{k-j}^{(\alpha)} \delta_t f_{j-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{k} a_{k-j}^{(\alpha)}(f(t_j)-f(t_{j-1}))\\ &= \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(t_k) - \sum_{j=1}^{k-1}(a_{k-j-1}^{(\alpha)}-a_{k-j}^{(\alpha)})f(t_j) - a_{k-1}^{(\alpha)} f(t_0)\right],\end{aligned}$$

در این‌صورت فرم دیگری از فرمول $L1$ به صورت زیر است

$$\mathsf{D}_t^{\alpha} f(t)|_{t=t_k} = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(t_k) - \sum_{j=1}^{k-1}(a_{k-j-1}^{(\alpha)}-a_{k-j}^{(\alpha)})f(t_j) - a_{k-1}^{(\alpha)} f(t_0)\right]. \quad (۴.۲)$$

لم زیر نشان می‌دهد دقت عددی فرمول $L1$، $O(\Delta t^{2-\alpha})$ است.

لم ۱.۱.۲. فرض می‌کنیم $f \in C^2[0, t_k]$. $\overline{R}(f(t_k))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\overline{R}(f(t_k)) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_k} \frac{f'(s)}{(t_k-s)^{\alpha}}\, ds - \mathsf{D}_t^{\alpha} f(t)|_{t=t_k},$$

در این‌صورت

$$|\overline{R}(f(t_k))| \leqslant \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{1-\alpha}{12} + \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - (1+2^{\alpha})\right] \max_{0\leqslant t\leqslant t_k} |f''(t)| \Delta t^{2-\alpha}.$$