به نام
خدا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکدهٔ مهندسی عمران

بررسی کمانش الاستیک و غیرالاستیک ورق‌های مستطیلی با تغییرات ضخامت به روش نوار محدود اسپلاین

پایان‌نامه کارشناسی ارشد عمران، گرایش مهندسی سازه

سید مهدی فقیه ایمانی

استاد راهنما

دکتر مجتبی ازهری

بهار ۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکدهٔ مهندسی عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد عمران، گرایش مهندسی سازه آقای سید مهدی فقیه ایمانی

تحت عنوان

بررسی کمانش الاستیک و غیرالاستیک ورق‌های مستطیلی با تغییر ضخامت در طول به روش نوار محدود اسپلاین

در تاریخ **۱ / ۳ / ۱۳۸۷** توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرارگرفت.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر مجتبی ازهری
۲- استاد مشاور	دکتر محمد مهدی سعادت‌پور
۳- استاد داور	دکتر علی‌محمد مؤمنی
۴- استاد داور	دکتر مجتبی محزون
سرپرست تحصیلات تکمیلی	دکتر عبدالرضا کبیری

تشکر و قدردانی

خدا را شاکرم که فرصتی در اختیار من قرار داد تا از پدرم و مادرم که همواره در تمامی مراحل زندگی پشتیبان و مشوق من بوده‌اند تشکر نمایم.

از اساتید گرامی، جناب آقای دکتر مجتبی ازهری و جناب آقای دکتر محمدمهدی سعادت‌پور ، که هدایت این پایان‌نامه را عهده‌دار بودند قدردانی می‌نمایم.

از جناب آقای دکترعلی‌محمد مومنی به خاطرِ داوری این پایان‌نامه تشکر می‌نمایم.

هم چنین از همه ی دوستانی که من را تا تکمیل این رساله یاری نمودند صمیمانه سپاسگزاری می نمایم.

سید مهدی فقیه ایمانی

بهار ۱۳۸۷

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایـجِ مطالعات،

ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این

پایان‌نامه متعلق به دانشـگاه صنعتی‌اصفهان است

تقدیم به
پدرم و مادرم

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست مطالب ..... هشت

چکیده ۱

فصل اول: کلیات و مطالعات انجام شده

۱-۱ مقدمه ۲

۱-۲ مفهوم کمانش ۳

۱-۲-۱ انواع کمانش ۳

۱-۲-۲ اهمیت کمانش ۶

۱-۲-۳ معادله کمانش ستون یک بعدی در حالت کلی ۷

۱-۳ تاریخچه ۹

۱-۴ اهداف ۱۲

۱-۵ کلیات پایان‌نامه ۱۵

فصل دوم: معادلات کمانش صفحات و روابط انرژی

۲-۱ مقدمه ۱۷

۲-۲ تئوری تغییرشکل جزئی صفحات نازک ۱۸

۲-۳ معادلات دیفرانسیل حاکم بر کمانش صفحات ۱۹

۲-۳-۱ روابط کرنش ـانحناء ۱۹

۲-۳-۲ روابط تنش-تغییر مکان ۲۰

۲-۳-۳ روابط لنگر- تغییر شکل ۲۱

۲-۳-۴ روابط لنگر- تغییر مکان ۲۱

۲-۳-۵ معادلات تعادل ورق ۲۲

۲-۳-۶ تعادل نیروهای واقع در صفحه ۲۳

۲-۳-۷ تعادل لنگرها و نیروهای برشی ۲۴

۲-۳-۸ معادله دیفرانسیل کمانش صفحه ۲۵

۲-۴ روش انرژی ۲۶

عنوان **صفحه**

۲-۴-۱ انرژی ارتجاعی ورق ۲۷

۲-۴-۲ انرژی پتانسیل نیروهای خارجی ۲۸

فصل سوم: روش‌های نوار محدود

۳-۱ مقدمه و تاریخچه ۳۰

۳-۲ روش نوار محدود و روش المان محدود ۳۱

۳-۳ تابع تغییر مکان یک نوار ۳۳

۳-۳-۱ ماتریس سختی الاستیک نوار ۳۵

۳-۳-۲ ماتریس هندسی نوار ۳۷

۳-۴ تحلیل پایداری صفحه با روش نوار محدود ۳۸

۳-۵ انواع نوارها و توابعشکل در روش نوارمحدود ۴۰

۳-۵-۱ نوار مستطیلی مرتبه پایین (LO_2)..... ۴۱

۳-۵-۲ نوار مرتبه بالای مستطیلی با خط گره میانی(HO_3)..... ۴۲

۳-۵-۳ نوار مرتبه بالای مستطیلی با دو خط گره (HO_2)..... ۴۲

۳-۶ روش نوار محدود معمولی..... ۴۴

۳-۷ روش نوارمحدود مختلط ۴۴

۳-۷-۱ روش دقیق ۴۵

۳-۷-۲ روش نوار محدود نیمه تحلیلی..... ۴۵

فصل چهارم: روش نوار های محدود اسپلاین

۴-۱ مقدمه ۴۷

۴-۲ تابع اسپلاین ۴۸

۴-۳ ارضای شرایط مرزی انتهای نوار ۵۱

۴-۳-۱ تکیه گاه ساده ۵۱

۴-۳-۲ تکیه گاه گیردار ۵۲

۴-۴ روش نوار محدود اسپلاین ۵۴

۴-۴-۱ ماتریس سختی نوار اسپلاین ۵۵

عنوان **صفحه**

۴-۴-۲ ماتریس هندسی نوار اسپلاین ۵۶

۴-۵ نگاهی به برنامه نوشته شده و ارزیابی آن ۵۸

٤-٥-١ تحلیل پایداری ورق مربعی SSSS به وسیله دو روش ۵۸

٤-٥-٢ تحلیل پایداری ورق SSCF برای نسبت های مختلف طول به عرض ۶۰

٤-٥-٣ کمانش برشی ورق ۶۱

٤-٥-٤ بررسی ضریب کمانش ورق برای شرایط مرزی مختلف ۶۱

فصل پنجم: مدل‌سازی تغییرات ضخامت صفحه

۵-۱ مقدمه ۶۴

۵-۲ تاریخچه ۶۵

۵-۳ روش تحلیلی ژیانگ ۶۵

۵-۴ مدل سازی تغییر ضخامت طولی با روش نوار محدود اسپلاین ۶۸

۵-۴-۱ بررسی کمانش ورق با یک پرش ضخامت و ارزیابی نتایج آن ۶۹

۵-۴-۲ بررسی کمانش ورق با دو پرش ضخامت و ارزیابی نتایج ۷۱

۵-۴-۳ بررسی کمانش ورق با تغییر ضخامت دو طرفه و ارزیابی نتایج ۷۲

فصل ششم: کمانش الاستیک صفحات با تغییرات ضخامت

۶-۱ مقدمه ۷۴

۶-۲ صفحات با یک پرش ضخامت ۷۵

۶-۲-۱ کمانش یک طرفه ورق مستطیلی SSSS با یک پرش ضخامت و بررسی محل تغییر ضخامت ۷۵

۶-۲-۲ کمانش یک طرفه ورق SSSS با یک پرش ضخامت و بررسی ابعاد ورق ۷۵

۶-۲-۳ کمانش یک طرفه ورق مربع شکل SSCC با یک پرش ضخامت و بررسی محل تغییر ضخامت ۷۶

۶-۲-۴ کمانش یک طرفه ورق مربع شکل SSSC با یک پرش ضخامت و بررسی محل تغییر ضخامت ۷۶

۶-۲-۵ کمانش یک طرفه ورق مربع شکل CCSS با یک پرش ضخامت و بررسی محل تغییر ضخامت ۷۷

۶-۲-۶ کمانش یک طرفه ورق مربع شکل CCCC با یک پرش ضخامت و بررسی محل تغییر ضخامت ۷۷

۶-۲-۷ کمانش یک طرفه ورق مربع شکل CCCS با یک پرش ضخامت و بررسی محل تغییر ضخامت ۷۸

۶-۲-۸ کمانش برشی ورق مربع شکل SSSS با یک پرش ضخامت و بررسی محل تغییر ضخامت ۷۸

عنوان **صفحه**

۶-۲-۹ کمانش یک طرفه ورق با یک پرش ضخامت در ابعاد مختلف و با شرایط مرزی دیگر ۷۹

۶-۲-۱۰ کمانش دو طرفه ورق SSSS با یک پرش ضخامت ۸۰

۶-۲-۱۱ نتیجه گیری و مشاهدات ۸۰

۶-۳ صفحات با دو پرش ضخامت ۸۱

۶-۳-۱ کمانش یک طرفه ورق مستطیلی SSCC با دو پرش ضخامت و افزایش نسبت های ضخامت ۸۱

۶-۳-۲ کمانش یک طرفه ورق مستطیلی SSCS با دو پرش ضخامت و افزایش نسبت های ضخامت ۸۱

۶-۳-۳ کمانش یک طرفه ورق مستطیلی SSCF با دو پرش ضخامت و افزایش نسبت های ضخامت ۸۲

۶-۳-۴ کمانش یک طرفه ورق مستطیلی CCCC با دو پرش ضخامت و افزایش نسبت های ضخامت ۸۲

۶-۳-۵ کمانش یک طرفه ورق مستطیلی CCCS با دو پرش ضخامت و افزایش نسبت های ضخامت ۸۳

۶-۳-۶ کمانش یک طرفه ورق مستطیلی CCCF با دو پرش ضخامت و افزایش نسبت های ضخامت ۸۳

۶-۳-۷ کمانش برشی ورق مستطیلی SSSS با دو پرش ضخامت و افزایش نسبت های ضخامت ۸۴

۶-۳-۸ نتیجه گیری و مشاهدات ۸۴

۶-۴ صفحات با پرش ضخامت دوطرفه ۸۵

۶-۴-۱ کمانش یک طرفه ورق مربعی SSSS با پرش ضخامت دو طرفه و تغییر محل پرش ۸۵

۶-۴-۲ کمانش یک طرفه ورق مربعی SSCS با پرش ضخامت دو طرفه و تغییر محل پرش ۸۵

۶-۴-۳ کمانش یک طرفه ورق مربعی SSCC با پرش ضخامت دو طرفه و تغییر محل پرش ۸۶

۶-۴-۴ کمانش یک طرفه ورق مربعی CCSS با پرش ضخامت دو طرفه و تغییر محل پرش ۸۶

۶-۴-۵ کمانش یک طرفه ورق مربعی CCCS با پرش ضخامت دو طرفه و تغییر محل پرش ۸۷

۶-۴-۶ کمانش یک طرفه ورق مربعی CCCC با پرش ضخامت دو طرفه و تغییر محل پرش ۸۷

۶-۴-۷ کمانش برشی ورق مربعی SSSS با پرش ضخامت دو طرفه و تغییر محل پرش ۸۸

۶-۴-۸ نتیجه گیری ۸۸

فصل هفتم: کمانش غیر الاستیک صفحات با تغییرات ضخامت

۷-۱ مقدمه ۸۹

۷-۲ تاریخچه ۹۰

۷-۳ تئوری کمانش غیرالاستیک ورق ۹۰

عنوان **صفحه**

۷-۳-۱- روابط تنش-کرنش ۹۱

۷-۳-۲ تئوری تغییرشکل ۹۲

۷-۳-۳ تئوری جریان ۹۲

۷-۴ روابط اساسی مواد ۹۲

۷-۴-۱ رامبرگ-اسگود ۹۲

۷-۴-۲ چیجز، فنگ و وینتر ۹۳

۷-۴-۳ پلانک ۹۴

۷-۴-۴ روابط تنش-کرنش برای فولاد نرم ۹۴

۷-۵ آنالیز نوار محدود برای کمانش غیر الاستیک ۹۵

۷-۵-۱ کمانش موضعی غیر الاستیک ورق با استفاده از منحنی تنش- کرنش رامبرگ- اسگود ۹۷

۷-۶ کمانش غیر الاستیک ورق با یک پرش ضخامت ۹۷

۷-۶-۱ استفاده از منحنی تنش- کرنش رامبرگ- اسگود ۹۸

۷-۶-۲ مشاهدات حاصل از کمانش غیرالاستیک ورق با استفاده از نمودار رامبرگ-اسگود ۹۹

۷-۶-۳ استفاده از منحنی تنش- کرنش فولاد ۹۹

۷-۶-۴ مشاهدات حاصل از کمانش غیرالاستیک ورق با استفاده از نمودارتنش کنش فولاد ۱۰۱

فصل هشتم: جمع بندی و پیشنهادات

۸-۱ مقدمه ۱۰۳

۸-۲ جمع بندی ۱۰۴

۸-۳ پیشنهادات ۱۰۵

مراجع ۱۰۶

چکیده انگلیسی (Abstract) ۱۰۹

چکیده

هدف اصلی این تحقیق بررسی کمانش موضعی صفحات مستطیلی با تغییرات ضخامت در طول است. تغییرات ضخامت به صورت پله ای و با پرش های ناگهانی در طول می‌باشد. با توجه به اینکه حل مسائل صفحات با روش‌های تحلیلی برای بعضی شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری معمولاً سخت و طولانی است، استفاده از روش‌های عددی مناسب‌تر به نظر می‌رسد. روش نوار محدود را می‌توان یکی از روش‌های عددی کارا برای تحلیل مسائل خمش و پایداری صفحات دانست. انواع مختلف این روش عبارتند از: روش نوار محدود عادی، نوار محدود مختلط و نوار محدود اسپلاین. برای تحلیل پایداری صفحات با پرشهای ضخامت در طول، با توجه به محدودیت های دو روش نوار محدود عادی و مختلط، روش نوار محدود اسپلاین انتخاب شده است. مشخصه بارز روش نوار محدود اسپلاین، وجود گره در راستای طولی نوارها می‌باشد که می‌تواند تغییرات در طول را پوشش دهد. در این روش از توابع چند جمله‌ای اسپلاین (B_3) در جهت طولی و از توابع شکل هرمیتی در جهت عرضی، برای درونیابی مقادیر گره‌ای استفاده می‌گردد. روش نوار محدود اسپلاین به خاطر داشتن یک درجه آزادی کمتر در گره‌ها و داده‌های ورودی کمتر، به روش المان محدود برتری دارد و سریع‌تر به جواب همگرا می‌شود. برای بعضی حالات بارگذاری و تکیه‌گاهی نمودارهایی از ضرایب کمانش موضعی بر حسب نسبت تغییرات ضخامت تحت بارهای داخل صفحه تنظیم شده است. کاهش ضخامت ورق در مناطقی از آن که تاثیر چشمگیری در مقدار ضریب کمانش نداشته باشد موجب سبک تر شدن سازه و اقتصادی تر شدن طرح می‌شود. از این خاصیت می‌توان در بال و بدنه هواپیما و موشکها و افزایش کارایی آنها در سرعت های بالا استفاده نمود.

فصل اول

کلیات و مطالعات انجام شده

۱-۱ مقدمه

صفحات و پوسته ها از اجزای جدانشدنی صنایع امروز محسوب می‌شوند. ورق های نازک یا همان صفحات با اشکال گوناگون در صنایع ماشین‌سازی، کشتی سازی، هواپیماسازی و غیره به کار می‌روند. با توجه به کاربرد وسیع صفحات، بررسی رفتار آنها تحت شرایط مختلف بارگذاری مورد توجه اکثر مهندسین سازه قرار گرفته تا بتوان از حداکثر ظرفیت باربری آنها استفاده کرد.

به طور کلی صفحات را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: صفحات ضخیم[۱]، صفحات نازک[۲] و غشاءها[۳]. نازک بودن صفحه یک امر نسبی است، به طوری که نمی‌توان معیاری دقیق برای نسبت ابعاد صفحه تعیین کرد. معمولا اگر نسبت بعد کوچکتر صفحات (طول و یا عرض) به ضخامت آنها بزرگتر از ۱۰ باشد می‌توان آنها را نازک فرض نمود. در صفحات نازک تغییر شکل‌های برشی از تغییر شکل‌های خمشی بسیار کوچکتر است و با توجه به دقت مورد نیاز در تحلیل می‌توان از آنها (تغییر شکل‌های برشی) صرف‌نظر نمود. غشاء نیز صفحه‌ای با ضخامت بسیار اندک است. مقاومت خمشی آن به سمت صفر میل می‌کند و بارهای جانبی کلا به‌صورت غشائی (نیروهای واقع در صفحه) تحمل می‌شوند[۱].

---

[1] Thick Plates
[2] Thin Plates
[3] Shells

۱-۲ مفهوم کمانش

هنگامی که عضو لاغر سازه ای تحت نیروی فشاری قرار می‌گیرد، برای بارهای کوچک فشاری مقاومت قابل توجهی از خود نشان می دهد و هندسه ی آن دچار تغییر شکل قابل توجه نمی‌شود. اما به محض رسیدن به بار بحرانی مشخصی، سازه دچار تغییر شکل های بزرگ شده و درآستانه از دست دادن قابلیت باربری قرار می‌گیرد، به این نیروی مشخص که آستانه تحمل است نیروی بحرانی کمانش و به این پدیده کمانش گفته می‌شود.

ساده‌ترین مثال کمانش، توپی است که بر سطحی مطابق شکل۱-۱ قرار دارد. اگر سطح تقعری به سمت بالا داشته باشد تعادل پایدار بوده و توپ به هر طرف که غلتانده شود به گودترین نقطه باز خواهد گشت. اگر سطح محدب باشد توپ از نظر تئوری در بالاترین نقطه ی سطح می‌تواند در حال تعادل باشد اما تعادل ناپایدار بوده و توپ ممکن است به هر سمتی بغلتد. هنگامی که توپ بر سطح صاف قرار می‌گیرد توپ در حالت تعادل خنثی بوده و در هر مکانی می‌تواند باقی بماند[۲].

(الف) (ب) (ج)

شکل ۱-۱: الف) تعادل پایدار، ب) تعادل ناپایدار، ج) تعادل خنثی

۱-۲-۱ انواع کمانش

کمانش یا نا پایداری سازه ها را می‌توان به دو قسمت عمده تقسیم کرد:

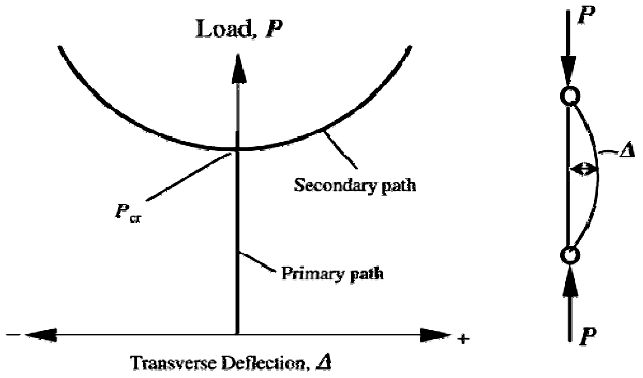
۱- کمانش همراه با نقطه دو گانگی[1]

۲- بارهای کمانش محدود[2]

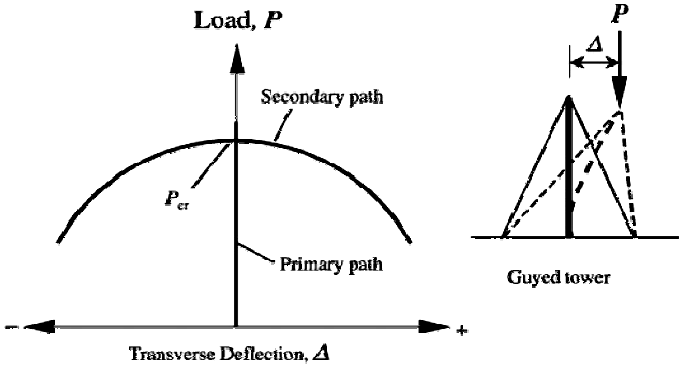
در کمانش همراه با نقطه دو گانگی، تغییر شکل عضو تحت کمانش می‌تواند از جهتی به جهت دیگر تغییر کند. به عنوان مثال، سازه می‌تواند حین افزایش نیروی فشاری از تغییر شکل محوری به تغییر شکل جانبی تغییر مسیر دهد. این تغییر مسیر باعث ایجاد نقطه ای به نام نقطه دو شاخه‌ای می‌شود و مقدار باری که در آن نقطه دوشاخه‌ای رخ می دهد بار کمانش بحرانی نامیده می‌شود. هم چنین به مسیر قبل از نقطه دوشاخه‌ای، مسیر اولیه و مسیر بعد از نقطه بحرانی، مسیر ثانویه یا مقاومت پس از کمانش[3] گفته می‌شود[۳]. بر اساس شکل سازه و بار گذاری آن مسیر ثانویه می‌تواند متقارن یا نامتقارن باشد. علاوه بر این مقدار نیروی کمانش پس از نیروی بحرانی می‌تواند صعودی یا نزولی

[1] -Bifurcation Buckling
[2] -Limit Load Buckling
[3] -Postbuckling path

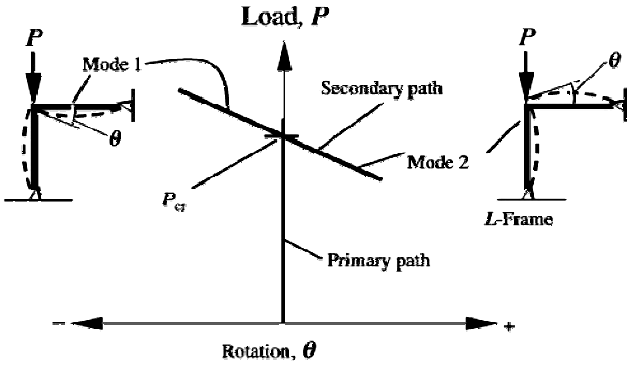
باشد. شکل۱-۲ سازه هایی با مسیر ثانویه صعودی و نزولی، متقارن یا نامتقارن را نشان می دهد.



(الف)



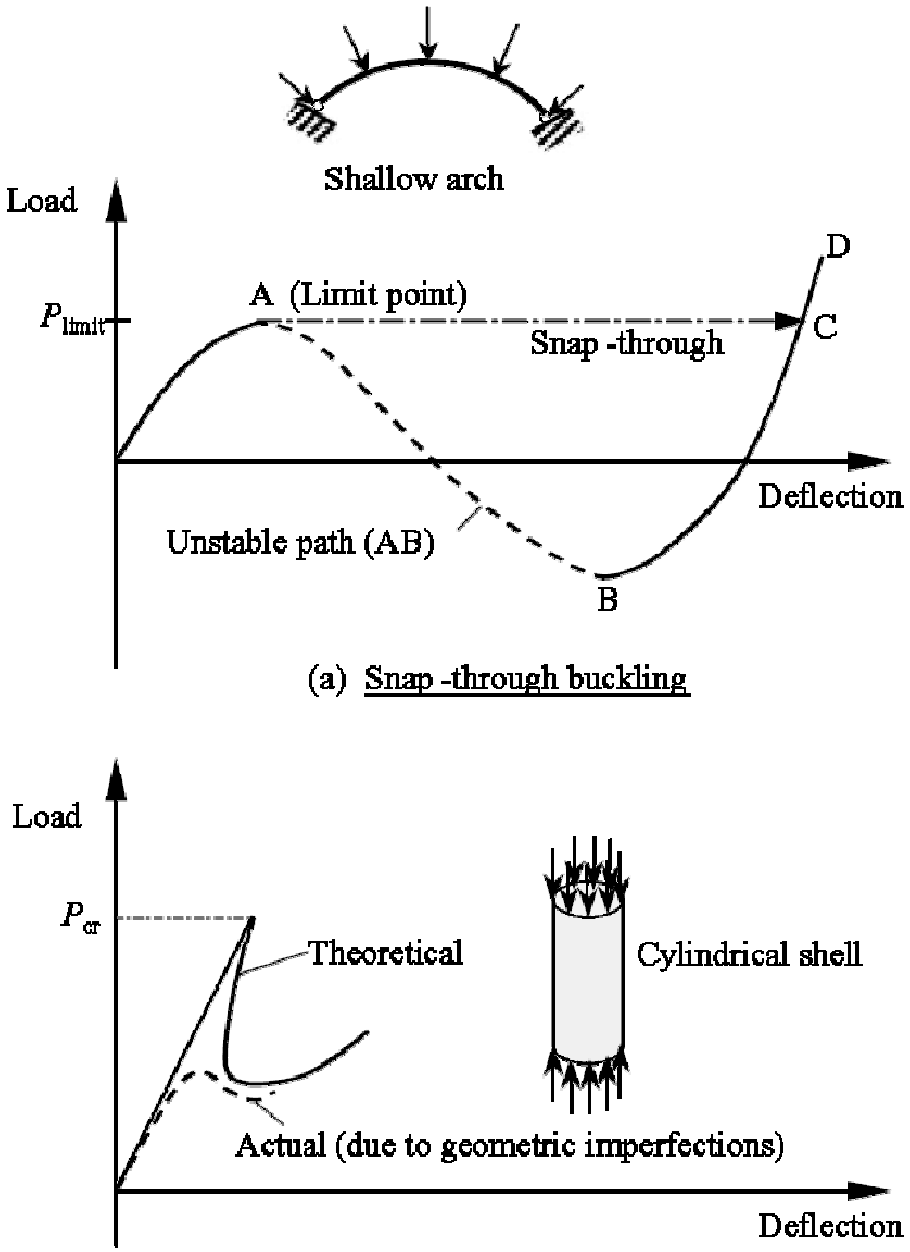
(ب)



(ج)

شکل ۱-۲: کمانش با نقطه دوشاخه‌ای الف)مقاومت پس ازکمانش متقارن ، صعودی و پایدار. ب) مقاومت پس از کمانش متقارن ، نزولی و ناپایدار. ج)مقاومت پس ازکمانش نا متقارن[۳]

در کمانش با بارمحدود، سازه به مقدار ماکزیمم بار قابل تحمل می رسد بدون آنکه نقطه دوشاخه ای در نمودار بار تغییر شکل رخ دهد. کمانش موجود در قوطی های باریک، سر پوش های کروی و بعضی از انواع پوسته ها از این نوع می‌باشد(شکل ۱-۳).



شکل ۱-۳: کمانش محدود[۳]

کمانش را می‌توان بر اساس متغیرهای دیگر نیز تقسیم بندی نمود. با توجه به رفتار ماده ی سازه، می‌توان ناپایداری را به دو دسته الاستیک و غیر الاستیک تقسیم کرد. کمانش غیرالاستیک ورق ها و رفتار حاکم بر آن در فصل آخر مورد بررسی قرار گرفته است.کمانش را بر اساس تئوری تغییر مکان به کار رفته می‌توان به کمانش برای تغییر شکل‌های کوچک و بزرگ دسته بندی نمود.

کمانش اعضای فشاری بر اساس اینکه کمانش در داخل یا خارج صفحه صورت گرفته است به سه قسمت عمده

تقسیم می‌شود:

۱- کمانش موضعی[1]: در این نوع کمانش فرض بر این است که در محل تقاطع ورق‌ها خط حاصل ازتقاطع، بعد از کمانش نیز بدون جابجایی باقی می‌ماند. یعنی مقطع بعد از کمانش شکل خود را از دست می‌دهد.

۲- کمانش کلی[2] (که خود شامل کمانش خمشی و کمانش پیچشی است): در این کمانش فرض بر این است که مقطع عضو هیچ تغییر شکلی نمی‌دهد و کل سطح مقطع مانند یک جسم صلب حرکت جانبی دارد و نیز حول مرکز خود دوران می‌کند.

۳- کمانش تغییر شکلی[3]: در واقع می‌توان این نوع کمانش را ترکیبی از کمانش موضعی و کلی دانست که در آن هم اعضاء دارای حرکت جانبی هستند و هم مقطع بعد از کمانش شکل خود را از دست می دهد و مانند یک جسم صلب تغییر شکل نمی‌دهد [۴].

۱-۲-۲: اهمیت کمانش

طراحی سازه ها معمولا بر اساس دو معیار مقاومت و سختی صورت می‌گیرد.(به توانایی سازه در مقابل بار اعمالی مقاومت سازه و به توانایی سازه برای داشتن تغییر شکل‌های مجاز سختی سازه گفته می‌شود.) اما یک سازه می‌تواند قبل از آنکه به حد نهایی تسلیم یا تغییر مکان مجاز برسد، زیر بار اعمالی کمانش کرده و ناپایدار گردد. می‌توان نشان داد یک پوسته ی کروی از جنس بتن با ضخامت به شعاعی برابر یک به پانصد و مدول الاستیسیته $E = ۲۰\ MPa$ تنش بحرانی برابر $۱۰\ MPa$ خواهد داشت در حالی که مقاومت نهایی بتن $۲۱\ MPa$ است. بنابراین در این مثال معیار کمانش قبل از معیارمقاومت اهمیت دارد. در حالت کلی برای اکثر سازه های لاغر و سبک، معیار ناپایداری و کمانش سازه یکی از معیارهای غالب و با اهمیت در طراحی به حساب می آید[۳].

کمانش الاستیک و خطی سازه ها قبل از رسیدن به نقطه دوگانگی به عنوان پایه و اساس برای حل مسائل پیچیده‌تر کمانش (همچون کمانش الاستیک و یا همراه با تنش پسماند) است. علاوه بر این فرمول‌ها و بار بحرانی به دست آمده در این حالت در کتب طراحی و آیین‌نامه‌ها استفاده شده است. برای مثال در روش ارائه شده‌ی انجمن فولاد آمریکا و همین طور روش طراحی بر اساس مقاومت نهایی، با اعمال فاکتور C_b (برای تغییرات لنگر انتهایی) بر اساس حل الاستیک کمانش پیچشی جانبی تیرها، مقدار تنش بحرانی خمش تیر را به دست آورده‌اند.

در اغلب کتب طراحی، جداول، نمودارها و یا فرمول های تقریبی برای محاسبه‌ی نیروی بحرانی سازه‌های مختلف تحت بارگذاری و شرایط مرزی متنوع در اختیار طراحان قرار گرفته است. تا با استفاده از آن میزان پایداری سازه

---

[1] - Local Buckling
[2] - Overal Buckling
[3] - Distortional Buckling

مورد طراحی را به دست آورند. لیکن نیاز به دقت محاسباتی بیشتر و یا عدم وجود حل استاندارد برای آن سازه ی خاص، پژوهشگران را ناگزیر می‌کند تا مسئله ی مورد نظر را به صورت دقیق تری حل نمایند. با این وجود، به دست آوردن حل دقیق و تئوریک مسئله ی کمانش برای شرایط پیچیده تر در بعضی موارد غیر ممکن به نظر می رسد و پژوهشگران در این شرایط روش های عددی که از سرعت و دقت مناسبی برخوردار باشد مورد استفاده قرار می‌دهند[۳].

برای به دست آوردن رابطه پایداری سازه از دو روش عمده انرژی و قانون دوم نیوتن استفاده می‌شود. در روش برداری که مبتنی بر قانون دوم نیوتن است برای به دست آوردن معادلات کمانش از معادلات تعادل استفاده می‌شود در حالی که در روش انرژی با استفاده از مجموع انرژی درونی و انرژی پتانسیل سازه که به مقدار انرژی کل معروف است معادلات کمانش پی ریزی می‌شود[۳].

حل معادلات ایجاد شده از هر کدام از روش‌های فوق منجر به حل یک مسئله مقادیر ویژه خواهد شد که در آن مقادیر ویژه نیرو یا تنش خواهد بود و بردارهای ویژه، مدهای کمانش برای هر یک از مقادیر بار می‌باشد و هم چنین کوچکترین مقدار ویژه ی به دست آمده بار کمانش بحرانی سازه خواهد بود.

در قسمت بعدی با استفاده از معادلات تعادل، نیروی بحرانی یک ستون به عنوان المانی یک بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد و جواب مسئله برای حالات گوناگون مرزی ارائه خواهد شد. در فصل دوم معادلات کمانش ورق که المانی دوبعدی است با هر دو روش تعادل نیروها و روش انرژی استخراج خواهد شد.

۱-۲-۳: معادله کمانش ستون یک بعدی در حالت کلی

ستون همگن با سختی خمشی EI و طول L که بین دو تکیه گاه مهار شده است در نظر گرفته می‌شود. رابطه‌ی ممان جابه جایی با توجه به فرض برنولی به صورت زیر می‌باشد.

$$M = -EI\frac{d^2\overline{w}}{d^2\overline{x}} \qquad (۱-۱)$$

که در آن $\overline{x}$ مختصه‌ی طولی نسبت به دستگاه مختصات قرارگرفته بر روی پایه ی ستون است و $\overline{w}$ مقدار تغییر مکان عرضی و M لنگر خمشی است.تئوری تیر برنولی بیان می‌کند که صفحات عمود بر محور خمش پس از خمش عضو هم چنان صفحه و عمود بر محور تیر باقی می ماند و از تنش های عرضی ایجاد شده می‌توان صرف نظر نمود. به راحتی و با استفاده از معادلات تعادل می‌توان نشان داد.

$$\frac{dM}{d\overline{x}} = Q \qquad (۲-۱)$$

$$\frac{dQ}{d\bar{x}} = P\frac{d^2\bar{w}}{d^2\bar{x}} \qquad (۳-۱)$$

این معادلات پس از تغییر شکل ستون و در حالت تعادل خنثی نوشته شده است و در آن Q نیروی برشی عمود بر محور تیر است. با جایگزینی معادلات (۱-۱) و (۱-۲) در معادله ی سوم معادله ی کمانش ستون اویلر به دست خواهد آمد.

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \alpha\frac{d^2w}{d^2x} = 0, \qquad \alpha = \frac{PL^2}{EI} \qquad (۴-۱)$$

که مختصات طولی و عرضی به کار رفته در معادله به صورت $x = \frac{\bar{x}}{L}$ و $w = \frac{\bar{w}}{L}$ هم پایه شده است. حل این معادله همگن به صورت زیر خواهد بود:

$$w = C_1 \sin\sqrt{\alpha}x + C_2\cos\sqrt{\alpha}x + C_3x + C_4 \qquad (۵-۱)$$

چهار ثابت C_i(i=۱و۲و۳و۴) به وسیله دو شرط مرزی کلی در دو انتهای ستون تخمین زده می‌شود. این شرایط مرزی در حالت کلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{s}_1 w + \bar{s}_2\frac{dw}{dx} + \bar{s}_3\frac{d^2w}{dx^2} + \bar{s}_4\frac{d^3w}{dx^3} = 0 \qquad (۶-۱)$$

$$\hat{s}_1 w + \hat{s}_2\frac{dw}{dx} + \hat{s}_3\frac{d^2w}{dx^2} + \hat{s}_4\frac{d^3w}{dx^3} = 0 \qquad (۷-۱)$$

$\bar{s}_i$ و $\hat{s}_i$ پارامترهای مربوط به دو شرط مرزی موجود در هر انتهای المان یک بعدی ستون است و مقدار آنها با توجه به نوع شرط مرزی در نظر گرفته می‌شود. با جایگزینی معادله ی (۱-۵) درمعادلات شرایط مرزی (۱-۶) و (۱-۷) برای مقادیر x=0 و x=1 دستگاه معادله همگن زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\alpha}(\bar{s}^{\,0}_{\,2}-\bar{s}^{\,0}_{\,4}\alpha) & \bar{s}^{\,0}_{\,1}-\bar{s}^{\,0}_{\,3}\alpha & \bar{s}^{\,0}_{\,2} & \bar{s}^{\,0}_{\,1} \\ \sqrt{\alpha}(\hat{s}^{\,0}_{\,2}-\hat{s}^{\,0}_{\,4}\alpha) & \hat{s}^{\,0}_{\,1}-\hat{s}^{\,0}_{\,3}\alpha & \hat{s}^{\,0}_{\,2} & \hat{s}^{\,0}_{\,1} \\ \bar{s}^{\,1}_{\,1}\sin\sqrt{\alpha}+\bar{s}^{1}_{2}\sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha} & \bar{s}^{\,1}_{\,1}\cos\sqrt{\alpha}+\bar{s}^{1}_{2}\sqrt{\alpha}\sin\sqrt{\alpha} & \bar{s}^{\,1}_{\,1}+\bar{s}^{\,1}_{\,2} & \bar{s}^{\,1}_{\,1} \\ -\bar{s}^{\,1}_{\,3}\alpha\sin\sqrt{\alpha}-\bar{s}^{1}_{4}\alpha\sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha} & -\bar{s}^{\,1}_{\,3}\alpha\cos\sqrt{\alpha}+\bar{s}^{1}_{4}\alpha\sqrt{\alpha}\sin\sqrt{\alpha} & & \\ \hat{s}^{\,1}_{\,1}\sin\sqrt{\alpha}+\hat{s}^{1}_{2}\sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha} & \hat{s}^{\,1}_{\,1}\cos\sqrt{\alpha}+\hat{s}^{1}_{2}\sqrt{\alpha}\sin\sqrt{\alpha} & \hat{s}^{\,1}_{\,1}+\hat{s}^{\,1}_{\,2} & \hat{s}^{\,1}_{\,1} \\ -\hat{s}^{\,1}_{\,3}\alpha\sin\sqrt{\alpha}-\hat{s}^{1}_{4}\alpha\sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha} & -\hat{s}^{\,1}_{\,3}\alpha\cos\sqrt{\alpha}+\hat{s}^{1}_{4}\alpha\sqrt{\alpha}\sin\sqrt{\alpha} & & \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۸-۱)$$

در دستگاه بالا اندیس صفر و یک به ترتیب نشان دهنده ی مقادیر s در نقاط x=0 و x=1 است به عنوان مثال برای شرط مرزی گیردار در ابتدای ستون x=0 خواهیم داشت:

$$\bar{s}^{\,0}_{1}=\hat{s}^{\,0}_{2}=1,\quad \bar{s}^{\,0}_{2}=\bar{s}^{0}_{3}=\bar{s}^{0}_{4}=\hat{s}^{\,0}_{1}=\hat{s}^{0}_{3}=\hat{s}^{0}_{4}=0$$

با محاسبه‌ی دترمینان ماتریس ۴×۴ معادله (۱-۸) به معادله کمانش بحرانی ستون خواهیم رسید. حل کلی ارائه شده در این قسمت برای هر شرط مرزی که بتوان آن را بافرمول‌های (۱-۶) و (۱-۷) نشان داد صدق می‌کند. معادله‌ی (۱-۸) یک معادله مقادیر ویژه است که با استفاده از روش برداری (مبتنی بر قانون دوم نیوتن) و فرض تیر برنولی برای المان یک بعدی به دست آمد. در جدول ۱-۱ حل معادله کمانش بحرانی برای ستون های ایده ال با شرایط مرزی کلاسیک نشان داده شده است که این شرایط مرزی به شرح زیر است:

انتهای گیردار	$w=0,\ \dfrac{dw}{dx}=0$
انتهای مفصلی	$w=0,\ \dfrac{d^2w}{dx^2}=0$
انتهای آزاد	$\dfrac{d^2w}{dx^2}=0 \qquad \dfrac{d^3w}{dx^3}+\alpha\dfrac{dw}{dx}=0$
گیردار هدایت شده	$\dfrac{dw}{dx}=0 \qquad \dfrac{d^3w}{dx^3}+\alpha\dfrac{dw}{dx}=0$

در جدول ۱-۱، مقدار نیروی بحرانی کوچکترین جواب معادله ی کمانش بحرانی است و بردار ویژه حاصل از آن اولین مد کمانش را نشان می دهد. با حل این مثال روند کلی حل یک معادله ی کمانش نشان داده شد.

۱-۳ تاریخچه

اولین مطالعه بر روی پدیده کمانش الاستیک به لئونارد اولر در قرن هیجده نسبت داده می‌شود. او با استفاده از تئوری تغییرات، معادلات کمانش ستون تحت بار محوری را به دست آورد و نتایج خود را به چاپ رساند. از طرف دیگر لاگرانژ روش انرژی را که کلی تر از روش برداری مبتنی بر قانون دوم نیوتن بود برای مطالعه مسائل مکانیک ارائه کرد که منجر به قضیه بنیادی و اساسی می نیمم انرژی پتانسیل کل گردید که برای تحلیل پایداری سازه ها و فرمول بندی آن مناسب بود. پوانکاره به عنوان طراح تئوری دوگانگی کمانش شناخته می‌شود. لیاپانوف در اواخر قرن هجده توابع انرژی لیاپانوف را مطرح کرد. فن کارمان کمانش غیر الاستیک ستون ها را بررسی نمود و مدلی برای چرخه ی هیسترزیس و تغییر شکل پلاستیک تیرها ارائه نمود. کویتر تئوری غیر خطی کمانش پس از نقطه دوگانگی