
بسم الله الرحمن الرحیم
الحمد لله رب العالمین الرحمن الرحیم مالک یوم الدین
ایاک نعبد و ایاک نستعین اهدنا الصراط المستقیم
صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم و لا الضالین

دانشگاه پیام نور
مرکز بابل

پایان‌نامه:

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

(تحقیق در عملیات)

موضوع:

برنامه ریزی فازی تعاملی برای مسائل برنامه ریزی خطی چند سطحی

استاد راهنما:

دکتر جواد وحیدی

(استادیار دانشگاه علم و صنعت ایران)

استاد مشاور:

دکتر سیامک فیروزیان

(استادیار دانشگاه پیام‌نور مرکز بابل)

مؤلف:

شیدا بابایی

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به حامیان زندگیم

پدر مهربانم

و

مادر عزیزم

به نام خدا

خداوند بزرگ را سپاسگزارم که به من سعادت کوشش در راه فراگیری علم و دانش را عطا فرمود و ما را در عرصهای قرار داد که اندیشه اصلاح، عبث نیست و راههای کمال و رشد در هر بعدی از ابعاد حیات انسانی هموارتر میباشد.

در این راستا حقیر نیز مطالبی را گردآوری نمودهام که در ابتدا برخود لازم میدانم از مساعی بیدریغ و دلسوزانه استاد ارجمند جناب آقای دکتر جواد وحیدی که با صبر و حوصلهای بینظیز قبول زحمت نمودند و راهنمایی پایاننامه اینجانب را بعهده گرفتند،تشکر و قدردانی نمایم و از خداوند متعال طول عمر با عزت برای ایشان مسئلت دارم.

از آقای دکتر سیامک فیروزیان که زحمت مشاوره این پایاننامه را بر عهده داشتند تشکر و قدردانی مینمایم

از آقای دکتر قاسم علیزاده افروزی که داوری این رساله را به عهده گرفتند و زحمت مطالعه آن را بر خود هموار نمودهاند کمال تشکر را دارم.

شیدا بابایی

شهریور ۱۳۹۰

چکیده

این رساله مشتمل بر ۵فصل است:

فصل اول را به بیان پیشنیازهای مقدمات فازی این رساله و مقدمه‌ای بربرنامه‌ریزی خطی اختصاص می‌دهیم.

در فصل دوم ، مسائل برنامه ریزی خطی چند سطحی را معرفی می کنیم.

در فصل سوم،با برنامه ریزی فازی تعاملی آشنا می شویم که در دو بخش مطرح شده است و ضمن بررسی شرایط خاتمه یافتن الگوریتم نشان می دهیم که چطور می توان یک جواب رضایت بخش به دست آورد.

در فصل چهارم،به برنامه ریزی فازی تعاملی برای مسائل برنامه ریزی خطی چند سطحی می پردازیم.در این روش،بعد از تعیین اهداف فازی از تصمیم گیرندگان در تمام سطوح،یک جواب رضایت بخش با به روزرسانی درجه های رضایت بخش در سطح بالا با در نظر گرفتن تعادل رضایت بخش کل بین تمام سطوح به دست می آوریم.

در فصل پنجم، نتیجه گیری و کاربرد این رساله را نشان میدهیم.

واژه های کلیدی:

برنامه ریزی خطی چند سطحی،برنامه ریزی فازی، اهداف فازی ،برنامه ریزی تعاملی،تصمیم گیرنده

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل چهارم: برنامه‌ریزی فازی تعاملی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی چند سطحی

فصل پنجم: نتیجه گیری

پیوست ها

فهرست اشکال

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمات

مقدمه

در این فصل مفاهیم مقدماتی، تعاریف لازم و نتایجی در زمینه نظریه مجموعه های فازی و همچنین برنامه ریزی خطی که در فصل های بعدی مورد استفاده قرارخواهند گرفت، ارائه می گردد.

۱-۱ تاریخچه و مروری بر نظریه مجموعه های فازی

منطق فازی بر خلاف منطق کلاسیک که دو ارزشی است یک منطق چند ارزشی است. منطق فازی بر مبنای زبان طبیعی می باشد و برای مسایل دنیای واقعی که به دلیل وجود ابهام و عدم قطعیت در تعریف و درک آن ها ساختار پیچیده ای دارند مناسب می باشد. انسان ها برای درک و تحلیل مسایلی که اطلاعات دقیق و کافی در دست ندارند از ظرفیت استدلال تقریبی استفاده می کنند. حال اگر بخواهیم سیستم هایی که به دلیل وجود ابهام و نبود اطلاعات کافی و دقیق دارای پیچیدگی بالا و عدم قطعیت زیاد هستند را مدل سازی و تحلیل کنیم چه باید کرد؟ پروفسورلطفی زاده در سال ۱۹۷۳ با بیان اصل ناسازگاری به این سؤال این گونه پاسخ داد: هر چه میزان آگاهی از یک سیستم افزایش یابد پیچیدگی سیستم کاهش یافته و دقت و درک سیستم افزایش می یابد. منطق فاری با توجه به ماهیت چند ارزشی بودن برای تجزیه و تحلیل این گونه سیستم ها بسیار مفید می باشد. منطق فازی شامل مجموعه هایی است که مرز مشخص و دقیقی ندارند. یعنی برخلاف مجموعه های کلاسیک که دقیقا مشخص است یک شیء به آن تعلق دارد یا نه در نظریه فازی برای عضویت، به هر شیء یک عدد حقیقی در فاصله $[0,1]$نسبت می دهد. بنابر این منطق فازی تکامل یافته منطق کلاسیک است لذا استدلال تقریبی با به کار گیری منطق فازی ممکن می شود.

دلایل به کارگیری منطق فازی را می توان به صورت زیر نام برد:

- منطق فازی به طور مفهومی برای یادگیری آسان است. مفاهیم ریاضی مربوط به منطق فازی خیلی ساده هستند.
- منطق فازی انعطاف پذیر است.
- منطق فازی داده های نادقیق را تحمل می کند.
- منطق فازی توانایی مدل سازی توابع غیر خطی پیچیده را دارد.
- منطق فازی توانایی ادغام با روش های کنترلی مرسوم را دارد.

اما مهمترین دلیل به کارگیری منطق فازی، بر اساس زبان طبیعی بودن آن است. اصول منطق فازی بر اساس ارتباطات بشر است. از آنجا که منطق فازی به طور ساختاری بر اساس ویژگی های توصیف کیفی در زبان بشر می باشد، لذا به کارگیری آن بسیار آسان است. مجموعه های فازی و منطق فازی در سال ۱۹۶۵ توسط لطفی زاده به دنیای علم معرفی شد. این نظریه کاربرد وسیعی در دامنه مسایلی مانند: فرایند کنترل، پردازش تصویر، الگو تشخیص و دسته بندی، ریاضیات کاربردی، تحقیق در عملیات، مدیریت، اقتصاد و تصمیم گیری دارد. همچنین کاربردهای ویژه ای در سازگاری رنگ تلویزیون، خودکار ساختن ماشین لباس شویی، انتقال اتومبیل و عملیات بزرگ راه دارد. نظریه مجموعه های فازی رشد سریعی در زمینه شبکه های عصبی پیدا کرد. سیستم های فازی و شبکه های عصبی همراه با روش های احتمالی و الگوریتم های تکاملی، مجموعه های تقریبی و متغیر های نا دقیق، به طورائتلافی روش های محاسبات نرم را تشکیل دادند.

تعریف۱: فرض کنید X یک مجموعهٔ مرجع دلخواه باشد، تابع مشخصه هر زیرمجموعه معمولی A از X، $\mu_A : X \to \{0, 1\}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{A}(x)=\begin{cases}1 & : \quad x\in A\\ 0 & : \quad x\notin A\end{cases}$$

با توجه به تعریف فوق، برای هر $x\in X$ ، $\mu_A(x)$ تنها یکی از مقادیر ۰ یا ۱ را خواهد گرفت.

تعریف۲: اگر برد تابع μ_A را از مجموعهٔ دو عضوی {۱, ۰} به بازه [۱, ۰] توسعه دهیم، تابعی خواهیم داشت که به هر عضو x از X، عددی را در بازهٔ [۱, ۰] نسبت می دهد. اکنون A دیگر یک مجموعه معمولی نیست بلکه چیزی است که آن را یک مجموعه فازی می نامیم. (بطور دقیق تر، A زیرمجموعهٔ فازی از X است).

درتعریف فوق اگر $\mu_A(x)\in(0,1)$، آنگاه در مورد عضویت x به A با عدم قطعیت مواجهیم. در حقیقت در اینجا به نوعی مفهوم عضویت یک عنصر را گسترش داده ایم.

تعریف۳: فرض کنید X مجموعه ای ناتهی باشد. هر زیرمجموعهٔ فازی $\tilde{A}$ از X توسط یک تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}: X\rightarrow[0,1]$، مشخص می شود که در آن برای هر $x\in X$، مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ در بازه [۱, ۰] میزان عضویت x را در $\tilde{A}$ نشان می دهد. نزدیکی مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد یک نشانه عضویت بیشتر عنصر x به مجموعه $\tilde{A}$ و نزدیکی آن به صفر نشان دهنده عضویت کمتر x به مجموعه $\tilde{A}$ می باشد.

تعریف۴: فرض کنید X یک مجموعهٔ مرجع و $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_{\tilde{A}}(x)>0$، تکیه گاه $\tilde{A}$ نامیده شده و با $\mathrm{SUPP}(\tilde{A})$ نشان داده می شود. یعنی

$$\mathrm{SUPP}\ (\tilde{A})=\{x\in X\,|\,\mu_{\tilde{A}}(x)>0\}$$

تعریف۵: فرض کنید X یک مجموعهٔ مرجع و $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. ارتفاع را که بزرگترین مقدار تابع عضویت است با $hgt(\tilde{A})$ نشان می دهیم و به صورت زیرتعریف می شود:

$$hgt(\tilde{A}) = \underset{x\in X}{SUP}\ \mu_{\tilde{A}}(x)$$

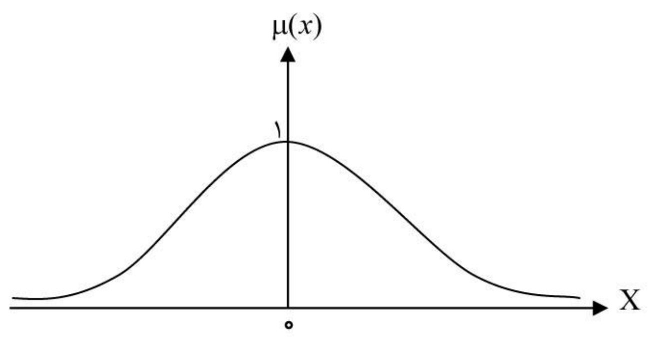
تعریف۶: فرض کنید $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی باشد. هرگاه $hgt(\tilde{A}) = ۱$ آنگاه $\tilde{A}$ را نرمال گوییم. در غیر اینصورت $\tilde{A}$ را زیرنرمال گوییم.

هر مجموعهٔ فازی زیرنرمال $\tilde{A}$ را می توان با تقسیم $\mu_{\tilde{A}}(x)$ بر ارتفاع $\tilde{A}$، نرمال کرد.

اگر x عنصری از $\tilde{A}$ باشد که $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۰/۵$، آنگاه x را یک نقطه گذر (معبر) $\tilde{A}$ گوییم.

مثال۱: فرض کنید $\tilde{A}$ زیرمجموعه فازی « اعداد نزدیک به صفر» باشد.

الف) تابع عضویت $\tilde{A}$ می تواند به صورت $x \in R$ ، $\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-x^{۲}}$ باشد. با توجه به تابع عضویت آن عضوهای۰ و۲ به میزان $e^{0} = ۱$ و $e^{-۴}$ به زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ تعلق دارند.

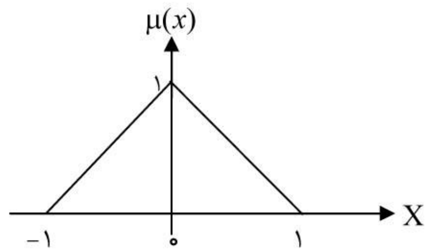


شکل۱-۱ نمودارتابع عضویت مجموعه « اعداد نزدیک به صفر» مثال ۱ (الف)

ب) تابع عضویتی به صورت زیر معرفی شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x+1 & : \quad -1\le x\le 0 \\ 1-x & : \quad 0\le x<1 \\ 0 & : \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

که براساس این تابع عضویت، اعداد ۰ و۲ به ترتیب به میزان۱ و ۰ به مجموعه $\tilde{A}$ تعلق دارند.



شکل۱-۲ نمودارتابع عضویت مجموعه « اعداد نزدیک به صفر» مثال ۱ (ب)

۱-۲ نمایش زیر مجموعهٔ فازی

برای نشان دادن یک زیرمجموعه فازی روشهای مختلفی رایج است. روش متداول برای توصیف یک زیرمجموعه فازی به صورت مجموعه ای از زوجهای مرتب به صورت $\tilde{A}=\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x));\ x\in X\}$ می باشد. هنگامی که X یک مجموعه متناهی(یا نا متناهی شمارا) به صورت گسسته $\{x_1,\dots,x_n\}$باشد، یک زیرمجموعهٔ فازی $\tilde{A}$بصورت $\tilde{A}=\left\{\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1},\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2},\dots,\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n}\right\}$ و یا به شکل $\tilde{A}=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1}+\dots+\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$ نشان داده می شود.

در رابطه فوق منظور از علامت + ، اجتماع است نه جمع جبری . همچنین نماد —— علامت تقسیم نبوده و نشانگر آن است که عدد بالایی $\mu_{\tilde{A}}(x)$، درجه عضویت عنصر پایینی x است.

هنگامی که X یک مجموعه پیوسته باشد از نماد زیر استفاده می شود:

$$\tilde{A} = \int_X \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$$

که در آن منظور از علامت $\int$ ، اجتماع است.

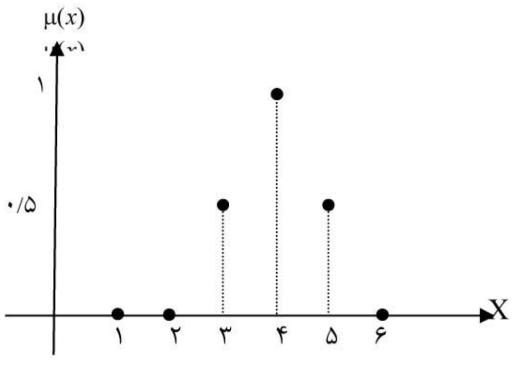
قرارداد: دربعضی از موارد و برای اختصار، بجای $\mu_{\tilde{A}}(x)$ می نویسیم $A(x)$.

مثال۲: فرض کنید $X=\{۱, ۲, ..., ۶\}$ یک زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ از X را می توان بصورت زیر معرفی کرد:

$$\tilde{A} = \frac{۰/۵}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۰/۵}{۵}$$

و یا به صورت:

$$\tilde{A} = \left\{ (۳ , ۰/۵) , (۴ , ۱) , (۵ , ۰/۵) \right\}$$



شکل۱-۳ نمودارتابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ مثال ۲

که در این مثال $SUPP(\tilde{A}) = \{3, 4, 5\}$ و $hgt(\tilde{A}) = ۱$. یعنی $\tilde{A}$ نرمال است و اعداد ۳ و ۵ برای مجموعه فازی $\tilde{A}$ دو معبر می باشند.

تعریف۷: اگرX یک مجموعه مرجع، $\tilde{A}$و $\tilde{B}$ زیرمجموعه های فازی آن با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $\mu_{\tilde{B}}(x)$ باشند که به اختصار با $A(x)$ و $B(x)$ نشان می دهیم، آنگاه:

- مجموعه فازی $\tilde{A}$ را تهی گوییم اگر برای هر x متعلق به X، $A(x) = 0$.

- مجموعه فازی $\tilde{A}$ را تام گوییم اگر برای هر x متعلق به X، $A(x) = ۱$.

- مجموعه فازی $\tilde{A}$ را زیرمجموعه فازی $\tilde{B}$ گوییم و می نویسیم $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$، اگر برای هر $x \in X$، داشته باشیم: $A(x) \leq B(x)$.

- دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را مساوی گوییم و می نویسیم $\tilde{A} = \tilde{B}$، اگر برای هر $x \in X$، داشته باشیم: $A(x) = B(x)$.

- مجموعه فازی $\tilde{A}'$، متمم مجموعه فازی $\tilde{A}$، توسط تابع عضویت زیرتعریف می شود:

$$A'(x) = ۱ - A(x) \ , \ \ \forall x \in X$$

مثال۳: فرض کنید $X = \{۱, ۲, ..., ۱۰\}$ و زیرمجموعه های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{۰/۱}{۲}, \frac{۰/۳}{۳}, \frac{۰/۵}{۴}, \frac{۰/۸}{۶}, \frac{۰/۵}{۷}, \frac{۰/۳}{۸}, \frac{۰/۱}{۹} \right\}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{۰/۱}{۱}, \frac{۰/۴}{۲}, \frac{۰/۶}{۳}, \frac{۰/۸}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۰/۸}{۶}, \frac{۰/۶}{۷}, \frac{۰/۴}{۸}, \frac{۰/۱}{۹} \right\}$$

در این صورت چون برای هر $x \in X$، $A(x) \leq B(x)$ پس $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ و همچنین خواهیم داشت:

$$A' = \left\{ \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۹}{۲}, \frac{۰/۷}{۳}, \frac{۰/۵}{۴}, \frac{۰/۳}{۵}, \frac{۰/۲}{۶}, \frac{۰/۵}{۷}, \frac{۰/۷}{۸}, \frac{۰/۹}{۹}, \frac{۱}{۱۰} \right\}$$

۱-۲-۱ اجتماع و اشتراک زیرمجموعه های فازی

تعریف۸: اجتماع دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \max\left[A(x), B(x)\right], \quad \forall x \in X$$

تعریف۹: اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \min\left[A(x), B(x)\right], \quad \forall x \in X$$

و یا به بیان ساده تر

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = A(x) \wedge B(x)$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = A(x) \vee B(x)$$

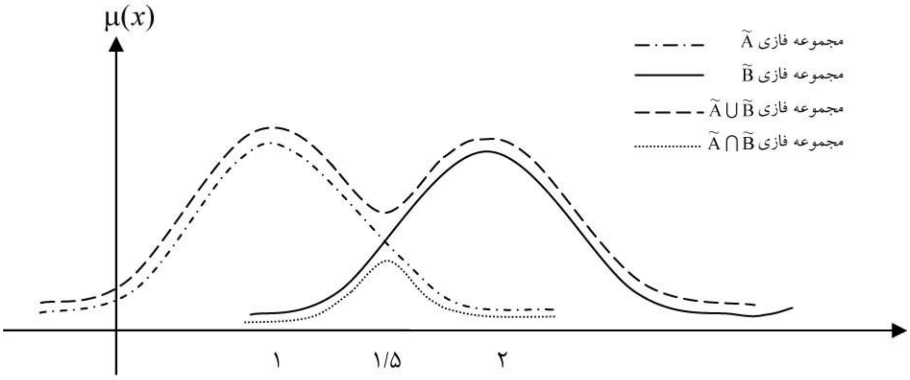
مثال۴: فرض کنید $X = R$، $\tilde{A}$ مجموعه فازی « اعداد نزدیک به یک » و $\tilde{B}$ مجموعه فازی « اعداد نزدیک به دو » بصورت زیر باشند:

$$A(x) = \frac{۱}{۱+(x-۱)^{۲}} \;, \quad B(x) = \frac{۱}{۱+(x-۲)^{۲}} \quad , \;\forall\; x \in X$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \max\left[A(x), B(x)\right] = \begin{cases} \dfrac{۱}{۱+(x-۱)^{۲}} & : \quad x \leq \dfrac{۳}{۲} \\[2ex] \dfrac{۱}{۱+(x-۲)^{۲}} & : \quad x > \dfrac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \min\left[A(x), B(x) \right] = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(x-2)^2} & : \quad x \le \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{1+(x-1)^2} & : \quad x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$



شکل۱-٤ نمودار تابع عضویت مجموعه های فازی $\tilde{A}$، $\tilde{B}$، $\tilde{A} \cap \tilde{B}$، $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ مثال٤

۱-۲-۲ افراز یک مجموعه فازی

تعریف۱۰: فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد و $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ (برای هر $\tilde{A}_i$، $\tilde{A}_i \neq X$، $\tilde{A}_i \neq \varphi$)

زیرمجموعه های فازی X باشند به قسمی که برای $\forall x \in X$ داشته باشیم: $\sum_{i=1}^{n} A_i(x) = 1$

در این صورت ($\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$) را یک افراز فازی مجموعه X گوییم.

۱-۲-۳ عملگرهای دیگر در مجموعه های فازی

تعریف۱۱: جمع جبری دو مجموعه فازی $\tilde{A}$و $\tilde{B}$ که با علامت $\tilde{A} + \tilde{B}$ نشان داده می شود،

به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$(\tilde{A} + \tilde{B})(x) = A(x) + B(x) - A(x).B(x)$$

- جمع کراندار دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ که با علامت $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$ نشان داده می شود، بصورت یک مجموعهٔ فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$(\tilde{A} \oplus \tilde{B})(x) = \min \{۱, A(x) + B(x)\}$$

- تفاضل کراندار دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ که با $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$ نشان داده می شود، بصورت یک مجموعه فازی با توابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$(\tilde{A} \ominus \tilde{B})(x) = \max \{۰, A(x) + B(x) - ۱\}$$

- حاصلضرب جبری دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ که با $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ نشان داده می شود، بصورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$(\tilde{A} \cdot \tilde{B})(x) = A(x) \cdot B(x)$$

تعریف۱۲: اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی باشد، آنگاه $\alpha \cdot \tilde{A}$ که درآن $\alpha \in [۰, ۱]$ به صورت یک مجموعهٔ فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$(\alpha \cdot \tilde{A})(x) = \alpha \cdot A(x)$$

همچنین توان mام، $m > ۰$، یک مجموعه فازی $\tilde{A}$، که با $\tilde{A}^m$ نشان داده می شود به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A}^m(x) = [A(x)]^m$$

۱-۲-۴ برشها

تعریف۱۳: زیرمجموعهٔ (معمولی) عناصری را از X که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α ($\alpha > 0$) باشد، α- برش $\tilde{A}$(مجموعه تراز α وابسته به $\tilde{A}$) گوییم و با A_α نشان می دهیم. یعنی

$$A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}$$

- مفهوم α- برش قوی که با $A_{\bar{\alpha}}$ نشان داده می شود بصورت زیرتعریف می گردد:

$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \in X \mid A(x) > \alpha\}$$

با استفاده از مفهوم α- برشها، می توان مجموعهٔ فازی $\tilde{A}$را بوسیله مجموعه های معمولی توصیف کرد:

$$\forall \; x \in X, \; A(x) = \sup_{\alpha > 0} \{\alpha \mid x \in A_\alpha\}$$

۱-۲-۵ تحدب فازی

تعریف۱۴: مجموعهٔ فازی $\tilde{A}$را محدب گوییم هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in X$ و هر $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم:

$$A[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \;\geq\; \min\, [A(x_1), A(x_2)]$$

و براساس مفهوم α- برشها می توان گفت:

مجموعه فازی $\tilde{A}$ را محدب گوییم اگر همه α- برشهای آن محدب باشند یا به عبارتی α- برشهای آن بازه باشند. در غیر اینصورت غیرمحدب می گوییم.[26]