دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

آمار، گرایش آمار ریاضی

عنوان

توزیع درجه در گراف‌های اشتراک تصادفی

استاد راهنما

دکتر رامین ایمانی

استاد مشاور

دکتر هژیر حومئی

پژوهشگر

سید محمد حسینی

بهمن ۱۳۹۰

بسم الله الرّحمن الرّحیم

الهی! نور تو چراغ معرفت بیفروخت، دل من افزونی است، گواهی تو ترجمانی من بکردند، ندای من افزونی است قرب تو چراغ وجد بیفروخت، همت من افزونی است، بود تو کار من راست کرد، بود من افزونی است.

الهی! هر شادی که بی تو است اندوه آنست، هر منزل که نه در راه توست زندانست هر دل که نه در طلب توست ویرانست، یک نفس با تو به گیتی ارزان است، یک دیدار از آن تو بصد هزار جان رایگان است، صد جان نکند، آنچه کند بوی وصالت.

الهی! از جود تو هر مفلسی را نصیبی است از کرم تو هر دردمندی را طبیبی است از سعت رحمت تو هر کسی را بهره ایست از بسیاری صواب بر تو هر نیازمندی را قطره ایست بر سر هر مؤمن از تو تاجی است در دل هر محب از تو سراجی است، هر شیفته‌ای را با تو سر و کاریست هر منتظری را آخر روزی شرابی و دیداریست.

الهی! دلی ده که در تو جان بازیم، جانی ده که کار آن جهان سازیم، تقوایی ده که دنیا را بسپریم، روحی ده که ازین دین برخوریم، یقینی ده که در آز بر ما باز نشود، قناعتی ده تا از صعودهٔ حرص ما باز نشود، دانایی ده که از راه نیفتیم، دستی گیر که دست آویز نداریم، درگذر که بد کرده‌ایم.

آزرم دار که آزرده‌ایم، طاعت مجوی که یاب آن نداریم، از هیبت مگوی که تاب آن نداریم، توفیقی ده تا در دین استوار شویم، عقبی ده از دنیا بیزار شویم، نگاه دار تا پشیمان نشویم، بیاموز تا شریعت بدانیم، برافروز تا در تاریکی نمانیم، بنمای تا در روی کس ننگریم، بگشای دری که در بگذریم، تو بساز که دیگران ندانند، تو بنواز که دیگران نتوانند، همه را از خود رهایی ده، همه را از خود آشنایی ده، همه را از مکر شیطان نگاه دار، همه را از فتنه نفس آگاه دار.

گزیده‌ای از مناجات نامه خواجه عبدالله انصاری

تقدیم به:

به مادر و پدر عزیزم

که هر چه دارم از آن‌هاست

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُرُ الْمَخلوق لَمْ یَشْکُرُ الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **رامین ایمانی**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر**هژیر حومئی** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.
از سرکار خانم مهندس **رزا کیان** که همیشه مشوق من بوده‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم.
ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی مخصوصاً از جناب آقایان دکتر حسین بیورانی، دکتر حسین جباری خامنه، و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.
در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام و تمام دوستان دوران تحصیلم که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

سید محمد حسینی
بهمن ۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: حسینی نام: سید محمد

عنوان: توزیع درجه در گراف‌های اشتراک تصادفی

استاد راهنما : دکتر رامین ایمانی

استاد مشاور : دکتر هژیر حومئی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار گرایش: آمار ریاضی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۹۰

کلید واژه‌ها: گراف دو بخشی تصادفی، گراف اشتراک تصادفی

چکیده

در بسیاری از مدل‌های گراف‌های تصادفی، بیشتر یال‌ها مورد توجه بودند و رأس‌ها نقش چندانی نداشتند. در نظریه‌ی گراف تصادفی اردوش–رینی، ما n رأس داریم و با پرتاب سکه‌ای حضور یال‌ها را مشخص می‌کنیم. حضور هر یال مستقل از یال‌های دیگر است. چنین مدلی وقتی که روابط بین اشیاء مستقل از دیگری است، مفید واقع می‌شود. در این پایان نامه، مدلی از گراف‌های تصادفی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن رأس‌ها مورد توجه هستند.

گراف‌های اشتراک تصادفی مدلی از گراف‌های تصادفی هستند که در آن به هر رأس مستقلاً یک زیر مجموعه از مجموعه‌ای از اشیاء تخصیص داده می‌شود و دو رأس مجاور هستند اگر زیر مجموعه‌های تخصیص داده شده به آن‌ها مجزا نباشند. در این پایان نامه، ما می‌خواهیم توزیع درجه‌ی یک رأس را برای گراف‌های اشتراک تصادفی به دست آوریم.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

مقدمه

گراف‌های دوبخشی که یک نوع خاص از گراف‌ها هستند، همان طور که از نامشان پیداست از دو بخش مانند V و W ساخته می‌شوند به طوری که هیچ یالی در درون بخش‌های V و W وجود نداشته باشد یعنی هیچ یالی دو رأس از یک بخش را به هم متصل نکند و تمام یال‌ها در این گراف‌ها بین اعضای دو بخش V و W رسم می‌شوند. یک گراف تصادفی مجموعه‌ای از نقاط یا رأس‌ها با خطوط یا یال‌هایی است که هر زوج از رأس‌ها را به طور تصادفی به هم وصل می‌کند. گراف‌های اشتراک تصافی که از گراف‌های دوبخشی تصادفی به وجود می‌آیند، گراف‌های تصادفی هستند که بر اساس اشتراک همسایه‌های اعضای دو بخش V و W تولید می‌شوند.

اولین مدل گراف اشتراک تصادفی در [۱۳] و [۲۰] معرفی شده است. گراف‌های اشتراک تصادفی مدلی از گراف‌های تصادفی با یال‌های وابسته می‌باشند و گراف‌های تصادفی با یال‌های مستقل توسط اردوش[۱] و رینی[۲] معرفی شده است. دو مدل خاص از گراف‌های اشتراک تصادفی مدل‌های گراف اشتراک تصادفی فعال و منفعل می‌باشد که از گراف دوبخشی تصادفی به دست می‌آید و مدل فعال توسط اعضای V و مدل منفعل توسط اعضای W ساخته می‌شوند. گودهارت [۳] و یاوورسکی [۴] این دو مدل را معرفی کرده‌اند و در [۷] و [۸] به بررسی خواص آن‌ها پرداخته‌اند و همین طور گراف اشتراک تصادفی توسط ریبارژیک [۵] در [۱۷] نیز مطرح شده است و سرانجام مدل‌های تعمیم یافته در [۸] معرفی شده است و مدل دیگر از گراف‌های اشتراک تصادفی مدل وزن‌دار می‌باشد که از اعضای V،

---

[۱] Erdös
[۲] Renyi
[۳] Godehardt
[۴] Jaworski
[۵] Rybarczyk

گراف دوبخشی تصادفی وزن‌دار به وجود می‌آید و توسط بریتون [۶] و دیجفن [۷] در [۴] معرفی شده است. ما در این پایان نامه توزیع درجه رأس را در مدل‌های گراف اشتراک تصادفی وزن‌دار، فعال و منفعل که در [۸] معرفی شده است را بررسی می‌کنیم و بعضی از نتایج [۲۱] را روی مدل‌های دوجمله‌ای [۱۳] و [۲۰] تعمیم می‌دهیم.

سرانجام یاوورسکی و کارونسکی [۸] به همراه استارک [۹] تحت مقاله‌ای [۱۰] درجه‌ی یک رأس نوعی را در مدل‌های گراف اشتراک تصادفی مورد بررسی قرار دادند و شانگ [۱۰] نیز توزیع درجه در گراف اشتراک تصادفی وزن‌دار را تحت مقاله‌ای [۱۹] مورد بررسی قرار داد که هدف اصلی این پایان نامه است که به همین منظور در فصل اول، تعاریف و مفاهیم اولیه‌ای را که در فصل‌های آینده از آن‌ها استفاده خواهیم کرد بیان می‌کنیم و در فصل دوم، گراف‌های اشتراک تصادفی وزن‌دار، فعال و منفعل را معرفی می‌کنیم و خواص آن‌ها را بیان می‌کنیم تا سرانجام در فصل سوم، توزیع درجه در مدل‌های گراف‌های اشتراک تصادفی مورد بررسی قرار دهیم.

---

[۶] Britton
[۷] Deijfen
[۸] Karonski
[۹] Stark
[۱۰] Shang

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

فصل نخست پایان نامه، مروری بر تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی مربوط به گراف و گراف‌های تصادفی است که در فصل‌های آتی از آن‌ها استفاده خواهیم کرد. البته باید به این نکته توجه کنیم که تمام تعاریف و ویژگی‌های مربوط به گراف را نمی‌توان در یک فصل خلاصه کرد، اما ما حتی الامکان سعی خواهیم کرد تعاریف و ویژگی‌هایی که در فصل‌های آتی این پایان نامه، از آن‌ها استفاده شده، به طور مختصر شرح دهیم.

۱.۱ گراف و ویژگی‌های آن

هنگامی که نقشه‌ی جاده‌ها را مورد استفاده قرار می‌دهیم، اغلب به دنبال این هستیم که با توجه به جاده‌های موجود در نقشه، چگونه از شهری به شهر دیگر برویم. در این‌جا با دو مجموعه‌ی متمایز از اشیاء سروکار داریم: شهرها و جاده‌ها. اگر V را مجموعه شهرها و E را مجموعه جاده‌ها در نظر بگیریم، می‌توانیم رابطه‌ی R را روی مجموعه V چنین تعریف کنیم که aRb، هرگاه بتوانیم فقط با استفاده از جاده‌های E، از a به b سفر کنیم. اگر همه‌ی جاده‌های E که ما را از a به b می‌برند جاده‌های دو طرفه باشند، در این صورت bRa را نیز می‌توانیم بنویسیم.

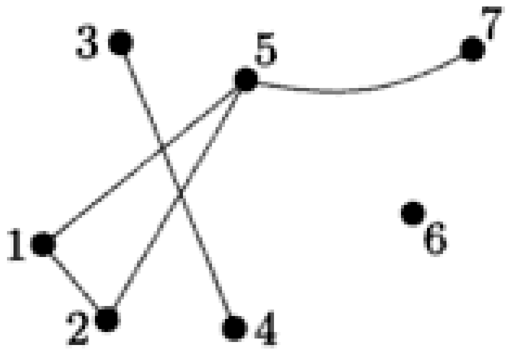
تعریف ۱.۱.۱. هر گراف G زوج مرتبی مانند $G = (V, E)$ از مجموعه‌هایی است که در شرط $E \subseteq [V]^۲$ صدق می‌کند، بنابراین اعضای E زیرمجموعه‌های دو عضوی از V هستند و همواره فرض می‌کنیم که $V \cap E = \emptyset$ است. اعضای V رأس‌ها یا نقاط روی گراف G و اعضای E یال‌ها یا خطوط آن هستند.

گراف تهی، گرافی بدون یال است و یا به عبارتی گرافی است که به ازای هر دو رأس از مجموعه V، هیچ یالی بین این دو رأس وجود نداشته باشد.

مثال ۲.۱.۱. شکل زیر یک گراف روی مجموعه رئوس V و با مجموعه یال‌های E را نشان می‌دهد به طوری که

$$V = \{۱, ..., ۷\}$$

$$E = \{\{۱, ۲\}, \{۱, ۵\}, \{۲, ۵\}, \{۳, ۴\}, \{۵, ۷\}\}$$



شکل ۱.۱: گراف G روی مجموعه رئوس V

تعریف ۳.۱.۱. دو رأس x و y از گراف G مجاور یا همسایه نامیده می‌شوند اگر x و y تشکیل یک یال در گراف G را بدهد، و دو یال $e \neq f$ مجاور هستند اگر دارای یک انتهای مشترک باشند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید G یک گراف غیرتهی باشد. درجه‌ی یک رأس مانند v که با $d_G(v) = d(v)$ نشان داده می‌شود، تعداد یال‌های $|E(v)|$ واقع بر v است یا به عبارتی تعداد همسایه‌های v است، یک رأس با درجه‌ی صفر، منفرد نامیده می‌شود.

به عنوان مثال، در شکل ۱.۱ داریم:

$$deg(۱) = ۲\ ,\ deg(۲) = ۲\ ,\ deg(۳) = ۱\ ,\ deg(۴) = ۱$$

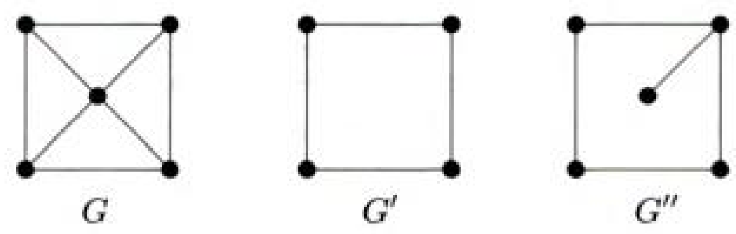
$$deg(۵) = ۳\ ,\ deg(۶) = ۰\ ,\ deg(۷) = ۱$$

تعریف ۵.۱.۱. فاصله‌ی $d_G(x, y)$ دو رأس x و y در G، طول کوتاهترین مسیر $x - y$ در G است. اگر چنین مسیری وجود نداشته باشد، گوییم $d(x, y) := \infty$.

تعریف ۶.۱.۱. گراف ناتهی G همبند نامیده می‌شود اگر هر دو رأس آن با یک مسیر در G به هم وصل شده باشند. گرافی را که همبند نباشد، ناهمبند گوییم.
با توجه به تعریف بالا، شکل ۱.۱ ناهمبند است، زیرا با وجود این‌که بین رأس‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۷ دو به دو مسیری وجود دارد ولی بین رأس ۶ با دیگر رأس‌های گراف G مسیری وجود ندارد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که گراف G ناهمبند است.

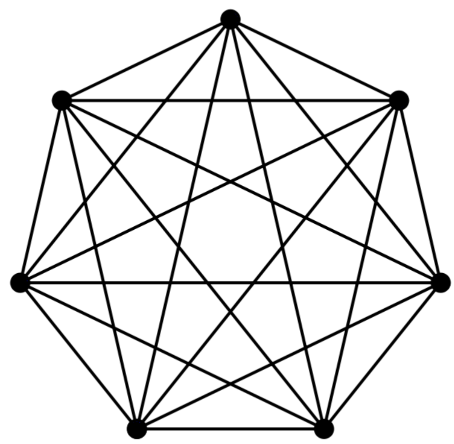
تعریف ۷.۱.۱. دو گراف $G = (V, E)$ و $G' = (V', E')$ را در نظر بگیرید. اگر $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$ باشد، آن‌گاه G' یک زیرگراف G نامیده می‌شود و به صورت $G' \subseteq G$ نشان داده می‌شود.

مثال ۸.۱.۱. شکل زیر گراف G و زیر گراف‌های آن را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱: گراف G با زیر گراف‌های G' و G''

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید G یک گراف غیر تهی باشد. اگر همه‌ی رأس‌های G دو به دو مجاور باشند، آن‌گاه G کامل نامیده می‌شود. یک گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهیم.



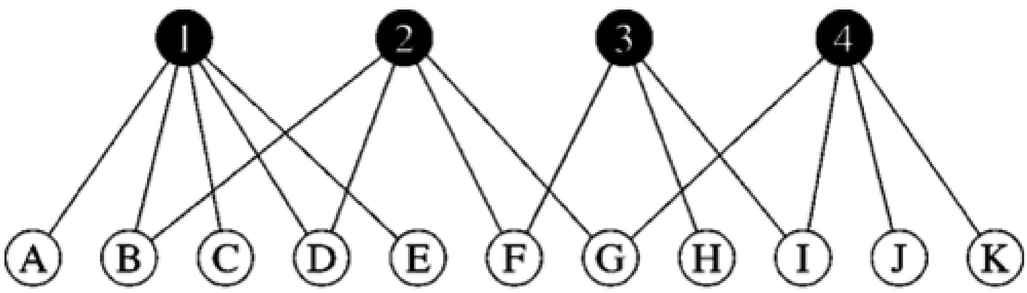
شکل ۳.۱: گراف کامل با هفت رأس یعنی $K_۷$

فرض کنیم G یک گراف با n رأس باشد. مکمل گراف G که با $\overline{G}$ نشان داده می شود، زیر گرافی از k_n است که از هر n رأس گراف G و از همه‌ی یال‌هایی که در G نیستند تشکیل شده است.

اگر $G = k_n$ باشد، $\overline{G}$ گرافی متشکل از n رأس است که یال ندارد. ($\overline{G}$ یک گراف تهی با n رأس است.)

تعریف ۱۰.۱.۱. گراف دوبخشی گرافی است که مجموعه‌ی رأس‌ها را بتوان به دو زیرمجموعه‌ی X و Y به طوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. چنین افراز (X, Y) را دوبخشی کردن گراف می‌نامند.
گراف دوبخشی کامل، یک دوبخشی ساده با افراز (X, Y) است که در آن هر رأس X به هر رأس Y متصل است. اگر $|Y| = n$ و $|X| = m$، چنین گرافی را به وسیله‌ی $K_{m,n}$ نشان می‌دهند.

مثال ۱۱.۱.۱. شکل زیر نمایشی از یک گراف دوبخشی است که در آن اعداد ۱ تا ۴ نشانگر فیلم‌ها و حروف A تا K نشانگر بازیگرانی هستند که در آن فیلم‌ها ظاهر می‌شوند که با یال‌هایی این دو بخش به هم وصل می‌شوند.



شکل ۴.۱: نمایشی از یک گراف دوبخشی

۲.۱ گراف‌های تصادفی

در این بخش، به معرفی گراف تصادفی [۱] و چند حالت خاص از گراف‌های تصادفی می‌پردازیم.
فرض کنید گراف G دارای n رأس است که احتمال انتخاب یک یال بین دو رأس متمایز آن، برابر p است و انتخاب یال‌ها مستقل از همدیگر صورت می‌گیرد.

[۱] Random graphs

تعریف ۱.۲.۱. گراف تصادفی $G(n,p)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$G(n,p):\Omega\longrightarrow\mathcal{G}_n$$
که
$$\Omega:=\prod_{e\in[V]^{2}}\Omega_e,\qquad \Omega_e:=\{0_e,1_e\}$$
$\mathcal{G}_n$: مجموعه تمام گراف‌های با n رأس.
به عبارت دیگر گراف تصادفی، تابعی است که به هر عضو فضای نمونه، یک گراف با n رأس اختصاص می‌دهد. لازم به ذکر است که بیشتر قضایا و مسائل مربوط به گراف‌های تصادفی، با استفاده از روش‌های احتمالی حل می‌شوند (علاقه مندان می‌توانند در این زمینه به منابع [۱] و [۱۲] مراجعه نمایند).

۱.۲.۱ گراف دوبخشی تصادفی [۲]

گراف دوبخشی G را با دو بخش V,W که در آن یال‌ها به صورت تصادفی رخ می‌دهند. در تعریف‌های زیر گراف‌های دوبخشی تصادفی بیان شده است.

تعریف ۲.۲.۱. گراف دوبخشی تصادفی $\mathscr{B}\,(n,m,p)$ گرافی تصادفی با دو بخش (V,W) از مجموعه رئوس $V\cup W$ و $|V|=n, |W|=m$ می‌باشد که در آن احتمال وقوع هر یال بین دو مجموعه V و W مستقل و برابر با p_{ij} می‌باشد. که به ازاء هر $v_i\in V$ و $w_j\in W$ داریم:
$$P\left\{\ (v_i,w_j)\ \text{ظاهر شدن یال}\ \right\}=p_{ij}\ ,\ i=1,\ldots,n\ ,\ j=1,\ldots,m$$

تعریف ۳.۲.۱. یک گراف دوبخشی تصادفی $\mathscr{BG}_{n,m}\left(n,\mathscr{P}_{(m)}\right)$ با دو بخش (V,W) از مجموعه رئوس $V\cup W$ و
$$V\cup W=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}\cup\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}\quad,\quad |V|=n\ ,\ |W|=m$$
به صورت زیر ساخته می شود:

۱. هر رأس $v\in V$ ، درجه و همسایه هایش را از مجموعه W، به طور مستقل از سایر رئوس V انتخاب می کند.

---
[۲] Random bipartite graphs

۲. رأس v ، درجه اش را مطابق توزیع احتمال $\mathscr{P}_{(m)}$ انتخاب می کند به طوری که:

$$\mathscr{P}_{(m)} = (P_0, P_1, \dots, P_m) \qquad , \qquad P\{|\Gamma(v)| = k\} = P_k\ ,\ k = 0, 1, \dots, m$$

که در آن $\Gamma(v)$ ، برابر مجموعه همسایه های رأس v [۳] است.

۳. برای هر $S \subseteq W$ به طوری که $|S| = k$ ، احتمال این‌که زیر مجموعه S برابر با مجموعه همسایه های رأس v باشد، برابر است با:

$$P\{S = \Gamma(v)\} = \frac{P_k}{\binom{m}{k}} \tag{1.1}$$

رأس v با درجه k، مجموعه همسایه‌هایش را به طور یکنواخت از تمام زیر مجموعه‌های k عضوی از W انتخاب می‌کند، بنابراین داریم:

$$P\left(\Gamma(v) = S \mid |\Gamma(v)| = k\right) = \frac{1}{\binom{m}{k}}$$

$$\begin{aligned} P\left(\Gamma(v) = S\right) &= P\left(\Gamma(v) = S\ ,\ |\Gamma(v)| = k\right) \\ &= P(\Gamma(v) = S \mid |\Gamma(v)| = k) \cdot P(|\Gamma(v)| = k) \\ &= \frac{1}{\binom{m}{k}} \cdot P_k = \frac{P_k}{\binom{m}{k}} \end{aligned}$$

و این احتمال را با p_k نشان می‌دهیم.

۲.۲.۱ گراف دوبخشی تصادفی وزن‌دار

گراف دوبخشی تصادفی وزن‌دار $\mathscr{B}(n, m, p)$ همان گراف دوبخشی تصادفی $\mathscr{B}(n, m, F, H)$ است که به هر رأس یک وزن تصادفی داده باشیم درگراف دوبخشی تصادفی وزن‌دار هر رأس مستقل از رأس دیگر بین دو مجموعه V, W انتخاب می‌شود. یال‌ها بین $i \in V$، $j \in W$ مستقلاً با احتمال p_{ij} رسم می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. درگراف دوبخشی تصادفی $\mathscr{B}(n, m, p)$، به هر رأس $i \in V$، یک وزن A_i می‌دهیم و $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ متغیرهای تصادفی مثبت، مستقل و هم توزیع با توزیع مشترک F می‌باشند و F با شرط

[۳] درگراف های ساده، مجموعه همسایه های یک رأس را با $N_G(.)$ نشان می دادیم.

متناهی بودن میانگین، با میانگین ۱ فرض می‌شود. به صورت مشابه، به هر رأس $j \in W$ یک وزن B_i می‌دهیم و $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ متغیرهای تصادفی مستقل از F با توزیع H می‌باشند و H با شرط متناهی بودن میانگین، با میانگین ۱ فرض می‌شود. وجود یک یال بین $i \in V$ و $j \in W$ مستقل از سایر رئوس، با احتمال p_{ij} می‌باشد. این مدل از گراف‌ها را گراف دوبخشی تصافی وزن‌دار می‌نامیم، و با نماد $\mathscr{B}(n, m, F, H)$ نشان می‌دهیم.
اگر هر رأس از V داری وزن‌های یکسانی باشند و هر راس از W هم داری وزن‌های یکسانی باشند، تابع F, H به تابع انتقال [۴] تبدیل می‌شود و گراف دوبخشی تصادفی وزن‌دار $\mathscr{B}(n, m, F, H)$ هم به همان گراف دوبخشی تصادفی $\mathscr{B}(n, m, p)$ تبدیل می‌شود و اگر هر رأس از W داری وزن‌های یکسانی باشند و وزن‌ها در V مانند تعریف بالا و یکسان نباشند، تابع H به تابع انتقال تبدیل می‌شود و یک گراف دوبخشی تصادفی وزن‌دار $\mathscr{B}(n, m, F)$ به وجود می‌آید(علاقه مندان می‌توانند در این زمینه به منبع [۵] مراجعه نمایند).

۳.۲.۱ گراف‌های اشتراک تصادفی [۵]

از دو مدل، گراف دوبخشی تصادفی $\mathscr{BG}_{n,m}\left(n, \mathscr{P}_{(m)}\right)$ و گراف دوبخشی تصادفی وزن‌دار $\mathscr{B}(n, m, F, H)$ می‌توان گراف‌های تصادفی تعریف کنیم که گراف اشتراک تصادفی نامیده می‌شوند. ما در این بخش چند نمونه از آن را بیان می‌کنیم که در فصل آتی از این تعاریف استفاده خواهیم کرد.

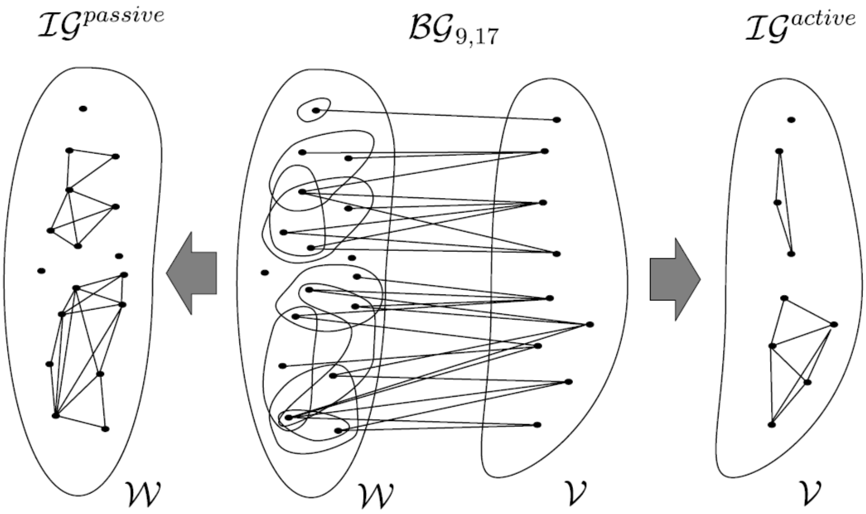
تعریف ۵.۲.۱. یک گراف با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ از گراف $\mathscr{BG}_{n,m}\left(n, \mathscr{P}_{(m)}\right)$ می‌باشد که در آن (v_i, v_j) یک یال می‌باشد اگر و تنها اگر v_i و v_j حداقل s همسایه مشترک داشته باشند. یعنی $|\Gamma(v_i) \cap \Gamma(v_j)| \geq s$ که در آن $s \geq 1$ است، این گراف را گراف اشتراک تصادفی فعال [۶] گوییم و با نماد $\mathscr{IG}_n^{active}\left(n, \mathscr{P}_{(m)}\right)$ و یا به اختصار با نماد $\mathscr{IG}_n^{a}\left(\mathscr{P}_{(m)}\right)$ نشان می‌دهیم (ما در این پایان نامه $s = 1$ فرض می‌کنیم و نتایج را به دست خواهیم آورد).

تعریف ۶.۲.۱. یک گراف با مجموعه رئوس $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ از گراف $\mathscr{BG}_{n,m}\left(n, \mathscr{P}_{(m)}\right)$ می‌باشد که در آن (w_i, w_j) یک یال می‌باشد اگر و تنها اگر w_i و w_j حداقل s همسایه مشترک داشته باشند. یعنی $|\Gamma(w_i) \cap \Gamma(w_j)| \geq s$ که در آن $s \geq 1$ است، این گراف را گراف اشتراک

[۴] Heaviside function
[۵] Random intersection graphs
[۶] Random active intersection graph

تصادفی منفعل [۷] گوییم و با نماد $\mathscr{IG}_m^{passive}\left(n,\mathscr{P}_{(m)}\right)$ و یا به اختصار با نماد $\mathscr{IG}_m^{p}\left(\mathscr{P}_{(m)}\right)$ نشان می‌دهیم (ما در این پایان نامه $s=1$ فرض می‌کنیم و نتایج را به دست خواهیم آورد).

مثال ۷.۲.۱. در شکل زیر مثالی برای گراف دوبخشی تصادفی $\mathscr{BG}_{9,17}\left(9,\mathscr{P}_{(m)}\right)$ آمده است که گراف‌های اشتراک تصادفی فعال $\mathscr{IG}_9^{a}\left(\mathscr{P}_{(m)}\right)$ و اشتراک تصادفی منفعل $\mathscr{IG}_{17}^{p}\left(\mathscr{P}_{(m)}\right)$ حاصل از این گراف را نشان داده است.



شکل ۵.۱: نمایشی از گراف دوبخشی تصادفی $\mathscr{BG}_{9,17}\left(9,\mathscr{P}_{(m)}\right)$، گراف‌های اشتراک تصادفی فعال $\mathscr{IG}_9^{a}\left(\mathscr{P}_{(m)}\right)$ و اشتراک تصادفی منفعل $\mathscr{IG}_{17}^{p}\left(\mathscr{P}_{(m)}\right)$

تعریف ۸.۲.۱. گراف اشتراک تصادفی $G\left(n,m,p\right)$، یک گراف با مجموعه رئوس $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ از گراف دوبخشی تصادفی $\mathscr{B}\left(n,m,p\right)$ می‌باشد که در آن $\left(v_i,v_j\right)$ یک یال می‌باشد اگر و تنها اگر v_i و v_j حداقل s همسایه مشترک داشته باشند. یعنی $\Gamma(v_i)\cap\Gamma(v_j)\geq s$ که در آن $s\geq 1$ است (ما در این پایان نامه $s=1$ فرض می‌کنیم و نتایج را به دست خواهیم آورد).

تعریف ۹.۲.۱. یک گراف با مجموعه رئوس $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ از گراف $\mathscr{B}\left(n,m,F,H\right)$ می‌باشد که در آن $\left(v_i,v_j\right)$ یک یال می‌باشد اگر و تنها اگر v_i و v_j حداقل s همسایه مشترک داشته باشند. یعنی $\Gamma(v_i)\cap\Gamma(v_j)\geq s$ که در آن $s\geq 1$ است، این گراف را گراف اشتراک تصادفی وزن‌دار

[۷] Random passive intersection graph

گوییم و با نماد $G\left(n,m,F,H\right)$ نشان می‌دهیم (ما در این پایان نامه $s=1$ فرض می‌کنیم و نتایج را به دست خواهیم آورد). اگر هر رأس از V دارای وزن‌های یکسانی باشند و هر راس از W هم دارای وزن‌های یکسانی باشند، تابع F,H به تابع انتقال تبدیل می‌شود و گراف دوبخشی تصادفی وزن‌دار $\mathscr{B}\left(n,m,F,H\right)$ هم به همان گراف دوبخشی تصادفی $\mathscr{B}\left(n,m,p\right)$ تبدیل می‌شود که گراف اشتراک تصادفی وزن‌دار $G\left(n,m,F,H\right)$ نیز همان گراف اشتراک تصادفی $G\left(n,m,p\right)$ می‌باشد.
اگر هر رأس از W داری وزن‌های یکسانی باشند و وزن‌ها در V مانند تعریف ۴.۲.۱ و یکسان نباشند، تابع H به تابع انتقال تبدیل می‌شود و یک گراف دوبخشی تصادفی وزن‌دار $\mathscr{B}\left(n,m,F\right)$ به وجود می‌آید که گراف اشتراک تصادفی حاصل از این نوع گراف را با نماد $G\left(n,m,F\right)$ نشان می‌دهیم(علاقه مندان می‌توانند در این زمینه به منبع [۵] مراجعه نمایند).

۳.۱ تعاریف دیگر

تعریف ۱.۳.۱. اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، گوئیم متغیر تصادفی Y ، در ترتیب تصادفی(احتمالی) کوچکتر از متغیر تصادفی X است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$P\left\{Y>u\right\}\leq P\left\{X>u\right\} \qquad , \qquad \forall u\in(-\infty,\infty)$$

اگر چنین شرطی برای دو متغیر تصادفی X و Y برقرار باشد، در این صورت خواهیم نوشت: $Y\leq X$
.

در یک حالت خاص، اگر X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند به طوری که داشته باشیم:

$$P\left\{X=k\right\}=P_k \quad , \quad P\left\{Y=k\right\}=Q_k \quad , \qquad k=0,1,\dots,m$$

شرط بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} &P\left\{Y>u\right\}\leq P\left\{X>u\right\}\\ &P\left\{Y\leq u\right\}\geq P\left\{X\leq u\right\}\\ &\sum_{k=0}^{u}Q_k\geq\sum_{k=0}^{u}P_k \qquad\qquad , \qquad u=0,1,2,\dots,m\end{aligned}$$

تعریف ۲.۳.۱. دنباله‌ی $\{X_1,X_2,...\}$ از متغیرهای تصادفی را گوییم همگرا در توزیع یا ضعیفاً همگرا به متغیر تصادفی X است اگر

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$$