بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

(گرایش آنالیز تابعی)

عنوان:

مطالعه‌ی طیف اعضا در F-جبرهای بنیادی و قویا کراندار

از:

فرهاد رحیمی مصطفی لو

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل انصاری

اسفند ۱۳۹۲

دوران بقا چو باد صحرا بگذشت

تلخی و خوشی زشت و زیبا بگذشت

پنداشت ستمگر جفا بر ما کرد

بر گردن او بماند و بر ما بگذشت

تقدیم به تو...

با تشکر فراوان

از استاد ارجمند و بزرگوار جناب آقای دکتر اسماعیل انصاری که زحمات بی دریغی را برای بنده کشیدند و طریقه‌ی درست فکر کردن را به بنده آموختند.

فهرست مطالب

چکیده (فارسی)........ ث

چکیده (انگلیسی)........ ج

پیش گفتار........ ۱

۱ پیش نیازها

۱–۱ آنالیز مختلط........ ۳

۱–۲ فضاهای متری........ ۳

۱–۳ فضاهای توپولوژی........ ۴

۱–۴ فضاهای برداری توپولوژیکی........ ۵

۱–۵ جبرهای باناخ........ ۸

۲ جبرهای توپولوژیکی بنیادی

۲–۱ جبر توپولوژیکی بنیادی........ ۱۳

۳ طیف اعضا در جبرهای بنیادی

۳–۱ جبر توپولوژیکی قویا کراندار........ ۳۶

۳–۲ طیف اعضا در F–جبرهای توپولوژیکی بنیادی قویا کراندار........ ۳۸

منابع........ ۴۹

واژه نامه انگلیسی به فارسی........ ۵۰

چکیده:

مطالعه‌ی طیف اعضا در F-جبرهای بنیادی و قویا کراندار

فرهاد رحیمی مصطفی لو

در این پایان نامه دو ویژگی مهم از طیف عناصر در F-جبرها به دست آمد. در حقیقت اثبات شده است که در F-جبر یکدار بنیادی و قویا کراندار A ، طیف عنصر a یا همان $SP(a)$ ، فشرده است. علاوه بر این اگر فضای دوگان A یا همان A^* ، عناصر A را جدا سازد $SP(a)$ مخالف تهی می باشد.

کلید واژه:

طیف، F-جبر، عنصر کراندار، F-جبر بنیادی قویا کراندار.

پیش گفتار:

همانطور که می دانیم در مبحث جبرهای توپولوژیکی با مفهومی همچون طیف عناصر در جبرها آشنا هستیم. در این پایان نامه نیز سعی بر آن است که طیف عناصر در جبرهای توپولوژیکی مختلف مورد بررسی واقع گردد. سئوالی که مدت های زیادی ذهن دانشمندان ریاضی را به خود معطوف کرده این است که طیف هر عنصر در جبرهای توپولوژیکی مختلف چه ویژگی دارد. به خوبی می دانیم که طیف هر عنصر در جبرهای باناخ مختلط فشرده و مخالف تهی می باشد، که این حکم طی قضیه ای به نام گلفند[1] بیان شده است[صفحه 23 :6]. البته این نتیجه برای رده خاصی از جبرهای توپولوژیکی، به خصوص انواع خاصی از F–جبرها برقرار است. هم چنین این نتیجه برای انواع خاصی از جبرهای توپولوژیکی موضعا محدب برقرار است.

برای مثال اگر یک جبر توپولوژیکی موضعا محدب و یکدار داشته باشیم که مجموعه ی عناصر معکوس پذیرش باز باشد و هم چنین تابع معکوس روی مجموعه ی معکوس پذیر آن پیوسته باشد در این صورت طیف هر عنصر در این جبر فشرده و مخالف تهی می باشد[8,7]. در سال ۱۹۶۵ شخصی به نام آلان[2] اثبات کرد که در F–جبرهای توپولوژیکی موضعا محدب وقویا کراندار، طیف هر عنصر فشرده و مخالف تهی می باشد. در این پایان نامه نشان خواهیم داد که هر جبر توپولوژیکی موضعا محدب یا موضعا کراندار، بنیادی است و هم چنین نشان می دهیم هر جبر توپولوژیکی بنیادی لزوما موضعا محدب یا موضعا کراندار نیست. این بدان معنی است که جبرهای توپولوژیکی بنیادی بسیار وسیع تر از جبرهای توپولوژیکی موضعا محدب یا موضعا کراندار هستند. در نهایت در این پایان نامه بررسی می کنیم که آیا حکمی که آلان برای F–جبرهای توپولوژیکی موضعا محدب و قویا کراندار اثبات کرد برای F–جبرهای توپولوژیکی بنیادی و قویا کراندار قابل تعمیم است یا خیر! که طی چند قضیه اثبات خواهیم کرد، طیف هر عنصر در F–جبرهای توپولوژیکی بنیادی و قویا کراندار فشرده است و با اضافه کردن شرطی خوایم دید که طیف هر عنصر مخالف تهی نیز می باشد.

این پایان نامه بر اساس مقاله ای تحت عنوان طیف عناصر در F–جبرهای توپولوژیکی بنیادی و قویا کراندار که توسط دکتر اسماعیل انصاری و دکتر احسان انجیدنی ارائه شده، تدوین شده است[5]. هم چنین شامل سه فصل می باشد. در فصل اول به یادآوری پیش نیاز ها می پردازیم، در فصل دوم به معرفی جبرهای توپولوژیکی بنیادی می پردازیم و در فصل سوم طیف عناصر در F–جبرهای توپولوژیکی بنیادی و قویا کراندار را بررسی می کنیم.

لازم به ذکر است در این پایان نامه همه تعریف ها، لم ها، قضایا، ملاحظه ها و نتایج، شماره متوالی دارند. برای مثال در بخش ۲ از فصل اول، دومین تعریف دارای شماره ی ۱–۲–۲ می باشد.

---

[1] Gelfand
[2] Allan

فصل اول:

پیش نیازها

۱-۱. آنالیز مختلط

تعریف ۱-۱-۱. تابع f از متغیر مختلط z در یک مجموعه ی باز تحلیلی است هر گاه در هر نقطه ی آن مجموعه دارای مشتق باشد. اگر از تابع f ای سخن به میات می آوریم که در مجموعه ی S تحلیلی است و S باز نیست، منظور این است که f در مجموعه ی بازی شامل S تحلیلی است. به خصوص f در نقطه ی $z_\circ$ تحلیلی است هر گاه در یک همسایگی $z_\circ$ تحلیلی باشد.

لم ۱-۱-۲. تابع f در سراسر همسایگی باز $|z - z_\circ| < r$ تحلیلی است اگر و تنها اگر بتوان $f(z)$ را به صورت یک سری توانی $\sum_{n=\circ}^{+\infty} a_n(z - z_\circ)^n$ روی همسایگی نمایش داد.

قضیه (لیوویل)[۳] ۱-۱-۳. اگر f تابعی تام و در صفحه مختلط کراندار باشد در این صورت تابع f در صفحه مختلط ثابت می باشد.

۱-۲. فضاهای متری

تعریف ۱-۲-۱. اگر X یک مجموعه ی مخالف تهی باشد در این صورت تابع $d: X \times X \to \mathbb{R}$ را یک متر بر روی X گوییم، هر گاه به ازای هر x، y و z متعلق به X در شرایط زیر صدق کند:

$$I.\quad d(x,y) \geq \circ$$

$$II.\quad d(x,y) = d(y,x)$$

$$III.\quad d(x,y) = \circ \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

$$IV.\quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

در این صورت زوج (X,d) را یک فضای متری گوییم.

تعریف ۱-۲-۲. فضای متری (X,d) را کامل گوییم هر گاه هر دنباله ی کوشی در آن همگرا باشد.

[۳] Liouvill

۱-۳. فضاهای توپولوژی

تعریف۱-۳-۱. فرض کنید X یک مجموعه ی مخالف تهی باشد، در این صورت $\tau \subseteq P(X)$ را یک توپولوژی بر روی X می گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

I. X,ϕ متعلق به τ باشند.

II. τ نسبت به هر اجتماع دلخواه اعضایش بسته باشد.

III. τ نسبت به هر اشتراک متناهی اعضایش بسته باشد.

در این صورت زوج (X,τ) را یک فضای توپولوژی گوییم.

تعریف ۱-۳-۲. فضای توپولوژی (X,τ) را فشرده گوییم هرگاه به ازای هر خانواده ی $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ که $X = U_{i\in I}A_i$ مجموعه متناهی مانند $F \subseteq I$ موجود باشد که $X = U_{j\in F}A_j$.

تعریف ۱-۳-۳. فضای توپولوژی (X,τ) را موضعا فشرده گوییم هرگاه هر نقطه ی آن یک همسایگی با بستار فشرده داشته باشد.

تعریف ۱-۳-۴. فضای توپولوژی (X,τ) را هاسدورف گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه ی متمایز y,x متعلق به X، همسایگی های V,U به ترتیب شامل y,x موجود باشند که $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۱-۳-۵. فرض کنیم (X,τ) و $(Y,\acute{\tau})$ دو فضای توپولوژی باشند و $f:(X,\tau) \to (Y,\acute{\tau})$ تابعی روی X باشد، در این صورت f را یک تابع پیوسته گوییم هرگاه به ازای هر U متعلق به $\acute{\tau}$، $f^{-1}(U)$ متعلق به τ باشد. همچنین f را یک تابع باز گوییم هرگاه به ازای هر V متعلق به τ، $f(V)$ متعلق به $\acute{\tau}$ باشد.

حال تابع یک به یک پوشای f را همئومورفیسم یا همسانریخت گوییم اگر و تنها اگر پیوسته و باز باشد.

تعریف ۱-۳-۶. اگر (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد $\beta \subseteq \tau$ را یک پایه برای توپولوژی τ گوییم هرگاه هر عضو τ به وسیله ی اجتماع دلخواهی از اعضای β به وجود آید.

تعریف ۱-۳-۷. فضای توپولوژی (X,τ) را متر پذیر گوییم هرگاه توپولوژی τ به وسیله یک متر به وجود آید. به عبارت دیگر $\beta = \{B(x;r); x \in X, r > ۰\}$ یک پایه برای توپولوژی τ باشد.

تعریف ۱-۳-۸. اگر (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد گردایه ی β از همسایگی های x متعلق به X را یک پایه موضعی در نقطه ی x گوییم، هرگاه به ازای هر همسایگی شامل نقطه x یک عضو در β وجود داشته باشد که زیر مجموعه ی آن همسایگی باشد.

۱-۴. فضاهای برداری توپولوژیکی

ملاحظه ۱-۴-۱. در این بخش قبل از تعاریف مربوط به فضاهای برداری توپولوژیکی به بیان چند تعریف مربوط به فضای برداری می پردازیم.

تعریف ۱-۴-۲. مجموعه $X \neq \emptyset$ همراه با عمل جمع و عمل ضرب اسکالر را یک فضای برداری روی میدان Φ گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

۱.تحت عمل جمع تعریف شده یک گروه آبلی باشد.

۲. عمل ضرب اسکالر یعنی نگاشت $\times: \Phi \times X \to X$ با ضابطه ی $\times(\lambda, x) = \lambda . x$، شرایط زیر را به ازای هر y, x متعلق به X و به ازای هر $\lambda_۱, \lambda_۲$ و λ متعلق به Φ داشته باشد.

$I.\ ۱ . x = x$

$II.\ \lambda_۱ \left(\lambda_۲ . x\right) = \left(\lambda_۱ . \lambda_۲\right) . x$

$III.\ \lambda(x+y) = \lambda . x + \lambda . y$

$IV.\ \left(\lambda_۱ + \lambda_۲\right) . x = \lambda_۱ . x + \lambda_۲ . x$

تعریف ۱-۴-۳. اگر X یک فضای برداری روی میدان Φ باشد، $p: X \to R^* \cup \{۰\}$ را یک $\left(۰ < \alpha \leq ۱\right)$ $\alpha-$ نرم گوییم هرگاه به ازای هر y, x متعلق به X و به ازای هر λ متعلق به Φ در شرایط زیر صدق کند

$I.$ $\rho(x) \geq ۰$

$II.$ $\rho(x) = ۰ \Leftrightarrow x = ۰$

$III.$ $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

$IV.$ $\rho(\lambda . x) = |\lambda| \rho(x)$

ملاحظه ۱-۴-۴. در این بخش منظور از میدان Φ همان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ می باشد.

ملاحظه ۱-۴-۵. برای $\alpha = ۱$ ، ρ یک نرم روی X می نامیم.

تعریف ۱-۴-۶. اگر X یک فضای برداری باشد، $E \subseteq X$ را محدب گوییم،هرگاه $\left(۰ \leq \lambda \leq ۱ \right)$

$\lambda E + \left(۱ - \lambda \right) E \subseteq E$ باشد.

تعریف ۱-۴-۷. اگر X یک فضای برداری روی میدان Φ باشد، $E \subseteq X$ را متعادل گوییم، هرگاه به ازای هر λ متعلق به Φ به طوری که $|\lambda| \leq ۱$, $\lambda E \subseteq E$ باشد.

تعریف ۱-۴-۸. فضای برداری X روی میدان Φ به همراه یک توپولوژی را فضای برداری توپولوژیکی گوییم هرگاه در شرایط زیرصدق کند:

$I.$ به ازای هر x متعلق به X، مجموعه تک عضوی $\{x\}$ بسته باشد.

$II.$ اعمال فضای برداری نسبت به آن توپولوژی پیوسته باشند.

ملاحظه ۱-۴-۹. میدانیم که به وسیله نرم می توان متر ایجاد کرد، فقط کافیست متر را به این صورت تعریف کنیم.

$$d(x,y) = ||x - y||$$

حال توپولوژی حاصل از متری که، آن متر به وسیله ی یک نرم ایجاد شده باشد را توپولوژی نرم می نامیم.

مثال ۱-۴-۱۰. اگر X یک فضای برداری نرم دار باشد در این صورت با توپولوژی نرم، یک فضای برداری توپولوژیکی خواهد شد.

ملاحظه ۱-۴-۱۱. در این بخش منظور از پایه ی موضعی، پایه موضعی در نقطه ی صفر است.

تعریف ۱-۴-۱۲. اگر X یک فضای برداری توپولوژی باشد، $E \subseteq X$ را کراندار گوییم هرگاه

$$\forall V \in N(\circ), \exists s > \circ, \forall (t > s \Rightarrow E \subseteq tV).$$

تعریف ۱-۴-۱۳. متر d را روی فضای برداری X پایا گوییم هرگاه

$$\forall x, y, z \in X \quad d(x+z, y+z) = d(x, y).$$

اکنون به معرفی انواع مختلف فضاهای برداری توپولوژیکی می پردازیم.

تعریف ۱-۴-۱۴. فضای برداری توپولوژیکی X را موضعا محدب گوییم، هرگاه یک پایه ی موضعی داشته باشد که اعضای آن پایه محدب باشد.

تعریف ۱-۴-۱۵. فضای برداری توپولوژیکی X را موضعاً کراندار گوییم، هرگاه در نقطه صفر یک همسایگی کراندار داشته باشد.

تعریف ۱-۴-۱۶. فضای برداری توپولوژیکی X را موضعاً فشرد گوییم، هرگاه در نقطه صفر یک همسایگی با بستار فشرده داشته باشد.

تعریف ۱-۴-۱۷. فضای برداری توپولوژیکی X را متر پذیر گوییم، هرگاه توپولوژیکی آن حاصل از یک متر باشد.

تعریف۱-۴-۱۸. فضای برداری توپولوژیکی X را یک $F-$ فضا گوییم، هرگاه توپولوژی آن بوسیله یک متر پایای کامل تولید شده باشد.

تعریف ۱-۴-۱۹. فضای برداری توپولوژیکی X را نرم پذیر گوییم، هرگاه توپولوژی آن بوسیله یک نرم تولید شده باشد.

تعریف ۱-۴-۲۰. اگر Y, X دو فضای برداری توپولوژیکی باشند، نگاشت $T: X \to Y$ یک تبدیل خطی است، هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$\forall \alpha \in \Phi, \forall x, y \in X \quad T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

لم ۱-۴-۲۱. اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی و U یک همسایگی صفر باشد، آنگاه یک همسایگی متقارن از صفر مانند $V(V = -V)$ موجود است که $V + V \subseteq U$.

قضیه ۱-۴-۲۲. اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد، آنگاه

I. هر همسایگی صفر شامل یک همسایگی متعادل شامل صفر است.

II. هر همسایگی محدب حول صفر شامل یک همسایگی محدب و متعادل شامل صفر می باشد.

قضیه ۱-۴-۲۳. فضای برداری توپولوژیکی X، موضعاً کراندار است اگر و تنها اگر یک $\left(0 < \alpha \leq 1\right)$ α-نرم موجود باشد که توپولوژی فضا را تولید کند.

برهان: برهان در [8] آمده است.

تعریف۱-۴-۲۴. اگر X و Y دو فضای برداری توپولوژیکی باشند و f تابعی از X به توی Y باشد، تابع f را دنباله ای پیوسته گوییم، هرگاه دنباله ی دلخواه (x_n) به x همگرا باشد آنگاه دنباله ی$\left(f(x_n)\right)$ به $f(x)$ همگراه باشد.

قضیه ۱-۴-۲۵. اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی متر پذیر و Y نیز فضای برداری توپولوژیکی باشد، f دنباله ای پیوستهاست اگر و تنها اگر f پیوسته باشد.

۱-۵. جبرهای باناخ[۴]

تعریف ۱-۵-۱. جبر A روی میدان Φ، یک فضای برداری روی میدان Φ است که در آن نگاشت ضرب یعنی $\times: A \times A \to A$ با ضابطه $\times(a,b) = a \times b$ تعریف شده است و خواص زیر را به ازای هر y, x و z متعلق به A و λ متعلق به Φ دارا می باشد:

I. $x(yz) = (xy)z$

II. $(x+y)z = xz + yz, \;\; x(y+z) = xy + xz$

III. $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$

ملاحظه ۱-۵-۲. در این بخش منظور از میدان Φ، میدان $\mathbb{C}$ و یا $\mathbb{R}$ می باشد. اگر جبر روی $\mathbb{C}$ تعریف شده باشد، آن جبر را جبر مختلط می گوییم و اگر روی $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد آن جبر را جبر حقیقی می گوییم.

تعریف ۱-۵-۳. تبدیل خطی Tرا روی جبر A گوییم دارای خاصیت ضربی است، هرگاه:

$$\forall x, y \in A \;\; T(xy) = T(x)T(y).$$

---
[۴] Banach

تعریف ۱-۵-۴. جبر A را جابه جایی گوییم هرگاه

$$\forall x,y\in A \quad xy=yx.$$

تعریف ۱-۵-۵. اگر A یک جبر باشد، زیر مجموعه ی B از جبر A را یک زیر جبر از A گوییم، هرگاه نسبت به عمل ضرب ، جمع و ضرب اسکالر تشکیل جبر دهد.

تعریف ۱-۵-۶. فرض کنید K یک زیر مجموعه از جبر A باشد، کوچکترین زیر جبر از A که شامل K باشد را زیر جبر تولید شده توسط K می نامیم.

تعریف ۱-۵-۷. نرم ρ روی جبر A را یک نرم جبری می گوییم، هرگاه

$$\forall x,y\in A \quad \rho(xy)\le\rho(x)\rho(y)$$

در این صورت دوتایی (A,ρ) را یک جبر نرم دار می نامیم.

تعریف ۱-۵-۸. فضای نرم دار X را باناخ گوییم، هرگاه متر تعریف شده توسط نرم، آن را به یک فضای متری کامل تبدیل کند.

تعریف ۱-۵-۹. اگر (A,ρ) یک جبر نرم دار باشد در این صورت جبر A را یک جبر نرم دار کامل یا یک جبر باناخ گوییم، هرگاه فضای برداری A با نرم ρ باناخ باشد.

تعریف ۱-۵-۱۰. جبر A را گوییم دارای عنصر همانی است هرگاه عنصری مانند e متعلق به A وجود داشته باشد به طوری که $e\neq 0$ و به ازای هر a متعلق به A، $a=ea=ae$. جبر A را یک دار گوییم، هرگاه دارای عنصر همانی باشد.

تعریف ۱-۵-۱۱. اگر A جبر یک دار باشد و x متعلق به A، در این صورت گوییم x از راست معکوس پذیر است اگر یک y متعلق به A وجود داشته باشد به طوری که $xy=e$ همچنین گوییم x از چپ معکوس پذیر است هرگاه یک z متعلق به A وجود داشته باشد به طوری که $zx=e$. حال گوییم x معکوس پذیر است اگر هم از چپ و هم از راست معکوس پذیر باشد. یعنی یک a متعلق به A وجود دارد به طوریکه $xa=ax=e$.

تعریف ۱-۵-۱۲. اگر A یک جبر یک دار باشد، مجموعه همه ی عناصر معکوس پذیر A را با $Inv(A)$ نشان می دهیم و مجموعه ی عناصر معکوس ناپذیر A را با $Sing(A)$ نشان می دهیم، لذا خواهیم داشت

$$Sing(A)=A\setminus Inv(A).$$

از این به بعد عضو همانی A را با 1_A یا ۱ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۵-۱۳. فرض کنید A یک جبر باشد، ضرب کواسی در A به صورت زیر تعریف می شود:

$$\forall x, y \in A \quad xoy = x + y - xy.$$

ملاحظه ۱-۵-۱۴. به راحتی می توان دید که به ازای هر عنصر x متعلق به A داریم $xo\,0 = 0\,ox = x$ به عبارتی در ضرب کواسی عنصر صفر یک عنصر همانی برای این ضرب روی جبر A است.

تعریف ۱-۵-۱۵. اگر A جبر باشد و x متعلق به A، در این صورت گوییم x از راست کواسی پذیر است اگر یک y متعلق به A وجود داشته باشد به صوری که $xoy = 0$. همچنین گوییم x از چپ کواسی معکوس پذیر است هرگاه یک z متعلق به A وجود داشته باشد به طوری که $zox = 0$. حال گوییم x کواسی معکوس پذیر است اگر هم از چپ و هم از راست کواسی معکوس پذیر باشد. یعنی یک a متعلق به A وجود دارد به طوریکه $aox = xoa = 0$

تعریف ۱-۵-۱۶. اگر A یک جبر باشد، مجموعه ی همه عناصر کواسی معکوس پذیر A را با $q - Inv(A)$ نشان می دهیم و همچنین مجموعه ی عناصر کواسی معکوس ناپذیر A را با $q - Sing(A)$ نشان می دهیم و داریم:

$$q - Sing(A) = A \backslash q - Inv(A).$$

تعریف ۱-۵-۱۷. فرض کنید a عضوی از جبر مختلط A باشد، در این صورت طیف a را با $SP_A(a)$ یا $SP_A(A, a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

I. اگر A یک دار باشد $SP_A(a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda.1 - a \in sing(A)\right\}$

II. اگر A یکدار نباشد. $SP_A(a) = \{0\} \cup \left\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^{-1}.a \in q - sing(A)\right\}$

تعریف ۱-۵-۱۸. اگر A یک جبر و M یک فضای برداری روی میدان Φ باشد در این صورت M یک $A-$ مدول چپ است هرگاه نگاشت $\times: A \times M \to M$ با ضابطه ی $\times(a, m) = a.m$ در شرایط زیر به ازای هر a و b متعلق به A، α و β متعلق به Φ و m متعلق به M، صدق کند:

I. $(\alpha a + \beta b).m = \alpha a.m + \beta b.m$

II. $a(\alpha m + \beta n) = \alpha a.m + \beta a.n$

III. $a.(b.m) = (a.b).m$

همچنین M یک A– مدول راست است هرگاه نگاشت $\times: A \times M \to M$ با ضابطه $\times(a,m) = m.a$ در شرایط زیر صدق کند:

I. $m.(\alpha a + \beta b) = \alpha m.a + \beta m.b$

II. $(\alpha m + \beta n).a = \alpha m.a + \beta n.a$

III. $(m.a).b = m.(a.b)$

ملاحظه ۱–۵–۱۹. اگر جبر A یک دار باشد و M یک A– مدول چپ باشد آنگاه همواره $1_A.m = m$ برقرار نمی باشد. به همین خاطر اگر $1_A.m = m$ در این صورت گوییم M یک A– مدول چپ یکه است.

تعریف ۱–۵–۲۰. اگر A یک جبر و M فضای برداری باشد در این صورت گوییم M یک A– مدول دو طرفه است اگر و تنها اگر M یک A– مدول چپ و راست باشد و همچنین در شرط زیر صدق کند:

$$\forall a,b \in A, \forall m \in M \quad (a.m).b = a.(m.b).$$

فصل دوم :

جبرهای توپولوژیکی بنیادی

۲-۱. جبر توپولوژیکی بنیادی

تعریف ۲-۱-۱. جبر A روی میدان Φ همراه با یک توپولوژی را جبر توپولوژیکی گوییم هرگاه به همراه آن توپولوژیکی یک فضای برداری توپولوژیکی باشد و عمل ضرب جبری تحت آن توپولوژی پیوسته باشد.

ملاحظه ۲-۱-۲. در این فصل نیز منظور از میدان Φ همان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ می باشد در غیر اینصورت نام آن میدان بیان خواهد شد.

مثال ۲-۱-۳. جبر نرم دار A با توپولوژی نرم، یک جبر توپولوژی می باشد.

تعریف ۲-۱-۴. فرض کنیدA یک فضای برداری توپولوژیکی باشد در این صورت A یک فضای برداری توپولوژیکی بنیادی است اگر $b > ۱$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر دنباله (x_n) در A، همگرایی $b^n\left(x_n - x_{n-۱}\right)$ به صفر، کوشی بودن (x_n) را نتیجه می دهد.

تعریف ۲-۱-۵. جبر توپولوژیکی A بنیادی است هرگاه فضای برداری زمینه ی آن بنیادی باشد.

قضیه ۲-۱-۶. فرض کنید A یک فضای برداری توپولوژیکی بنیادی باشد آنگاه برای هر $c > ۱$ و هر دنباله (x_n) در A، همگرایی $c^n\left(x_n - x_{n-۱}\right)$ به صفر، کوشی بودن (x_n) را نتیجه می دهد.

برهان. بنا به تعریف فضای توپولوژیکی بنیادی، می دانیم که یک $c > ۱$ موجود است که به ازای هر دنباله ی (x_n) در A که $c^n(x_n - x_{n-1})$ به صفر میل کند، دنباله ی (x_n) کوشی می باشد. حال ادعا می کنیم که هر $c > ۱$ نیز در شرط فوق صدق می کند. برای اثبات این مدعا به روش زیر عمل میکنیم، می دانیم که یک k متعلق به $\mathbb{N}$ موجود است که $c^{۲^{\mathrm{k}}} > b$. حال به راحتی می توان دید که این شرط برای $c^{۲^{\mathrm{k}}}$ برقرار است. دنباله ی دلخواه (x_n) را در A در نظر می گیریم به طوریکه

$$(c^{۲^{k}})^n(x_n - x_{n-۱}) \to ۰ .$$

می دانیم

$$b^n\left(x_n - x_{n-1}\right) = \left(\frac{b}{c^{2^k}}\right)^n \left(c^{2^k}\right)^n \left(x_n - x_{n-1}\right).$$

از طرفی

$$\left(\frac{b}{c^{2^k}}\right)^n \to 0, \left(c^{2^k}\right)^n \left(x_n - x_{n-1}\right) \to 0.$$

از پیوستگی عمل ضرب اسکالر می توان نتیجه گرفت که

$$b^n\left(x_n - x_{n-1}\right) \to 0.$$

حال چون فضای A بنیادی است، بنابراین دنباله ی (x_n) کوشی می باشد. حال اثبات می کنیم که این شرط برای $c^{2^{k-1}}$ نیز برقرار می باشد.

دنباله دلخواه (x_n) در A رادر نظر می گیریم، به طوری که

$$\left(c^{2^{k-1}}\right)^n \left(x_n - x_{n-1}\right) \to 0.$$

به راحتی می توان دید

$$\left(c^{2^{k-1}}\right)^{2n} \left(x_{2n} - x_{2n-1}\right) \to 0.$$

حال چون

$$\left(c^{2^{k-1}}\right)^{2n-1} \left(x_{2n-1} - x_{2n-2}\right) \to 0.$$