بسم‌الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده ریاضی

مشتقات ناپیوسته از جبرهای سریهای توانی

توسط

سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی

زیر نظر

خانم دکتر قدسیه وکیلی

پایان نامه

بهمن ماه ۱۳۶۹

مشتقات ناپیوسته از جبرهای سریهای توانی

نگارش

سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی

رساله کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

دانشکده ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

جلسه دفاعیه از این رساله در تاریخ ۲۸ بهمن ۱۳۶۹ در دانشکده ریاضی با شرکت :

استاد راهنما : خانم دکتر قدسیه وکیلی استادیار دانشگاه صنعتی اصفهان

استاد مشاور : آقای دکتر احمد حقانی استاد دانشگاه صنعتی اصفهان

استاد ممتحن : آقای دکتر طاهر قاسمی هنری دانشیار دانشگاه تربیت معلم

تشکیل گردید . این رساله در تاریخ فوق الذکر به تصویب نهایی رسید .

سپاسگزاری

بدینوسیله از اساتید گرامی خانم دکتر قدسیه وکیلی وآقای دکتراحمد حقانی که در طول تحصیلات دانشگاهیم وهمچنین درمدت تکمیل این رساله این حقیر را ازالطاف بی‌دریغ خویش محروم نساخته‌اند ومرادراین مرحله گام به گام هدایت کرده‌اند ، سپاس فراوان دارم.

همچنین از استاد محترم آقای دکتر طاهر قاسمی که این پایان نامه را مطالعه نموده‌اند وبادقت نظر مراازتذکرات سودمند خود بهره مند ساختند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی

تقدیم به :

پـــــــدرم

و

مـــــادرم

فهرست مطالب

چکیــــده

مشتقات ناپیوسته ازجبرهای سریهای توانی

این پایان نامه براساس مقاله‌ای تحت عنوان

" DISCONTINUOUS DERIVATIONS FROM ALGEBRAS OF POWER SERIES "

تهیه شده که توسط DALES و BADE در سال ۱۹۸۹ ارائه شده است . فرض کنیم A جبرباناخ جابجائی باشد . در سالهای اخیرتعدادی ازمقاله ها مسئله* دادن شرایط لازم وکافی روی A برای‌اینکه همه مشتقات از A بداخل هر A-مدول باناخ بطور خودکار پیوسته باشند رامطالعه کرده‌اند . برای‌مثال ، فرض کنیم A جبر باناخ جدائی پذیر جابجائی باعنصر همانی باشد،و فرض کنیم:

i) به ازای هرایده‌آل ماکزیمال M از A ، M^2 همبعدی متناهی در M دارد ؛

ii) A هیچ ایده‌آل اول بسته‌ای ازهمبعدی نامتناهی در A ندارد .

آنگاه هرمشتق از A بداخل یک A-مدول باناخ پیوسته است [۳، ۲—۴، ۹، ۳—۱۰] شرط (i)برای‌این‌نتیجه لازم است :اگر (i) صادق نباشد ،آنگاه مشتقات نقطه‌ای ناپیوسته از A وجود دارند . همچنین شرط (ii) زائد نیست [۸] ،امانمیدانیم‌که شرط (ii) برای این نتیجه لازم است یانه .

در اینجا جبرهای باناخ وتوپولوژیکی معمولی راکه در شرط (ii) صادق نیستند در نظر می‌گیریم: آنها زیرجبرهائی از $\mathbb{C}[[X]]$ ، جبرهمه سریهای توانی صوری ازیک متغیره‌هستند ،و $\{0\}$ ایده‌آل اول بسته ازهمبعدی نامتناهی است.

تاکنون تنهاروش‌استفاده شده برای ساختن مشتقات ناپیوسته ازیک جبر باناخ جابجائی A بداخل A-مدول باناخ M که درشرط (i) صدق کند این بوده که لزوما" M باید

یک زیرمدول A- بخش پذیر بی تاب ناصفر داشته باشد . در این مقاله ثابت خواهیم کرد (در قضیه ۴-۱۴) که ، برای یک جبر باناخ " عادی " ازسریهای توانی A و یک A- مدول باناخ بی تاب M ، یک مشتق ناپیوسته از A به داخل M وجود دارد ، اگر و تنها اگر M شامل یک زیرمدول A- بخش پذیر ناصفر باشد .

همچنین یک نوع ازمشتقات ناپیوسته اززیرجبرهای $\mathbb{C}[[X]]$ ارائه خواهیم داد . در فصل ۲ ، بعضی ازاصطلاحات ونتایج شناخته شده را بازگو خواهیم نمود . در فصل ۳ ، نشان خواهیم داد که برخی ازجبرهای باناخ موضعی ازسریهای توانی لزوماً" مشتقات نقطه ای ناپیوسته دارند ، ودر فصل ۴ ، نقش بخش پذیری مدول ها راد رساختمان مشتقات نا پیوسته بررسی خواهیم نمود . بالاخره در فصل ۵ ، یک مشتق ناپیوسته از تمام جبر $\mathbb{C}[[X]]$ بداخل مدول دوگان آن ارائه خواهیم نمود .

فصل اول

یـاد آوری

منظورکلی ماد راین فصل یاد آوری بعضی تعاریف واثبات چند لم وقضیـــــه و یاد آوری چند مثال می باشد که د رفصول بعد مورد استفاده قرار میگیرند .

۱ــ۱ . **تعریف** . فرض کنیم X یک فضای برد اری توپولوژیکی باتوپولوژی T باشد ،

i) یک **پایه موضعی** ازفضای برد اری توپولوژیکی X عبارتست ازیک د ستـــــه B از همسایگی‌های صفر بطوریکه هرهمسایگی ازصفر شامل یک عنصر B باشد .

ii) مجموعه $C \subset X$ **محدب** نامیده میشود اگر

$$tC + (1-t)\, C \subset C \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

iii) فضای X **محدب موضعی** نامیده میشود هرگاه د ارای یک پایه موضعی باعناصر محدب باشد .

iv) یک متریک d روی فضای برد اری X **پایا** نامیده می‌شود اگربه‌ازای هر $x,y,z \in X$

$$d(x+z\ ,\ y+z) = d(x,y)$$

v) فضای X یک **F- فضا** نامیده می‌شود اگر توپولوژی آن (T) بوسیله یک متریک پایـــای کامل بد ست آمده باشد .

vi) فضای X یک فضای **فرشه** نامیده میشود اگر یک F- فضای محدب موضعی باشد .

۲ــ۱ . **تعریف** . فرض‌کنیم A یک جبر باشد . یک **نیم نرم** جبری‌روی جبر A نگاشت $\|\cdot\| : A \longrightarrow R$ میباشد بطوریکه

i) $\|a\| \geq 0 \qquad (a\in A)$

ii) $\|a+b\| \leq \|a\|+\|b\| \qquad (a,b\in A)$

iii) $\|\alpha a\| = |\alpha|\,\|a\| \qquad (\alpha\in\mathbb{C}, a\in A)$

iv) $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\| \qquad (a,b\in A)$

۳ـ۱ . قضیه . فرض کنیم P خانواده‌ای جداساز از نیم نرمها روی فضای برداری X باشد . به هر p متعلق به P وهرعدد صحیح مثبت n ، مجموعه $V(p,n)=\left\{x : p(x) < \frac{1}{n}\right\}$ رااختصاص میدهیم . فرض کنیم B دسته همه اشتراکهای متناهی ازمجموعه‌های $V(p,n)$ باشد . آنگاه B یک پایه موضعی متعادل محدب برای یک توپولوژی مانند T روی X است بطوریکه X رابه یک فضای محدب موضعی تبدیل می‌کند بطوریکه

a) هر $p\in P$ پیوسته است ، و

b) یک مجموعه $E\subset X$ کراندار است اگر وتنها اگر هر $p\in P$ روی E کراندار باشد .

برهان . [۱۷ ، قضیه ۳۷ـ۱]

۴ـ۱ . قضیه . اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی بایک پایه موضعی شمارش‌پذیر باشد ، آنگاه یک متریک d روی X وجود دارد بطوریکه

a) d با توپولوژی X سازگار است

b) گویهای باز به مرکز 0 متعادل هستند ، و

c) d پایااست ، یعنی به ازای هر $x, y, z\in X$

$$d(x+z,y+z) = d(x,y)$$

برهان . [۱۷ ، قضیه ۲۴ـ۱]

۵ـ۱ . مثال . فرض کنیم $\overline{\Delta}$ قرص واحد بسته باشد ، و

$$A(\overline{\Delta}) = \left\{ f : \text{روی } \overline{\Delta} \text{ پیوسته ودر } \Delta \text{ تحلیلی است } f \right\}$$

و

$$H^{\infty}(\triangle)=\left\{f: \|f\| = \sup |f(x)|<\infty \text{ و } \text{ است } \text{ تحلیلی } \triangle \text{ روی } f\right\}$$

بسادگی دیده میشود که ، $H^{\infty}(\triangle)$, $A(\overline{\triangle})$ تحت عملهای نقطه به نقطه جبر هستند وبانرم $\|.\|$ تشکیل یک جبر باناخ میدهند .

۱ــ۶ . **تعریف** . فرض کنیم A,B دو جبر باشند . نگاشت خطی $\theta : A \longrightarrow B$ را هومومورفیسم نامیم اگر بازای هر $a,b \in A$:

$$\theta(ab) = \theta(a)\ \theta(b)$$

۱ــ۷ . **تعریف** . فرض کنیم A یک جبر باناخ مختلط باشد . یک‌مشخصه روی A یک تابعک خطی غیر صفر ϕ روی A است بطوریکه

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \qquad (a,b\ \ A)$$

مجموعه همه مشخصه ها روی A **فضای مشخصه** A نامیده میشود وبوسیله ϕ_A نشان داده می شود .

۱ــ۸ . **تعریف** . فرض کنیم A یک جبر و I یک ایده آل از A باشد . اگر $u \in A$ وجود داشته باشد بطوریکه $A(1-u) \subset I$ و $(1-u)A \subset I$ که درآن

$$A(1-u) = \left\{a-au : a\in A\right\},\ (1-u)A = \left\{a-ua : a \in A\right\}$$

دراینصورت ، I یک ایده‌آل مدولار از A نامیده میشود .

۱ــ۹ . **تعریف** . اگر A یک جبر باناخ باعضویکه 1 باشد ، و $a \in A$ ، طیف a که با $\sigma(a)$ نشان داده میشود بصورت زیر تعریف می شود

$$\sigma(a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ معکوس پذیر نیست } a-\lambda 1\right\}$$

مجموعه حلال a بصورت $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ تعریف می شود .

شعاع طیفی a که با $r(a)$ نشان داده میشود بصورت زیر تعریف می شود .

$$r(a) = \sup \left\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(a) \right\}$$

۱۰ــ۱ . قضیه . اگر A یک جبر با ناخ باعضویکه باشد ،و $a \in A$ ، آنگاه $\lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ وجود دارد و $r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

برهان . [۲۰ ، قضیه A ، صفحه ۳۱۲]

۱۱ــ۱ . تعریف . فرض کنیم A یک جبرباشد ،و $a,b \in A$. **شبه ــ ضرب** a و b که به $a \circ b$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌شود .

$$a \circ b = a+b-ab$$

عنصر $a \in A$ را **شبه ــ معکوس‌پذیر** نامیم هرگاه $b \in A$ وجود داشته باشد بطوریکه $a \circ b = b \circ a = 0$. مجموعه عناصر شبه معکوس پذیر A به q-Inv A نشان داده میشود. اگر تمام اعضای یک ایده آل از A ، شبه ــ معکوس پذیر باشند ،آن ایده آل را ایده‌آل شبه ــ معکوس پذیر می‌نامیم .

۱۲ــ۱ . تعریف . فرض کنیم A یک جبر باشد . **رادیکال** A که به rad A نشان داده میشود عبارتست از اشتراک تمام ایده‌آلهای چپ مدولار ماکزیمال A .

۱۳ــ۱ . **لم** . فرض کنیم A یک جبر باشد . دراینصورت ،

i) rad A یک ایده‌آل چپ شبه ــ معکوس پذیر وشامل هرایده‌آل چپ شبه ــ معکوس‌پذیر از A است .

ii) $$\mathrm{rad}\, A = \left\{ a \in A : Aa \subset \text{q-Inv } A \right\}$$

برهان . [۱۱ ، ۵ــ۴ صفحه ۱۹۵]

i) فرض کنیم $z \in \mathrm{rad}\, A$ یک عنصر شبه ــ معکوس‌پذیر نباشد . آنگاه $A(1-z) \neq A$ بنابراین ،این ایده آل چپ رامیتوان دریک ایده آل ماکزیمال مانند I قــــرار داد .

چون $\operatorname{rad} A$ اشتراک تمام ایده‌آلهای چپ مدولار ماکزیمال A است. پس $z \in I$. اما $1-z \in A(1-z) \subset I$. بنابراین $1=1-z+z \in I$ که متناقض با $I \subsetneq A$ است. این تناقض نشان میدهد که هر $z \in \operatorname{rad} A$ یک عنصر شبه ــ معکوس‌پذیر است. یعنی $\operatorname{rad} A$ یک ایده‌آل شبه ــ معکوس‌پذیر است. اکنون فرض کنیم Z یک ایده‌آل شبه ــ معکوس‌پذیر از A باشد. اگر $Z \not\subset \operatorname{rad} A$، آنگاه یک ایده‌آل ماکزیمال مانند I وجود دارد بطوریکه $Z \not\subset I$ پس $I+Z \supsetneq I$. بنابراین $I+Z=A$. بنابراین، به ازای عنصر $b \in I$ و $z \in Z$ داریم: $1=b+z$ و $b \in I$ و $1=(1-z)^{-1} b \in I$ که متناقض با $I \subsetneq A$ است. بدین ترتیب $Z \subset \operatorname{rad} A$ و قسمت (i) ثابت شد.

ii) اگر $z \in \operatorname{rad} A$، آنگاه بازای هر $a \in A$، $az \in \operatorname{rad} A$. بنابراین، az شبه ــ معکوس‌پذیر است. بعکس فرض کنیم z در این شرط صدق کند آنگاه Az یک ایده‌آل شبه ــ معکوس‌پذیر است، وبنابر i) $Az \subset \operatorname{rad} A$ و $z \in \operatorname{rad} A$.

۱۴ــ۱ . **قضیه** . فرض کنیم A یک جبر باناخ باعنصریکه باشد، و $a \in A$ بطوریکه $r(a)<1$. آنگاه عنصر $1-a$ معکوس‌پذیر است، و $(1-a)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty} a^n$

برهان . η را طوری انتخاب می‌کنیم که $r(a)<\eta<1$. چون $r(a)=\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ پس، به ازای هر n به اندازه کافی بزرگ $\|a^n\|<\eta^n$ وبنابراین، سری $\|1\|+\sum_{n=1}^{\infty}\|a^n\|$ همگراست. چون A فضای باناخ است. پس، سری $1+\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ همگرا به عضوی مانند s است. فرض کنیم $s_n=1+\dots+a^{n-1}$. آنگاه وقتی $n\to\infty$، $s_n \to s$ و $\|a^n\| \to 0$ و داریم:

$$(1-a)s_n = s_n(1-a) = 1-a^n$$

اکنون ازپیوستگی ضرب نتیجه می شود $(1-a)s = s(1-a) = 1$.

همچنین مشابه به لم ۱۳ــ۱ . میتوان لم زیر را ثابت نمود .

۱۵ــ۱ . **لم** . فرض‌کنیم A یک جبر باشد . در اینصورت،

$$\operatorname{rad} A = \left\{ a \in A : aA \subset q\text{-}\operatorname{Inv} A \right\}$$

۱۶ــ۱ . لم. فرض کنیم a یک عنصر از جبر باناخ A باشد بطوریکه $r(a) < 1$. آنگاه a شبه ــ معکوس پذیر است ، و $a^0 = -\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ (a^0 شبه ــ معکوس a است)

برهان . [۷ ، قضیه ۷ــ۳]

۱۷ــ۱ . لم. فرض کنیم A یک جبر و I یک ایده آل از A باشد . د راینصورت ،

$$\text{rad } I = I \cap (\text{rad } A)$$

برهان . فرض کنیم $a \in I \cap (\text{rad } A)$ وانتخاب کنیم $b \in A$ بطوریکه $b \circ a = 0$. آنگاه $b = ba - b \in I$. بنابراین ، $a \in q\text{-}\operatorname{Inv} I$. بنابر (i) ۱۳ــ۱ ، $I \cap \text{rad } A \subset \text{rad } I$.

بعکس فرض کنیم $a \in \text{rad } I$. آنگاه $aA \subset I$ و $aAI \subset \text{rad } I \subset q\text{-}\operatorname{Inv} I$. بنابر (ii) ۱۳ــ۱ ، $aA \subset \text{rad } I$. بنابراین ، $aA \subset q\text{-}\operatorname{Inv} A$. بنابر ۱۵ــ۱ ، $a \in \text{rad } A$. بدین ترتیب

$$\text{rad } I \subset I \cap \text{rad } A$$

۱۸ــ۱ . تعریف . جبر A جبر رادیکال نامیده میشود اگر $\text{rad } A = A$ ، وجبر نیم ساده نامیده می شود اگر $\text{rad } A = \{0\}$. اکنون به تعریف مشتق وبیان بعضی ازقضایای مقدماتی ومعروف د راینمورد می پردازیم .

۱۹ــ۱ . تعریف . یک **مشتق** روی جبر A یک نگاشت خطی D از A به A میباشد بطوریکه

$$D(ab) = a(Db) + (Da)b \qquad (a, b \in A)$$

۲۰ــ۱ . مثال . فرض کنیم $c \in A$ و S_c نگاشتی از A به A باشد که بصورت زیر تعریف می شود :

$$S_c(a) = ac - ca \qquad (a \in A)$$

د راینصورت S_c یک مشتق روی A است که به مشتق داخلی موسوم است . اگر A یک جبر نرمدار باشد آنگاه هرمشتق داخلی S_c پیوسته است و

$$\| \delta_c \| \leqslant 2 \| c \|$$

همچنین A جابجائی است اگر وفقط اگر تنها مشتق داخلی نگاشت صفر باشد .

۲۱ــ۱ - **مثال** . فرض کنیم A یک جبر باعنصر یکه باشد وفرض کنیم a یک عنصر A باشد که چبری نیست . یعنی اینکه $1, a, a^2, \ldots$ بطورخطی مستقل هستند . همچنین فرض کنیم B زیر جبرA تولید شده بوسیله‌$1, a$ باشد . اکنون نگاشت D از B به B رابصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D(s_0+s_1a+\ldots+s_na^n) = s_1+2s_2a+\ldots+ns_na^{n-1} \qquad (s_0,\ldots,s_n \in \mathbb{C})$$

دراینصورت D یک مشتق روی B است که داخلی نیست . زیرا ، B جابجائی است و $D \neq 0$.

اکنون چند خاصیت جبری مقدماتی یک مشتق رابیان میکنیم .

۲۲ــ۱ . **قضیه** . فرض کنیم D یک مشتق روی جبر A باشد . دراینصورت عبارات زیر برقراراست (باقرارداد $D^0 = I$)

$$\text{i)} \quad D^n(ab)=\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (D^{n-r}a)(D^r b) \qquad (n\in N, a,b\in A)$$

$$\text{ii)} \quad D(a^n) = na^{n-1}Da \iff aDa = (Da)a$$

برهان . [۷ ، قضیه ۴ صفحه ۸۶]

۲۳ــ۱ . قضیه . فرض کنیم D یک مشتق روی جبر A باشد وفرض کنیم e یک عضوخود توان ($e^2 = e$) در A باشد . دراینصورت روابط زیر برقرار است :

i) $e(De)\, e = 0$

ii) اگر $eDe = (De)e$ آنگاه $De = 0$

iii) اگر A دارای عضویکه باشد آنگاه $D1 = 0$

برهان . [۷ ، قضیه ۵ صفحه ۸۷]

۲۴—۱ . قضیه . (سینگر و ورمر) . فرض کنیم A یک جبر باناخ مختلط جابجائی و D یک مشتق پیوسته روی A باشد دراینصورت $Da \in \text{rad}\, A$ به ازای هر $a \in A$.

برهان . [۷ ، قضیه ۱۶ صفحه ۹۲]

ازقضیه ۲۴—۱ نتیجه می‌شود که اگر A نیم ــ ساده باشد آنگاه تنها مشتق پیوسته روی A مشتق صفراست .

۲۵—۱ . قضیه . (جانسون) . فرض کنیم A جبر جابجائی نیم ــ ساده باشد . در اینصورت نگاشت صفر تنها مشتق روی A است .

برهان . [۷ ، ۲۱—۱۸]

۲۶—۱ . لم . اگر فضای باناخ A ، یک پایه شمارش‌پذیر مانند (x_n) داشته باشد ، آنگاه جدائی‌پذیراست .

برهان . مجموعه همه ترکیبات خطی $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ بطوریکه r_i ها اعداد گویا هستند ($i = 1,2,\ldots$)رادرنظر می‌گیریم . واضح است که چنین مجموعه‌ای یک مجموعه شمارش‌پذیرچگال در A است . بدین ترتیب A جدائی‌پذیراست.

۲۷—۱ . قضیه . فرض کنیم $X_1,\ldots,X_n$, Y فضاهای باناخ جدائی‌پذیر ، $T: \prod_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow Y$ نگاشت چندخطی و Z زیرفضای Y باشد بطوریکه $Z \subseteq sp(Rge(T))$.

آنگاه یک ثابت k وعدد صحیح m وجود دارد بطوریکه اگر $z \in Z$ ، آنگاه $x_{ij} \in X_i$ وجود دارند بطوریکه $1 \leqslant i \leqslant n$ و $1 \leqslant j \leqslant m$ و

a) $z = \sum_{j=1}^{m} T(x_{1j},\ldots,x_{nj})$

b) $\sum_{j=1}^{m} \|x_{1j}\|\cdots\|x_{nj}\| \leqslant k\|z\|$

برهان. [۱۵ ، قضیه ۳—۱]