بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه‌ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

گراف‌های روی مجموعه‌های مرتب جزیی

استاد راهنما

دکتر کاظم خشیارمنش

استاد مشاور

دکتر مژگان افخمی گلی

نگارنده

زهرا براتی سده

۱۳۹۱

بسمه تعالی

مشخصات رساله تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: گراف‌های روی مجموعه‌های مرتب جزیی

نام نویسنده: زهرا براتی سده

استاد راهنما: دکتر کاظم خشیارمنش

استاد مشاور: دکتر مژگان افخمی گلی

دانشکده: علوم ریاضی گروه: ریاضی محض رشته تحصیلی: ریاضی محض

تاریخ تصویب: ۱۳۹۰/۰۶/۲۳ تاریخ دفاع: ۱۳۹۱/۰۶/۲۸

مقطع تحصیلی: دکتری تعداد صفحات: ۸۷

چکیده رساله : در سال‌های اخیر گراف‌های بسیاری به ساختارهای جبری مثل گروه، حلقه، نیم‌گروه و مجموعه‌های مرتب جزیی نسبت داده شده‌اند. یکی از این گراف‌ها که اولین بار توسط بک در سال ۱۹۸۸ معرفی شد گراف مقسوم علیه صفر بود. در سال ۲۰۰۹، این مفهوم بر روی مجموعه‌های مرتب جزئی برده شد. از انواع دیگر و با سابقه‌ای طولانی در گراف های جبری، گراف های کیلی را می‌توان نام برد که توسط کیلی در سال ۱۸۷۸ به ساختار گروه نسبت داده شد. ساختار گراف کیلی برای نیم‌گروه‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین این مفهوم برای حلقه‌های متناهی با در نظر گرفتن مجموعه‌ی $S = U(R)$ در تعریف گراف کیلی، با عنوان گراف‌های کیلی یکانی برای حلقه های متناهی در سال ۲۰۰۹ معرفی شده است. از دیگر گراف‌های جبری، که برای ساختار حلقه تعریف شده اند، می‌توان از گراف تام و گراف یکه که برای ساختار حلقه‌ی جابه‌جایی تعریف شده است، نام برد. در این رساله از گراف مقسوم علیه صفر تعریف شده برای مجموعه مرتب جزیی توسط هالاس و جاکل، رأس صفر را حذف می‌کنیم و خواص آن را بررسی کرده و مسطح بودن این گراف را مطالعه می‌نماییم. همچنین گراف کیلی را برای مجموعه‌های مرتب جزیی تعریف کرده و به بررسی خواص گرافی آن می‌پردازیم، و نیز این گراف را در حالت‌های خاص برای مجموعه‌ی S مطالعه خواهیم کرد. در آخر، گراف‌های یکه و کلی را برای ساختار جبری مشبکه معرفی کرده و خواص گرافی آن را بررسی می‌نماییم.

واژگان کلیدی: مجموعه مرتب جزیی- مشبکه - گراف مقسوم علیه صفر- گراف کیلی- گراف مسطح

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان رساله : گراف‌های روی مجموعه‌های مرتب جزیی

اینجانب زهرا براتی سده دانشجوی دوره دکتری دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده رساله تحت راهنمایی دکتر کاظم خشیارمنش متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه فردوسی مشهد" و یا "Ferdowsi University of Mashhad" به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

فهرست مطالب

پیش گفتار ۳

۱ پیش نیازها ۷

۱.۱ مقدمات نظریه‌ی گراف ۷

۲.۱ مقدمات نظریه‌ی ترتیب ۱۲

۲ گراف مقسوم علیه صفر برای مجموعه‌های مرتب جزیی ۲۰

۱.۲ مقدمه ۲۰

۲.۲ خواص اساسی این گراف ۲۱

۳.۲ مسطح بودن گراف مقسوم علیه صفر $G^*(P)$ ۲۵

۳ گراف کیلی مجموعه‌های مرتب جزیی ۳۴

۱.۳ مقدمه ۳۴

۲.۳ قطر گراف کیلی $\mathrm{Cay}(P,S)$ ۳۶

۳.۳ کمر گراف کیلی $\mathrm{Cay}(P,S)$ ۴۳

۴.۳ حالات خاص ۴۷

۴ گراف $\Gamma_S(\mathcal{L})$ وابسته به ساختار جبری یک مشبکه ۵۱

۱.۴ مقدمه ۵۱

۲.۴ خواص اساسی گراف $\Gamma_S(\mathcal{L})$ ۵۲

۳.۴ خواص گراف $\Gamma_S(\mathcal{L})$ وقتی که S یک زیرمجموعه‌ی اشباع از مشبکه $\mathcal{L}$ است. ۵۶

۴.۴ مسطح بودن گراف $\Gamma_S(\mathcal{L})$ وقتی که S یک زیرمجموعه‌ی اشباع از مشبکه $\mathcal{L}$ است . . . ۵۹

مراجع ۷۳

نمایه ۷۶

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۴

پیش گفتار

در چند دهه‌ی اخیر در میان شاخه‌های ریاضی موضوعات بین رشته‌ای اهمیت زیادی یافته و سعی محققان بر آن است که مطالب مجرد ریاضی را با شاخه‌های کاربردی‌تر ریاضیات پیوند دهند. گرایش گراف‌های جبری یکی از این نوع گرایش‌های بین رشته‌ای است که سعی دارد پلی بین جبر و نظریه‌ی گراف ایجاد کنند. امروزه گراف یکی از ابزارهای بسیار مناسب برای تحقیق در زمینه‌های گوناگونی از ریاضیات کاربردی و علوم پایه و حتی در برخی از علوم انسانی نظیر علوم اجتماعی شده است. نتایج منتج از نظریه‌ی گراف دارای کاربردهای بسیاری در زمینه‌های محاسباتی و تجربی می‌باشد. استفاده از ابزارهای جبری برای مطالعه‌ی خواص یک گراف و یا به عکس، استفاده از خواص یک گراف برای بررسی خواص یک ساختار جبری یکی از مهمترین اهداف نظریه‌ی گراف‌های جبری است.

یکی از گراف‌های جبری که در چند دهه‌ی اخیر بر روی آن مقالات بسیاری نوشته شده است، گراف مقسوم علیه صفر [۱] است. این گراف برای اولین بار توسط بک [۲] در سال ۱۹۸۸ در [۱۵] معرفی شد. این گراف که برای حلقه‌های جابه‌جایی تعریف شده، یک گراف ساده است که مجموعه رئوس آن اعضای حلقه‌ی R می‌باشد و دو رأس متمایز x و y در این گراف به هم وصل می‌شوند هرگاه $x.y = ۰$. تعریف این گراف بعدها توسط اندرسون [۳] و لیوینگستون [۴] مورد بازبینی قرار گرفت، و این دو در [۱۱]، مجموعه‌ی رئوس گراف مقسوم علیه صفر تعریف شده توسط بک برای حلقه‌ی جابه‌جایی را به مجموعه‌ی $Z(R) \setminus \{۰\}$ تغییر دادند. بر روی گراف جدید مطالعات

[۱] zero-divisor graph [۲] Beck [۳] Anderson [۴] Livigston

فراوانی از سوی محققان انجام شد که از آن جمله می توان به [۶]، [۷]، [۱۰] و [۱۲] و [۳۴] اشاره کرد. در همین حین محققان دیگری بودند که علاقه‌مند بودند تعریف این گراف را به دیگر ساختارهای جبری بسط دهند. فرانک دمیر [۱] و لیزا دمیر [۲] در سال ۲۰۰۵ در [۱۹]، مفهوم گراف مقسوم علیه صفر را به روی ساختار جبری نیم‌گروه‌ها بردند. همچنین در سال ۲۰۰۹، هالاس [۳] و جاکل [۴] مفهوم گراف مقسوم علیه صفر را برای ساختار جبری مجموعه‌های مرتب جزیی که دارای کوچکترین عنصر ۰ بودند، تعریف کردند. در گراف تعریف شده توسط آنها که آن را با نماد $G(P)$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ی عناصر مجموعه‌ی مرتب جزیی P رئوس گراف را تشکیل می‌دهند و دو رأس متمایز x و y به هم وصل می‌شوند هرگاه $\{0\} = \{x, y\}^{\ell}$. از آنجا که در این گراف رأس ۰ به تمامی رئوس وصل است، لذا رأس جالب توجهی در ساختار گراف $G(P)$ به نظر نمی‌آید زیرا گراف $G(P)$ را به تظریف گراف ستاره تبدیل می‌کند. به همین خاطر در فصل دوم این رساله، گراف $G^*(P)$ را معرفی کنیم که در واقع زیرگرافی القایی از گراف $G(P)$ است که از حذف رأس ۰ از مجموعه‌ی رئوس گراف $G(P)$ حاصل می‌شود. در این فصل، خواص گراف $G^*(P)$ نظیر همبندی، قطر و کمر گراف را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. همچنین ساختار کلی گراف را تعیین می‌کنیم و با استفاده از آن، به طور کامل بررسی می‌کنیم که گراف $G^*(P)$ در چه صورتی مسطح می‌شود.

از دیگر گراف‌های جبری که سابقه‌ای طولانی در نظریه‌ی گراف‌های جبری دارد گراف کیلی[۵] است که برای اولین بار توسط آرتور کیلی [۶] در سال ۱۸۷۸ و در [۱۷] برای ساختار جبری گروه تعریف شد. هدف از تعریف این گراف بررسی خواص جبری یک گروه با استفاده از مجموعه‌های مولد آن بود. در طی سال‌ها مقالات زیادی در رابطه با این گراف و کاربردهای بسیار این گراف نوشته شده که از آن جمله می‌توان به [۱۸]، [۲۸]، [۳۰]، [۳۲]، [۳۳] و [۳۶] اشاره کرد. این گراف در [۸] با فرض $S = U(R)$ برای ساختار جبری حلقه‌های جابه‌جایی تعریف شد و گراف کیلی یکانی[۷] حلقه‌ی R نام گرفت. همچنین این گراف برای ساختار جبری نیم‌گروه‌ها هم تعریف شده و مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. از جمله مقالات مرتبط با گراف های کیلی روی نیم‌گروه‌ها

[۱]Frank DeMeyer [۲]Lisa DeMeyer [۳]Halaš [۴]Jukl [۵]Cayley graph [۶]Arthur Cayley [۷]unitary Cayley graph

می‌توان به [۲۹] و [۳۱] اشاره کرد. در فصل دوم این رساله مفهوم گراف کیلی را برای مجموعه‌های مرتب جزیی تعریف می‌کنیم. فرض کنید P یک مجموعه‌ی مرتب جزیی و S یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از P باشد. گراف کیلی مجموعه‌ی مرتب جزیی P نسبت به مجموعه‌ی S گرافی جهت‌دار با مجموعه‌ی رئوس P است و بین دو رأس متمایز x و y کمان (x,y) وجود دارد هرگاه عضویی مانند $s \in S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $y \in \{x,s\}^{\ell}$. از آنجا که غیرجهت‌دار شدن گراف کیلی گروه‌ها وابسته به بسته بودن مجموعه‌ی S نسبت به عضو معکوس می‌باشد، در گراف کیلی مجموعه‌های مرتب جزیی هرگز یال دو جهته‌ای پدید نخواهد آمد. بنابراین گراف کیلی غیرجهت‌دار کیلی مجموعه‌های مرتب جزیی را به صورت گرافی بر روی مجموعه‌ی رئوس P تعریف می‌کنیم که در آن دو رأس متمایز x و y مجاورند هرگاه عضویی مانند $s \in S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $y \in \{x,s\}^{\ell}$ یا $x \in \{y,s\}^{\ell}$. این گراف را با نماد $\mathrm{Cay}(P,S)$ نشان خواهیم داد. در فصل سوم این رساله، گراف $\mathrm{Cay}(P,S)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و خواصی مانند همبندی، قطر گراف، کمر گراف، درخت بودن گراف را بررسی می‌کنیم. همچنین در بخش چهارم این فصل، به مطالعه‌ی گراف کیلی مجموعه‌ی مرتب جزیی P با در نظر گرفتن حالات خاص برای مجموعه‌ی S می‌پردازیم و خواصی مانند عدد رنگی، عدد خوشه‌ای و عدد استقلال آن را بررسی می‌کنیم.

از دیگر گراف‌های جبری تعریف شده برای ساختار حلقه‌های جابه‌جایی می‌توان به گراف تام[۱] و گراف یکه[۲] اشاره کرد. این گراف‌ها به ترتیب در [۵] و [۱۳] معرفی شدند. فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد و مجموعه‌های $U(R)$ و $Z(R)$ به ترتیب مجموعه‌ی یکه‌ها و مقسوم علیه‌های حلقه‌ی R باشند. گراف تام حلقه‌ی R، گرافی ساده است که مجموعه رئوس آن عناصر حلقه‌ی R، و دو رأس متمایز x و y در این گراف مجاورند اگر و فقط اگر $x+y \in Z(R)$. همچنین گراف یکه، گرافی ساده است بر روی مجموعه R، که دو رأس x و y در این گراف مجاورند اگر و فقط اگر $x+y \in U(R)$. در [۱۴] گرافی به حلقه‌ی جابه‌جایی R نسبت داده شد که در واقع تعمیمی از دو گراف تام و یکه بود. فرض کنید S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی R باشد. در این صورت گراف تعریف شده در [۱۴]، که با نماد $\Gamma_S(R)$ نمایش داده شده است، گرافی است ساده بر روی

[۱] total graph [۲] unit graph

مجموعه رئوس R، که در آن دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و فقط اگر $x + y \in S$. در فصل چهارم این رساله، با تعریف مجموعه‌های بسته‌ی ضربی و مجموعه‌های بسته‌ی ضربی اشباع برای یک لاتیس، گراف معرفی شده در [۱۴] را به روی ساختار جبری لاتیس می‌بریم. و در این فصل از رساله، خواص این گراف را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. و در آخرین بخش فصل چهارم مسطح بودن گراف تعریف شده را مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد. مطالب این رساله از [۱]، [۲] و [۳] گردآوری شده است.

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل، سعی بر این است که مقدمات مورد نیاز مرتبط به رساله را بیان کنیم. این رساله به دو شاخه‌ی کلی ریاضی، نظریه‌ی گراف و نظریه‌ی ترتیب مرتبط است. سعی شده در هر بخش به اجمال به موضوع پرداخته شود.

۱.۱ مقدمات نظریه‌ی گراف

در این بخش هدف این است که تعاریف و قضایای مرتبط با نظریه‌ی گراف که در فصول بعدی به کار خواهند آمد را بیان کنیم. مطالب این بخش را می‌توان در هر کتاب با نام کلی نظریه‌ی گراف یافت. مطالب این فصل از [۱۶] و [۲۳] گردآوری شده است.

تعریف ۱.۱.۱. *گراف جهت‌دار*[۱] G *به صورت زوج* $(V(G), E(G))$ *تعریف می‌شود که در آن* $V(G)$ *یک مجموعه‌ی ناتهی موسوم به مجموعه‌ی رئوس*[۲] *است و مجموعه‌ی* $E(G)$ *خانواده‌ای شامل زوج‌های مرتب*

[۱] digraph [۲] verterx set

از عناصر $V(G)$ است، که به نام مجموعه‌ی کمان‌های گراف G شناخته می شود. هر عضو از مجموعه‌ی V را یک رأس[۱] از گراف G می‌نامیم و کمانی که عنصر اول آن u و عنصر دوم آن v می‌باشد را یک کمان[۲] از رأس u به v می‌نامیم.

در این رساله با گراف‌های غیرجهت‌دار سر و کار داریم. اما تعریف بالا به این خاطر آورده شده است که گراف‌های کیلی در حالت کلی گراف‌هایی جهت‌دار هستند. گراف‌های چندگانه (وجود چند یال بین دو رأس) نیز مورد بحث این رساله نیست. گراف‌های مورد بحث در این رساله تماماً گراف‌های ساده و بدون طوقه[۳] هستند. تعریف گراف ساده در زیر آورده شده است.

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید V یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. در این صورت یک گراف ساده یا به اختصار یک گراف[۴] مانند G زوج مرتب (V, E) از مجموعه‌هاست که در آن $E \subseteq V^{۲}$. هر عضو مجموعه‌ی V را یک رأس از گراف G و هر عضو مجموعه‌ی E را یک یال[۵] گراف G می‌گوییم.*

دقت کنید که در تعریف گراف ساده جهت در یال اهمیتی ندارد. می‌گوییم دو رأس u و v در گراف G همسایه یا مجاور[۶] هستند و آن را با نماد $u - v$ نمایش می‌دهیم، هرگاه مجموعه‌ی $\{u, v\}$ یک یال از گراف G باشد. تعداد رئوس گراف G را مرتبه گراف[۷] می‌گوییم و آن را با نماد $|G|$ نشان می‌دهیم. گراف G را متناهی می‌گوییم هرگاه $|G| < \infty$.

گراف G را گراف تهی[۸] و یا ناهمبند کلی[۹] می‌گوییم هرگاه $E = \emptyset$ باشد. همچنین اگر هر دو رأس گراف G با هم همسایه باشند، آنگاه می‌گوییم گراف G کامل[۱۰] است. گراف کامل بر روی n رأس را با نماد K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. *گراف $G' = (V', E')$ را زیرگراف[۱۱] گراف $G = (V, E)$ می‌گوییم هرگاه $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$.*

---

[۱]vertex [۲]arc [۳]loop [۴]graph [۵]edge [۶]adjacent [۷]order of a graph [۸]null graph [۹]totally disconnected [۱۰]complete [۱۱]subgraph

فرض کنید $H=(V(H),E(H))$ زیرگرافی از گراف $G=(V(G),E(G))$ باشد. در این صورت می‌گوییم H زیرگراف القایی[۱] از گراف G است، هر گاه هر یال گراف G مشمول در $V(H)$ متعلق به $E(H)$ باشد. زیر گراف H را یک زیرگراف فراگیر[۲] از گراف G می گوییم هرگاه $V(H)=V(G)$. یک خوشه[۳] از گراف G زیرگراف کاملی از آن است. یک خوشه را بیشین می‌گوییم هرگاه نتوان رأس دیگری به آن افزود. در این صورت عدد خوشه‌ای[۴] گراف G که آن را با نماد $\omega(G)$ نشان می‌دهیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\omega(G):=\max\{|W|;\ W \text{ یک خوشه‌ی بیشین از گراف } G \text{ است}\}.$$

یک مجموعه‌ی مستقل[۵] از گراف G زیرمجموعه‌ای از رئوس گراف G است که زیرگراف القایی بر روی آن یک زیرگراف تهی از گراف G می‌باشد. یک زیرمجموعه‌ی مستقل را بیشین می‌گوییم هرگاه نتوان رأس دیگری به آن افزود. عدد استقلال[۶] گراف G که آن را با نماد $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(G):=\max\{|A|;\ A \text{ یک زیرمجموعه‌ی مستقل بیشین از گراف } G \text{ است}\}.$$

تعریف ۴.۱.۱. *گراف $\bar{G}=(\bar{V},\bar{E})$ را مکمل[۷] گراف $G=(V,E)$ می‌گوییم هرگاه $\bar{V}=V$ و $\bar{E}=V^{2}\setminus E$.*

تعریف ۵.۱.۱. *دوگراف را یکریخت[۸] می‌گوییم هرگاه یک تناظر یک به یک بین رأس‌های آنها برقرار باشد به طوری که دو رأس در یک گراف به وسیله یالی به هم وصل می‌شوند اگر و فقط اگر درگراف دیگر، دو رأس متناظر با یالی به هم وصل باشند.*

فرض کنید v رأسی از گراف G باشد. درجه[۹] رأس v را که با نماد $\deg(v)$ نشان می‌دهیم برابر است با تعداد همسایه‌های رأس v در گراف G. همچنین مجموعه‌ی همسایه‌های رأس v در گراف G را با نماد $N_v(G)$ نشان می‌دهیم. رأس از درجه صفر را رأس منفرد[۱۰] یا رأس تنها گراف G می‌گوییم. گراف G را که درجه‌ی تمام رئوس آن برابر k است را یک گراف k-منظم می‌گوییم.

[۱]induced subgraph [۲]spaning subgraph [۳]clique [۴]clique number [۵]independent set
[۶]independence number [۷]complement [۸]isomorphic [۹]degree [۱۰]isolated

تعریف ۶.۱.۱. یک مسیر[۱] گرافی ناتهی مانند $P=(V,E)$ است که در آن $V=\{v_0,v_1,\ldots,v_k\}$ و $E=\{\{v_0,v_1\},\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_{k-1},v_k\}\}$، به طوری که تمامی رئوس متمایز هستند. معمولاً یک مسیر را به صورت دنباله ای طبیعی از رئوسش مانند $v_0v_1\ldots v_{n-1}v_n$ می نویسیم. در این رساله مسیری مانند P را با نماد $v_0-v_1-\ldots-v_{n-1}-v_n$ نشان می‌دهیم. تعداد یال‌های یک مسیر را طول آن می‌گوییم. طول کوتاهترین مسیر بین دو رأس متمایز v و u در گراف G را فاصله ی این دو رأس می‌گوییم و آن را با نماد $d(u,v)$ نمایش می‌دهیم. اگر چنین مسیری وجود نداشته باشد، فاصله‌ی این دو رأس را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم. قطر[۲] گراف G، که آن را با نماد $diam(G)$ نشان می‌دهیم، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$diam(G)=sup\{d(u,v);\ \text{دو رأس متمایز در گراف } G \text{ هستند } u \text{ و } v\}.$$

اگر سوپریمم مجموعه‌ی فوق موجود نباشد، آنگاه قطر گراف G را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم.

یک دور[۳] مسیری با حداقل سه رأس است که رئوس ابتدا و انتهای آن یکی می‌باشد. همانند مسیرها، در این رساله یک دور را هم به صورت دنباله‌ی طبیعی آن نمایش می‌دهیم. مثلاً، $v_1-v_2-\ldots-v_k-v_1$ یک دور به طول k می‌باشد. طول کوتاهترین دور در گراف G را کمر[۴] گراف G می‌گوییم و آن را با نماد $gr(G)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف G بدون دور باشد، آنگاه کمر G را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم.

گراف ناتهی G را همبند[۵] می‌گوییم هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن مسیری وجود داشته باشد. در غیر این صورت آن را ناهمبند[۶] می‌گوییم. اگر گراف G ناهمبند باشد، آنگاه بزرگترین زیرگراف G از لحاظ همبندی را مولفه‌ی همبندی[۷] گراف G می‌گوییم. گرافی که شامل هیچ دوری نیست را یک جنگل[۸] می‌گوییم. هر جنگل همبند را یک درخت[۹] می‌گوییم.

گراف G را تظریف[۱۰] گراف همبند و ساده H می‌گوییم هرگاه $V(H)=V(G)$ و به ازای هر دو رأس u

---

[۱] path [۲] diameter [۳] cycle [۴] girth [۵] connect [۶] disconnected [۷] connected component [۸] forest
[۹] tree [۱۰] refinement

و v از گراف G، مجاورت این دو رأس در گراف H ایجاب کند که این دو رأس در گراف G نیز مجاور باشند.

تعریف ۷.۱.۱. *عدد رنگی*[۱] *گراف G را که با نماد $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم، برابر است با کمترین تعداد رنگی که می‌توان به رئوس گراف G نسبت داد به طوری که هیچ دو رأس مجاور هم رنگ نباشند.*

تعریف ۸.۱.۱. *مجموعه‌ی غالب*[۲] *گراف G زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی رئوس گراف G است به طوری که هر رأس از گراف G که در این مجموعه واقع نشده باشد به رأسی در این مجموعه همسایه باشد. یک مجموعه‌ی غالب را کمین می‌گوییم هرگاه نتوان رأسی از آن حذف کرد به طوری‌که همچنان مجموعه‌ی غالب گراف G باشد. عدد غلبه‌ای*[۳] *گراف G را که با نماد $\lambda(G)$ نشان می‌دهیم، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\lambda(G) := \mathit{min}\{|S|; \text{ یک مجموعه‌ی غالب کمین از گراف } G \text{ است } S\}.$$

تعریف ۹.۱.۱. *گراف G را k-بخشی*[۴] *می‌گوییم هرگاه بتوان مجموعه رئوس آن را به k مجموعه‌ی مستقل افراز کرد. هرگاه هر رأس از گراف k-بخشی به تمامی رئوسی که در بخش مربوط به خودش قرار ندارند، مجاور باشد آن گراف را k-بخشی کامل*[۵] *می‌گوییم.*

فرض کنید G یک گراف متناهی k- بخشی کامل باشد و مجموعه رئوس آن اجتماع جدا ازهمی به شکل $V = \cup_{i=1}^{k} V_i$ باشد و به ازای هر $1 \leq i \leq k$ داشته باشیم $|V_i| = r_i$. در این صورت گراف G را با نماد $K_{r_1,r_2,\ldots,r_k}$ نشان می‌دهیم. گراف $K_{1,n}$ را یک گراف ستاره[۶] می‌گوییم.

در نظریه‌ی گراف اثبات شده است که هر گراف را می توان در فضای سه بعدی طوری رسم کرد که هیچ دو یال آن به جز در ابتدا و انتهایشان تقاطعی نداشته باشند. در این بخش مقدمات لازم برای بررسی امکان نشاندن یک گراف بر روی صفحه آورده شده است.

[۱]chromatic number [۲]dominating set [۳]dominating number [۴]k-partite [۵]complete k-partite [۶]star graph

تعریف ۱۰.۱.۱. *گراف مسطح شده گرافی است که در صفحه چنان رسم شده باشد که هیچ دو یال آن یکدیگر را به جز در رئوسی که از آنها می‌گذرند قطع نکنند. گراف مسطح[۱] گرافی است که با یک گراف مسطح شده یکریخت باشد.*

می‌گوییم گراف G زیرتقسیم[۲] گراف G' است هرگاه بتوان با حذف رئوس درجه‌ی دو از گراف G به گراف G' رسید. این مفهوم در نتیجه‌ی مهم زیر که موسوم به قضیه‌ی کوراتوفسکی[۳] است و شرط لازم و کافی برای مسطح بودن یک گراف را ارائه می‌کند، به کار می‌آید.

قضیه ۱۱.۱.۱. *یک گراف مسطح است اگر و فقط اگر شامل هیچ زیرتقسیمی از گراف‌های K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.*

برهان. به قضیه ۴.۴.۶ از [۲۳] رجوع کنید. □

۲.۱ مقدمات نظریه‌ی ترتیب

در این بخش مقدمات مربوط به نظریه‌ی ترتیب و مجموعه‌های مرتب جزیی را بیان می‌کنیم. مطالب مربوط به این بخش از [۲۴] و [۳۵] گردآوری شده است.

تعریف ۱.۲.۱. *یک مجموعه‌ی مرتب جزیی[۴] مجموعه‌ای است ناتهی مانند P همراه با رابطه‌ی دوتایی $\leqslant$ که در شرایط زیر صدق می‌کند:*

(۱) به ازای هر $x \in P$ ، $x \leqslant x$ (خاصیت انعکاسی)

(۲) به ازای هر $x, y \in P$، $x \leqslant y$ و $y \leqslant x$ ایجاب کند $x = y$. (خاصیت پادمتقارن)

[۱]planar graph [۲]subdivision [۳]Kuratowski's Theorem [۴]partially ordered set

(۳) *به ازای هر* $x, y, z \in P$، $x \leqslant y$ *و* $y \leqslant z$ *ایجاب کند* $x \leqslant z$. *(خاصیت تعدی)*

جفت $(P, \leqslant)$ را یک مجموعه‌ی مرتب جزیی می‌گوییم، اگر چه اغلب گفته می‌شود P یک مجموعه‌ی مرتب جزیی است، هرگاه ترتیب $\leqslant$ شناخته شده باشد. دو عضو x و y از مجموعه‌ی مرتب جزیی P را قابل مقایسه[۱] می‌گوییم هرگاه $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$. در غیر این صورت می‌گوییم x و y غیرقابل مقایسه[۲] و یا موازی هستند و آن را با نماد $x||y$ نشان می‌دهیم. می‌گوییم مجموعه‌ی مرتب جزیی P مرتب کلی[۳] است هرگاه هر دو عضو آن قابل مقایسه باشد. زیرمجموعه‌های مرتب کلی از یک مجموعه‌ی مرتب جزیی نقش مهمی در نظریه‌ی مجموعه‌های مرتب جزیی ایفا می کنند.

تعریف ۲.۲.۱. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی مرتب جزیی باشد. زیرمجموعه‌ی ناتهی A از مجموعه‌ی مرتب جزیی P را یک زنجیر[۴] از P می‌گوییم هرگاه با رابطه‌ی $\leqslant$ مرتب کلی باشد، به عبارت دیگر هر دو عضو این مجموعه قابل مقایسه باشند. یک زنجیر متناهی با n عنصر مانند $A = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ را می توان به صورت زیر نوشت:*

$$c_1 < c_2 < \dots < c_n$$

می‌گوییم چنین زنجیری از طول $n - 1$ است. یک زنجیر نامتناهی نزولی زنجیری است که کمترین عضو ندارد. همچنین یک زنجیر نامتناهی صعودی زنجیری است که بزرگترین عضو ندارد. اگر $a < b$، آنگاه یک زنجیر بیشین[۵] از a به b در مجموعه‌ی مرتب جزیی P زنجیری است که از عنصر a شروع شده و به عنصر b ختم می‌شود و در هیچ زنجیر بزرگتری از a به b واقع نمی‌شود. اگر مجموعه‌ی طول زنجیرهای P کراندار باشد می‌گوییم مجموعه‌ی مرتب جزیی P دارای طول متناهی است، و بیشترین طول زنجیرهای P را طول[۶] آن می‌گوییم.

زیر مجموعه‌ی A از مجموعه‌ی مرتب جزیی P را یک پادزنجیر[۷] می‌گوییم هرگاه هیچ دو عضو آن

[۱]comparable [۲]incomparable [۳]totally ordered [۴]chain [۵]maximal chain [۶]length [۷]anti-chain

قابل مقایسه نباشند. می‌گوییم یک پادزنجیر با n عنصر دارای عرض[۱] n است. یک پادزنجیر بیشین[۲] پادزنجیری است که در هیچ پادزنجیر بزرگتری واقع نشود. اگر مجموعه‌ی عرض های پادزنجیرهای P کراندار باشد، می‌گوییم P دارای عرض متناهی است و بزرگترین عرض پادزنجیرهای P را عرض P می‌گوییم.

در تعریف بعد رابطه پوشاندن را در یک مجموعه‌ی مرتب جزیی تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۳.۲.۱. *فرض کنید x و y دو عنصر متمایز از مجموعه‌ی مرتب جزیی P باشند. هرگاه $x \leqslant y$ و عنصری مانند z متمایز از x و y در مجموعه‌ی P وجود نداشته باشد به طوری که $x \leqslant z \leqslant y$، می‌گوییم y، x را می پوشاند.*

در مجموعه‌های مرتب جزیی عناصر بیشین و کمین قابل تعریف هستند.

تعریف ۴.۲.۱. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی مرتب جزیی باشد.*

(۱) می‌گوییم عنصر $m \in P$ یک عنصر بیشین[۳] در مجموعه‌ی مرتب جزیی P است اگر هیچ عنصر دیگری آن را نپوشاند، یعنی، $m \leqslant p$ ایجاب کند $p = m$. می‌گوییم مجموعه‌ی P دارای بزرگترین عنصر[۴] است و آن را با نماد ۱ نشان می‌دهیم، اگر به ازای هر عضو $x \in P$، داشته باشیم $x \leqslant 1$.

(۲) به طور مشابه عنصر $m \in P$ را عنصر کمین[۵] مجموعه‌ی P می‌گوییم هرگاه هیچ عنصری از P را نپوشاند، یعنی، $x \leqslant m$ ایجاب کند $x = m$. می‌گوییم مجموعه‌ی P دارای کوچکترین عضو[۶] است و آن را با نماد ۰ نمایش می‌دهیم هرگاه به ازای هر $x \in P$ داشته باشیم $0 \leqslant x$.

مجموعه‌ی مرتب جزیی که هم دارای عنصر ۰ و هم دارای عنصر ۱ باشد را مجموعه‌ی مرتب جزیی کراندار می‌گوییم.

---

[۱]width [۲]maximal anti-chain [۳]maximal element [۴]the greatest element [۵]minimal element

[۶]the least element

مجموعه‌ها و نمادهای تعریف شده در تعریف زیر در این رساله نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

تعریف ۵.۲.۱. *اگر P یک مجموعه مرتب جزیی دارای عنصر ۱ باشد، مجموعه عناصری از P که عنصر ۱ آنها را می‌پوشاند را هم‌اتم[۱] های مجموعه مرتب جزیی P می‌گوییم و این مجموعه را با نماد $Coatom(P)$ نشان می‌دهیم. همچنین اگر P یک مجموعه‌ی مرتب جزیی با کمترین عنصر ۰ باشد، مجموعه عناصری از P که عنصر ۰ را می‌پوشانند را مجموعه‌ی اتم[۲] های P می‌نامیم و آن را با نماد $Atom(P)$ نشان می‌دهیم.*

واضح است که اگر مجموعه مرتب جزیی P دارای بزرگترین عنصر ۱ باشد، آنگاه ۱ تنها عنصر بیشین آن است. در صورتی که P درای بزرگترین عنصر ۱ نباشد، ما مجموعه‌ی عناصر بیشین P را با نماد $Max(P)$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر مجموعه‌ی مرتب جزیی P دارای کوچکترین عضو ۰ باشد، آنگاه واضح است که ۰ عضو کمین منحصر به فرد مجموعه‌ی P می‌باشد. در صورتی که P دارای کوچکترین عضو ۰ نباشد، برای مجموعه‌ی عناصر کمین P از نماد $Min(P)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۶.۲.۱. *مجموعه‌ی مرتب جزیی P را در نظر بگیرید. نمودار هاسه[۳] مجموعه‌ی مرتب جزیی P، نمایشی برای مجموعه‌ی مرتب جزیی P است بدین صورت که هر عنصر از مجموعه‌ی مرتب جزیی P به عنوان یک رأس در نظر گرفته می‌شود، و رأس x به y وصل می‌شود هرگاه y عنصر x را بپوشاند.*

تعریف ۷.۲.۱. *فرض کنید S یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرتب جزیی P باشد. در این صورت می‌گوییم عنصر x از مجموعه‌ی P یک کران پایین[۴] برای مجموعه‌ی S است هرگاه به ازای هر عنصر $s \in S$ داشته باشیم $x \leqslant s$. همچنین می‌گوییم عنصر y یک کران بالا برای مجموعه‌ی S است هرگاه به ازای هر عنصر $s \in S$ داشته باشیم $s \leqslant y$. مجموعه‌ی کران‌های پایین مجموعه‌ی S را با نماد S^ℓ و مجموعه‌ی کران‌های بالای S را با نماد S^u نشان می‌دهیم. بنابراین*

$$S^\ell = \{x \in P; x \leqslant s \text{ ،} s \in S \text{ به ازای هر } \}$$

[۱]coatom [۲]atom [۳]Hasse diagram [۴]lower bound

$$S^u = \{x \in P; s \leqslant x \text{ ،} s \in S \text{ به ازای هر } \}$$

کران بالا a از زیرمجموعه‌ی S را کوچکترین کران بالا[1] مجموعه‌ی S یا سوپریمم S می‌گوییم هرگاه به ازای هر کران بالای S مانند b داشته باشیم: $a \leqslant b$. همچنین اگر a یک کران پایین برای مجموعه‌ی S باشد می‌گوییم بزرگترین کران پایین بزرگترین کران پایین[2] S یا اینفیمم S است اگر به ازای هر کران پایین S مانند b داشته باشیم: $b \leqslant a$.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $(P, \leqslant_P)$ و $(Q, \leqslant_Q)$ دو مجموعه‌ی مرتب جزیی و $f : P \longrightarrow Q$ یک تابع باشد.

(۱) می‌گوییم f حافظ ترتیب[3] است اگر $x \leqslant_P y$ ایجاب کند $f(x) \leqslant_Q f(y)$.

(۲) می‌گوییم f ترتیب نشاندن[4] است هرگاه

$$f(x) \leqslant_Q f(y) \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad x \leqslant_P y.$$

توجه کنید که چنین تابعی باید یک به یک باشد. اگر $f : P \longrightarrow Q$ یک ترتیب نشاندن باشد، آنگاه می‌گوییم P در Q نشانده می‌شود و این تابع را با نماد $f : P \hookrightarrow Q$ نشان می‌دهیم.

(۳) یک ترتیب نشاندن مانند f را یک یکریختی مرتب[5] می‌گوییم هرگاه پوشا نیز باشد. اگر $f : P \longrightarrow Q$ یک یکریختی مرتب باشد، می‌نویسیم $P \cong Q$.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید P یک مجموعه‌ی مرتب جزیی متناهی باشد. یک پوشش زنجیری[6] برای P، مجموعه‌ای از زنجیرهای P است که اجتماع آنها کل مجموعه‌ی P را می‌سازد. اگر زنجیرهای پوشش زنجیری P دو به دو اشتراکی با هم نداشته باشند، آنگاه می‌گوییم پوششی از هم جدا برای P هستند.

[1] the least upper bound [2] the greatest lower bound [3] order-preserving [4] order embedding
[5] order isomorphism [6] chain cover