دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - گروه کنترل و سیستم

رساله دکتری مهندسی برق - کنترل

توسعه مفاهیم و قضایای توابع تبدیل ماتریسی SPR و کاربردهای آن در کنترل

نگارش

مجتبی حکیمی مقدم

استاد راهنما

پروفسور حمید خالوزاده

بهمن ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به همسر عزیزم

شیرین کاظمی مقدم

تأییدیّه هیات داوران

اعضای هیات داوران نسخه‌ی نهائی رساله دکتری آقای **مجتبی حکیمی مقدم**

را با عنوان: **توسعه مفاهیم و قضایای توابع تبدیل ماتریسی SPR و کاربردهای آن در کنترل**

از نظر فرم و محتوی بررسی نموده و پذیرش آن را برای تکمیل درجه دکتری مهندسی برق- کنترل تأیید می‌نمایند.

اعضای هیات داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱ - استاد راهنما			
۲ - استاد ممتحن			
۳ - استاد ممتحن			
۴ - استاد ممتحن			
۵ - استاد ممتحن			
۶ - نماینده تحصیلات تکمیلی			

اظهار نامه دانشجو

موضوع رساله دکتری

توسعه مفاهیم و قضایای توابع تبدیل ماتریسی SPR و کاربردهای آن در کنترل

نام دانشجو: مجتبی حکیمی مقدم

شماره دانشجویی: ۸۶۰۶۱۴۶

استاد راهنما: پروفسور حمید خالوزاده

اینجانب **مجتبی حکیمی مقدم** دانشجوی دوره‌ی دکتری تخصصی **مهندسی برق-کنترل** دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این رساله توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تایید می‌باشد، و در موارد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در رساله‌ی دکتری اینجانب تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا دیگران در هیچ‌جا ارائه نشده است و در تدوین متن رساله چارچوب مصوب دانشگاه به‌طور کامل رعایت شده است.

تاریخ و امضاء

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

۱ -حق چاپ و تکثیر این رساله متعلق به نویسنده آن می‌باشد. هر گونه کپی برداری به‌صورت کل رساله یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده و یا کتابخانه‌ی دانشکده برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی مجاز می‌باشد.

۲ -کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی بوده و بدون اجازه کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.

۳ -همچنین استفاده از نتایج و اطلاعات موجود در این رساله بدون ذکر مرجع به هیچ عنوان مجاز نمی-باشد.

۴ -ضمناً متن این صفحه نیز باید در نسخه‌ی تکثیر شده وجود داشته باشد.

تشکر و قدردانی

اکنون که به حول و قوه الهی توفیق به اتمام رساندن این مقطع تحصیلی را پیدا نموده‌ام، لازم می‌دانم از تمام کسانی‌که به‌نحوی در آموزش و پرورش حقیر تأثیر گذار بوده‌اند تشکر کنم. کار حاضر را مدیون و متعلق به والدین و فرد فرد معلمین و اساتید دلسوز و عزیزم از بدو تحصیل تا کنون می‌دانم، همت بلندشان را ارج می‌نهم و از خداوند متعال عافیت دنیا و عقبی را برایشان خواستارم.

یاد مرحوم پدرم را گرامی می‌دارم و از درگاه احدیت علو درجات را برای او خواستارم، چرا که لحظه لحظه‌ی زندگیش برایم خیر و برکت بود و همواره در رشد و تعالی‌ام از هیچ کوششی دریغ نکرد. نمی‌دانم چگونه باید از مادرم سپاسگزاری کنم! عقل و زبانم، عاجز و قاصر از درک و بیان زحمات و الطاف اوست. خداوندا سایه‌اش در صحت و سلامت تا هستم بر سرم مستدام دار، آمین. همچنین از همسرم و خانواده محترم ایشان به‌خاطر صبر و شکیبایی و همراهی‌هایشان بسیار سپاسگزارم.

لازم می‌دانم به‌طور خاص از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر حمید خالوزاده که هم در مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد و هم در مقطع دکتری همواره از رهنمون‌های ارزشمند ایشان بهره‌مند بوده‌ام، صمیمانه سپاسگزاری کنم. همچنین از اساتید محترم ارزیاب آقایان دکتر علی خاکی صدیق، دکتر محمد حائری، دکتر محمد جواد یزدان‌پناه و دکتر جعفر حیرانی نوبری به‌خاطر نکات ارزشمندی که گوش‌زد نمودند و موجبات غنای هر چه بیشتر این رساله را فراهم نمودند، کمال تشکر را دارم.

مجتبی حکیمی مقدم

فروردین ۱۳۹۲

چکیده

با وجود گذشت حدود نیم قرن از ظهور توابع تبدیل اکیداً حقیقی‌مثبت، در مراجع معروف کنترل برای شرایط لازم و کافی بیان‌هایی وجود دارد که در یک شرط وابسته به فرکانس‌های بالا با هم اختلاف دارند. عموم اثبات‌های ارائه شده در این مراجع در فضای حالت صورت گرفته و از حوزه‌ی فرکانس غفلت شده است. در این رساله با ارائه چند مثال نقض عدم سازگاری شرایط لازم و کافی داده شده برای توابع تبدیل اکیداً حقیقی‌مثبت در برخی از مراجع نشان داده می‌شود. از جمله این مراجع می‌توان به کتاب سیستم-های غیرخطی خلیل اشاره نمود. علاوه بر این برای شرط فرکانس بالا که مورد اختلاف کارهای گذشته است، چندین معادل تحلیلی و یک معادل عددی به‌همراه یک تعبیر هندسی ارائه شده است. جامعیت و سادگی دو ویژگی مهم شرایط لازم و کافی استخراج شده در این رساله در مقایسه با کارهای گذشته است. جامعیت به این معنی که شرایط لازم و کافی برای توابع تبدیل ماتریسی ناسره اثبات و استخراج - شده است و سادگی به این معنی که شرط فرکانس بالا بر حسب پارامترهای مارکوف سیستم بیان شده است و در نتیجه تحقیق در مورد صحت آن چه در حوزه‌ی زمان و چه در حوزه‌ی فرکانس به‌راحتی قابل انجام است. علاوه بر این چند ویژگی مهم ماتریس‌های تابع تبدیل حقیقی‌مثبت و اکیداً حقیقی‌مثبت از جمله خاصیت مجانبی، خاصیت عناصر قطری و خاصیت صفرهای انتقال استخراج شده است. در پایان راه‌کارهایی برای استفاده از نتایج نظری جدید در سیستم‌های حلقه بسته چندمتغیره ارائه شده است.

کلمات کلیدی توابع تبدیل ماتریسی اکیداً حقیقی‌مثبت، شرایط لازم و کافی، حوزه‌ی فرکانس، خاصیت مجانبی، خاصیت عناصر قطری، خاصیت صفرهای انتقال، پارامترهای مارکوف سیستم.

صفحه

فهرست مطالب

صفحه

فهرست اشکال

فهرست نشانه‌ها

مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
″نظریه‌ی مدار″	CT
متغیر تبدیل لاپلاس یا فرکانس مختلط	$s = \sigma + j\omega$
مزدوج مختلط متغیر s	$\overline{s} = \sigma - j\omega$
بخش حقیقی یک متغیر مختلط	$\mathrm{Re}\{.\}$
بخش موهومی یک متغیر مختلط	$\mathrm{Im}\{.\}$
تابع دلخواه اسکالر از متغیر مختلط s	$f(s)$
تابع تبدیل اسکالر گویا با ضرایب حقیقی از متغیر مختلط s	$G(s)$
بزرگ‌ترین کران پایین	$\inf\{.\}$
زاویه یا فاز یک متغیر مختلط	$\arg\{.\}$
تابع ماتریسی $m \times m$ دلخواه از متغیر مختلط s	$\mathbf{F}(s)$
تابع تبدیل ماتریسی $m \times m$ گویا با ضرایب حقیقی از متغیر مختلط s	$\mathbf{G}(s)$
ترانهاده‌ی تابع تبدیل ماتریسی $\mathbf{G}(s)$	$\mathbf{G}^T(s)$
مقدار ویژه‌ی iام تابع تبدیل ماتریسی $\mathbf{G}(s)$	$\lambda_i(\mathbf{G}(s))$
دترمینان تابع تبدیل ماتریسی $\mathbf{G}(s)$	$\det(\mathbf{G}(s))$
شکل هرمیتی تابع تبدیل ماتریسی $\mathbf{G}(s)$ که عبارت است از $\mathbf{G}(s) + \mathbf{G}^T(\overline{s})$	$\mathbf{G}_H(s)$
شکل هرمیتی کوتاه شده‌ی تابع تبدیل ماتریسی $\mathbf{G}(s)$	$\mathbf{G}_{TH}(s)$
″شرط فرکانس بالا″ برای توابع تبدیل اکیداً حقیقی‌مثبت	HFC
توابع تبدیل ″حقیقی‌مثبت″	PR
توابع تبدیل ″اکیداً حقیقی‌مثبت″	SPR
″ کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف″	KYP

۱ مقدمه

امروزه حضور و کاربرد توابع حقیقی‌مثبت[1] (PR) و اکیداً حقیقی‌مثبت[2] (SPR) تقریباً در تمام زیر شاخه-های کنترل حتی کنترل هوشمند قابل مشاهده است. اما در کنار توسعه‌ی کاربردهای این توابع در نظریه‌ی کنترل و پایداری به شناخت این توابع (ویژه‌گی‌های حوزه فرکانسی و شرایط لازم و کافی) کمتر توجه شده است. به‌طوری‌که در کتاب‌ها و مقالات مرتبط با این موضوع شرایط لازم و کافی متفاوتی دیده می‌شود که در جزییات اختلاف‌هایی با هم دارند. همچنین برخی استنباط‌ها و مثال‌های ذکر شده در کتاب‌های معروف کنترل دارای ایرادهایی هستند. از این‌رو گسترش و توسعه در راستای شناخت بیشتر این توابع ضروری به‌نظر می‌رسد. بدیهی است بینش و شناخت عمیق‌تر از این توابع می‌تواند در بهبود طراحی سیستم‌های کنترل حلقه بسته موثر واقع شود.

۱.۱ تاریخچه

توابع حقیقی مثبت در مساله ترکیب[3] که از مباحث مرتبط با نظریه شبکه‌های الکتریکی است مطرح شدند و توابع اکیداً حقیقی‌مثبت در ارتباط با نظریه‌ی فراپایداری[4] معرفی شدند. مختصری از تاریخچه‌ی این توابع را در ادامه مرور می‌کنیم.

توابع حقیقی‌مثبت

انگیزه اولیه‌ی تعریف توابع حقیقی‌مثبت در ارتباط با تحقق پذیری یک تابع تبدیل بصورت امپدانس نقطه تحریک یک شبکه الکتریکی غیر فعال[5] بوده است. اُتُ برون در سال ۱۹۳۰ نشان داد حقیقی‌مثبت بودن شرط لازم و کافی برای تحقق پذیری امپدانس نقطه تحریک یک شبکه تک‌قطبی غیر فعال است که در آن فقط از اجزای غیر فعال مقاومت، خازن، القاگر و القاگرهای متقابل استفاده شده است [۱]. در سال

1 - Positive Real

2 - Strictly Positive Real

3 - Synthesis

4 - Hyper-Stability

5 - Passive Electrical Network

۱۹۴۷ ریچاردز یک تبدیل خاص معرفی کرد که بر حسب تابع تبدیل اصلی و یک پارامتر مثبت بیان شده بود و دارای این ویژگی بود که از جهت حقیقی‌مثبت بودن معادل تابع اصلی بود؛ سپس در سال ۱۹۴۹ به کمک تبدیل ریچاردز نشان داده شد که هر تابع تبدیل حقیقی‌مثبت بصورت امپدانس نقطه تحریک یک شبکه تک‌قطبی بدون نیاز به ترانسفورمر ایده‌آل قابل تحقق است [۲]. در [۳] شرایط ساده‌تری برای بررسی حقیقی‌مثبت بودن یک تابع تبدیل در مقایسه با کارهای قبلی در حوزه فرکانس داده شده است. از جمله مراجعی که بحث تحقق پذیری را برای شبکه‌های الکتریکی چند دریچه‌ای بیان نموده اند می‌توان به مقالات [۴] و [۵] و [۶] و کتب [۷] و [۸] اشاره کرد. از مقالات جدیدی که مبحث تحقق پذیری در سیستم‌های الکتریکی و مکانیکی را مورد بحث قرار داده‌اند می توان به مراجع [۹] تا [۱۶] اشاره نمود.

شرایط معادل برای توابع حقیقی‌مثبت در ساختار فضای حالت در اوایل دهه‌ی ۱۹۶۰ میلادی بیان شدند که امروزه به لم حقیقی‌مثبت[1] (PR Lemma) معروف هستند. در فاصله سال‌های ۱۹۶۵ تا ۱۹۷۰ نسخه‌های کامل‌تری از این لم بیان شد که از جمله کامل‌ترین آن‌ها می‌توان به کار اندرسون[2] اشاره نمود [۱۷]. کار کالمن دارای نواقصی بود از جمله این‌که تنها توابع اسکالر با درجه نسبی بزرگ‌تر از صفر را شامل می‌شد و مهم‌تر این‌که دارای اثبات نبود؛ این سه نقیصه توسط اندرسون در سال ۱۹۶۷ مرتفع شد به این معنی که او اثبات را برای یک تابع تبدیل ماتریسی سره[3] انجام داد [۱۸]. پس از تعمیم لم حقیقی‌مثبت به سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی توسط اندرسون، ویِلمز ارتباط بین این لم و یک مساله کنترل بهینه مربعی معین و نیز وجود پاسخ متقارن برای معادله ریکاتی جبری را تشریح نمود [۱۷]. یک نسخه‌ی تعمیم یافته از این لم برای سیستم‌های پیوسته در [۱۹] و برای سیستم‌های زمان گسسته در [۲۰] داده شده است. این لم در مورد وجود و نحوه تعیین ماتریس‌های بکار رفته توضیحی نمی دهد. در مقالات [۲۱] تا [۲۴] در مورد حل پذیری، شرایط لازم و کافی برای وجود پاسخ و روش‌های تعیین ماتریس‌های بکار رفته در لم حقیقی‌مثبت بحث شده است.

[1] - Positive Real Lemma
[2] - Anderson
[3] - Proper

توابع تبدیل اسکالر اکیداً حقیقی‌مثبت

تعریف تابع تبدیل اکیداً حقیقی‌مثبت حدود نیم قرن پیش توسط پوپوف و در ارتباط با پایداری مطلق معرفی شد [۲۵]. نارندرا و تیلور در سال ۱۹۷۳ نشان دادند که از دو بیان موجود در آن زمان که مدعی شرایط معادل برای توابع اکیداً حقیقی‌مثبت بودند، یکی تنها مبین شرایط لازم و دیگری تنها مبین شرایط کافی است و هیچ‌کدام مبین شرایط لازم و کافی واقعی برای توابع اکیداً حقیقی‌مثبت نیستند. همچنین آن‌ها مفهوم تابع تبدیل اکیداً حقیقی‌مثبت را از دیدگاه نظریه مدار تفسیر نمودند و شبکه‌های الکتریکی اتلافی[1] را معرفی نمودند [۲۶]. تیلور در سال ۱۹۷۴ موفق شد یک ویژگی مهم برای توابع اکیداً حقیقی‌مثبت با درجه نسبی یک استخراج نماید که به‌طور خفیف یک تفاوت کلیدی توابع حقیقی-مثبت و اکیداً حقیقی‌مثبت را آشکار می‌کرد [۲۷]. اولین قضیه جامع مبین شرایط لازم و کافی برای توابع تبدیل اسکالر اکیداً حقیقی‌مثبت در سال ۱۹۸۷ توسط یوأنا و تآوُ بیان گردید [۲۸]. بیان‌های متفاوت دیگری در کتاب‌های معروفی همچون کتاب کنترل تطبیقی آَستروم (ویرایش اول و دوم این کتاب بیان یکسانی در این رابطه دارند) [۲۹]، کتاب کنترل غیرخطی اِسلُتین [۳۰]، کتاب سیستم‌های غیرخطی خلیل (ویرایش دوم و سوم این کتاب بیان متفاوتی در این رابطه دارند) [۳۱] و [۳۲] در این زمینه آمده است که در جزئیات هیچ‌کدام با هم به‌طور کامل سازگار نیستند. همچنین در [۳۳] شرایط جدیدی برای اکیداً حقیقی مثبت بودن بیان شده است که بر اساس چند فرکانس محدود بیان می شود. در سال ۲۰۰۷ نشان داده شد که در بین چهار بیان (قضیه) غالب که شرایط لازم و کافی را برای توابع تبدیل اسکالر اکیداً حقیقی‌مثبت بیان می‌کنند تنها دو بیان یعنی بیان یوأنا و تآوُ و بیان خلیل مطابقت کامل با تعریف را دارا هستند و برای بیان های اِسلُتین و آَستروم مثال نقض ارائه شد [۳۴] و [۳۵]. علاوه بر این در دو مرجع اخیر بدون اعمال هیچ‌گونه پیش فرضی روی درجه نسبی تابع تبدیل، شرایط لازم و کافی برای توابع تبدیل اکیداً حقیقی‌مثبت اثبات شده است که این موفقیت نتیجه بهره‌گیری از ابزار قدرتمند آنالیز مختلط در حوزه فرکانس بوده است. همچنین با استفاده از رفتار دیاگرام نایکوئیست در فرکانس‌های به اندازه کافی بزرگ یک خاصیت جدید به‌همراه تعبیر هندسی آن در صفحه مختلط s استخراج شده است. این خاصیت مبین این حقیقت است که اگر $G(s)$ با درجه نسبی غیر صفر اکیداً حقیقی‌مثبت باشد، آنگاه مشتق فاز آن نمی تواند در $\omega \to \infty$ سریعتر از ω^{-2} به صفر همگرا شود. به

---

[1] - Dissipative Electrical Networks

بیان دیگر وقتی تابع تبدیل درجه نسبی غیر صفر دارد برای اکیداً حقیقی مثبت بودن لازم است مجموع قطب‌ها با مجموع صفرها برابر نباشد [۳۵].

برخی از کارهای اخیر در این زمینه سعی در تعیین شرایط معادلی دارند که تنها وابسته به ماتریس‌های تحقق فضای حالت سیستم باشند. اولین کار با این رویکرد در [۳۶] آمده است؛ در این مقاله ابتدا ارتباط حقیقی‌مثبت بودن با کنترل بهینه مطرح شده است و سپس به کمک کنترل بهینه منفرد شرایط لازم و کافی بر حسب ماتریس‌های (A, B, C, D) حاصل از یک تحقق می‌نیمال برای بررسی حقیقی‌مثبت بودن توابع تبدیل ماتریسی بیان شده است. در [۳۷] و [۳۸] الگوریتم‌هایی مبتنی بر مقادیر ویژه یک ماتریس برای بررسی حقیقی‌مثبت بودن و اکیداً حقیقی‌مثبت بودن یک تابع تبدیل اثبات شده است. در مراجع [۳۹] و [۴۰] و [۴۱] روش‌های طیفی برای تست اکیداً حقیقی‌مثبت بودن یک تابع تبدیل داده شده است.

لازم به ذکر است که تعریفی که امروزه در کتب و مقالات در مورد توابع اکیداً حقیقی‌مثبت وجود دارد کمی با تعریف اولیه پوپوف متفاوت است، به بیان دیگر در تعریف اولیه [۲۵] عبارت "به ازای یک مقدار مثبت به اندازه کافی کوچک ε" استفاده شده است درحالی‌که در تعریف رایج امروز عبارت "به ازای برخی از مقادیر مثبت ε" بکار می رود [۲۸] تا [۳۲]. در [۳۵] و [۴۲] نشان داده شده است که دو بیان معادل هستند ولی تعریف اولیه دقیق‌تر بوده و امکان استفاده از سری تیلور را فراهم می آورد. در [۴۳] تعاریف مختلف داده شده برای توابع اکیداً حقیقی مثبت با هم مقایسه شده است.

توابع تبدیل ماتریسی اکیداً حقیقی‌مثبت

اولین کار جامع در ارتباط با شرایط لازم و کافی برای توابع تبدیل ماتریسی اکیداً حقیقی‌مثبت توسط یوأنا و تآوُ در سال ۱۹۸۸ انجام شد [۴۴]. آنها همچنین در سال ۱۹۹۰ مجموعه با ارزشی از خواص توابع تبدیل ماتریسی اکیداً حقیقی‌مثبت را در مورد سیستم‌های پیوسته در زمان و گسسته در زمان انتشار دادند [۴۵]. در سال‌های ۱۹۹۶ و ۲۰۰۲ دو بیان متفاوت دیگر در مورد ماتریس‌های تابع تبدیل اکیداً حقیقی‌مثبت توسط خلیل به ترتیب در ویرایش دوم و سوم کتاب سیستم‌های غیرخطی داده شد[۳۱] و [۳۲]. همچنین در سال ۲۰۰۰ شرایط معادل دیگری توسط هُداکا معرفی شد [۴۶]. یک شرط لازم برای SPR بودن یک ماتریس تابع تبدیل معین مثبت بودن شکل هرمیتی آن برای جمیع فرکانس‌ها است، در [۴۷] راه‌کاری برای بررسی این شرط داده شده است.

در مورد سیستم‌های زمان گسسته حقیقی‌مثبت اطلاعـات جـامعی در [۴۸]، [۴۹] و [۵۰] آمـده اسـت. برخی از خواص و قضایای سیستم‌های زمان گسسته اکیداً حقیقی‌مثبت در [۴۵] مورد بررسی قرار گرفته است. نسخه‌های زمان گسسته لم حقیقی‌مثبت در [۲۰] و [۵۱] مورد بررسی قـرار گرفتـه‌انـد. همچنــین توسعه مفهوم حقیقی‌مثبت برای سیستم‌های توصیفی در [۵۲] تا [۵۸] مورد بررسی قرار گرفته است.

در مراجع تعاریف متعدد دیگری با عناوین

۱) توابع تبدیل بطور ضعیف اکیداً حقیقی‌مثبت[۱] (WSPR) [۴۶] و [۵۹] و [۶۰] و [۶۱]

۲) توابع تبدیل بطور قوی اکیداً حقیق مثبت (SSPR)[۲] [۵۹]

۳) توابع تبدیل اکیداً حقیقی‌مثبت توسعه یافته[۳] (ESPR) [۶۲] و [۵۹]

۴) توابع تبدیل اکیداً غیر فعال[۴] (SP) [۶۳]

۵) توابع تبدیل بطور مرزی اکیداً حقیقی‌مثبت[۵] (MSPR) [۶۳]

۶) توابع تبدیل تقریباً اکیداً حقیقی‌مثبت[۶] (ASPR) [۶۴] و [۶۵]

۷) توابع تبدیل اکیداً غیر فعال حالت[۷] (SSP) [۳۲]

۸) توابع تبدیل اکیداً غیر فعال ورودی[۸] (ISP) [۶۶]

۹) توابع تبدیل اکیداً غیر فعال خروجی[۹] (OSP) [۶۶]

۱۰) توابع تبدیل حقیقی‌محدود[۱۰] (BR) [۵۹] و [۶۷]

۱۱) توابع تبدیل اکیداً حقیقی‌محدود[۱۱] (SBR) [۵۹] و [۶۷]

معرفی شده اند که به‌نوعی با تعاریف اصلی مرتبط هستند و تعریف آنها در پیوست (۱) آمده است.

---

[1] - Weakly Strictly Positive Real
[2] - Strongly Strictly Positive Real
[3] - Extended Strictly Positive Real
[4] - Strictly Passive (SP)
[5] - Marginally Strictly Positive Real
[6] - Almost Strictly Positive Real
[7] - State Strictly Passive
[8] - Input Strictly Passive
[9] - Output Strictly Passive
[10] - Bounded Real
[11] - Strictly Bounded Real

۲.۱ اهمیت توابع حقیقی‌مثبت

برای مدت مدیدی یک نقص جدی نظریه لیاپانوف عدم وجود یک رویه برای ساختن توابع لیاپانوف بود. از میان تلاش های اولیه برای برطرف کردن این نقیصه روش پایداری مطلق لوری که در سال ۱۹۵۱ میلادی مطرح شد مورد توجه باقی ماند. لوری و همکارانش برای سیستم‌هایی که شامل یک بخش خطی و یک بخش غیر خطی بدون حافظه در حلقه پس‌خور بودند، تابع لیاپانوف با یک معادله جبری مرکب از یک ساختار درجه دوم و انتگرال بخش غیر خطی بنا نهادند. اولین نتایج این بود که غیرخطی باید به بخش معینی از صفحه متعلق باشد و رقابت برای پیدا کردن یک رویه برای حل معادله جبری بود. مسأله پایداری مطلق لوری که برای یک دهه موضوع اصلی بحث در محافل علمی بود، در سال ۱۹۶۱ به‌طور کامل توسط پوپوف با یک معیار حوزه فرکانسی حل شد [۶۸] و [۶۹]. او سپس نظریه فراپایداری را به-عنوان تعمیمی از پایداری مطلق بنا نهاد و اثبات کرد که یک سیستم خطی نامتغیر با زمان[1] فراپایدار است اگر و فقط اگر تابع تبدیل آن حقیقی‌مثبت باشد. سپس تعریف تابع تبدیل اکیداً حقیقی‌مثبت را معرفی کرد و اثبات کرد که یک سیستم خطی نامتغیر با زمان به‌طور مجانبی فراپایدار است اگر و فقط اگر تابع تبدیل آن اکیداً حقیقی‌مثبت باشد [۲۵]. معیار پوپوف باعث راه‌یابی و کاربردی شدن مفهوم حقیقی مثبت بودن در کنترل پس‌خور شد. از نقطه نظر کاربرد، کالمن در سال ۱۹۶۴ نشان داد که حل مسأله معکوس کنترل بهینه با استفاده از نظریه‌ی فراپایداری به قانون کنترل بهینه LQR[2] منجر می شود [۷۰]. نظریه فراپایداری پوپوف به سرعت در کنترل تطبیقی مدل مرجع مورد استفاده قرار گرفت و نشان داده شد که در بیشتر مواقع استفاده از این نظریه ساده‌تر از نظریه پایداری لیاپانوف است [۷۱]. در طراحی و آنالیز سیستمهای غیر خطی، اغلب مفید و امکان پذیر است که سیستم را به یک زیر سیستم خطی و یک زیر سیستم غیر خطی تجزیه کنیم. اگر تابع یا ماتریس تبدیل زیر سیستم خطی حقیقی-مثبت باشد آنگاه خواص مهمی دارد که ممکن است منجر به تولید تابع لیاپانوف برای کل سیستم گردد [۳۰].

[1] - Linear Time Invariant System
[2] - Linear Quadratic Regulator

۳.۱ کاربرد توابع اکیداً حقیقی مثبت در نظریه کنترل

در این بخش به برخی از کاربردهای توابع اکیداً حقیقی‌مثبت در نظریه کنترل اشاره می‌شود. این توابع از همان آغاز خیلی سریع در اغلب زیر شاخه‌های علم کنترل مورد استفاده قرار گرفتند و امروزه حتی در سیستم‌های حلقه بسته مبتنی بر منطق فازی مورد استفاده قرار می‌گیرند. امروزه از این نظریه در اغلب زیر شاخه های کنترل از جمله کنترل غیر خطی [۳۰] و [۳۲]، کنترل تطبیقی [۶۶] و [۲۹]، کنترل مقاوم [۷۲] و [۷۳] و حتی کنترل فازی [۷۴] استفاده می گردد. از جمله مقالات جدید منتشر شده که نقش توابع اکیداً حقیقی‌مثبت را در طراحی نشان می‌دهند می‌توان به [۷۵] تا [۸۰] اشاره نمود. در ادامه به برخی از این کاربردها اشاره می‌شود.

کنترل غیر خطی [۳۲]

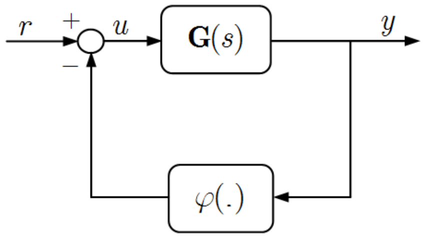
به‌دلیل کارهای با ارزشی که در دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی توسط وِیلمز و سپس دسور و ویدیاساگار انجام گرفت، امروزه بجای فراپایداری از غیر فعال بودن[1] و بجای فراپایداری مجانبی از اتلافی بودن[2] استفاده می شود [۴۸].

تعریف ۱–۱ سیستم با بردار ورودی u و بردار خروجی y را غیر فعال[3] گویند اگر برای جمیع مقادیر u نامساوی $u^T y \geq 0$ برقرار باشد.

لم ۱–۱ مبدا سیستم حلقه بسته شکل ۱.۱ متشکل از اتصال فیدبکی یک تابع تبدیل اکیداً حقیقی‌مثبت $\mathbf{G}(s)$ و یک تابع غیر فعال و بدون حافظه[4] $\varphi(t,y)$ به‌طور سراسری[5] و به‌صورت یکنواخت[6] پایدار مجانبی است (ورودی مساوی صفر $r=0$ فرض شده است).

---

[1] - Passivity
[2] - Dissipativity
[3] - Passive
[4] - Memoryless Function
[5] - Globally
[6] - Uniformly



شکل ۱.۱ اتصال فیدبکی یک تابع SPR و یک تابع غیر فعال بدون حافظه [۳۲]

تعریف ۱-۲ یک سیستم را به‌طور مطلق[1] پایدار گویند اگر مبدا، یک نقطه تعادل به‌طور یکنواخت و سراسری پایدار مجانبی برای تمام غیر خطی‌های داده شده در یک ناحیه[2] باشد.

تعریف ۱-۳ تابع بدون حافظه $\varphi:[0,\infty)\times R^p \to R^p$ با فرض $K=K_2-K_1=K^T>0$ متعلق به ناحیه $[K_1,\ K_2]$ نامیده می‌شود ($\varphi\in[K_1,\ K_2]$)، اگر $[\varphi(t,y)-K_1y]^T[\varphi(t,y)-K_2y]\le 0$.

تذکر ۱-۱ تابع بدون حافظه $\varphi:[0,\infty)\times R^p \to R^p$ متعلق به ناحیه $[K_1,\ \infty]$ نامیده می‌شود ($\varphi\in[K_1,\ \infty]$)، اگر $y^T[\varphi(t,y)-K_1y]\ge 0$.

قضیه ۱-۱ (معیار دایره چند متغیره) در شکل ۱.۱ فرض کنید $r=0$ و $u=-\varphi(t,y)$ بوده و ماتریس تابع تبدیل $\mathbf{G}(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ دارای تحقق می‌نیمال باشد. این سیستم به‌طور مطلق پایدار است اگر یکی از شرایط زیر بر قرار باشد.

۱) $\varphi\in[K_1,\ \infty]$ و ماتریس تابع تبدیل $\mathbf{G}(s)[I+K_1\mathbf{G}(s)]^{-1}$ اکیداً حقیقی‌مثبت باشد.

۲) $\varphi\in[K_1,\ K_2]$ و ماتریس تابع تبدیل $[I+K_2\mathbf{G}(s)][I+K_1\mathbf{G}(s)]^{-1}$ اکیداً حقیقی‌مثبت باشد.

قضیه ۱-۲ (معیار پوپوف چند متغیره) در شکل ۱.۱ فرض کنید $r=0$ و برای هر $i=1,\ldots,m$ داشته باشیم $u_i=-\varphi_i(y_i)$ که در آن φ_i یک غیر خطی بدون حافظه، نامتغیر با زمان و دکوپله شده[3]

---

1 - Absolutely
2 - Sector
3 -Decoupled