

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مکانیک
گروه طراحی کاربردی

تعیین بار کمانش یک استوانه جدار نازک تحت بارگذاری محوری بر اساس تئوری تغییر شکل برشی
مرتبۀ اول

دانشجو : فرید محبوبی نسرکانی

استاد راهنما :
جناب آقای دکتر ایپکچی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۰



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :
تاریخ :
ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای فرید محبوبی نسرکانی رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تعیین بار کمانش یک استوانه جدار نازک تحت بارگذاری محوری بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول که در تاریخ نهم بهمن ماه نود با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> مردود	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input checked="" type="checkbox"/> قبول (با درجه : <u>بسیار خوب</u> امتیاز <u>۱۸.۴۲</u>)
--------------------------------	------------------------------------	---

۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹) ✓

۱- عالی (۱۹ - ۲۰)

۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استادیار	دکتر ایپک چی	۱- استادراهنما
-	-	-	۲- استاد مشاور
	استادیار	دکتر گردویی	۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	استادیار	دکتر شاطر زاده	۴- استاد ممتحن
	استادیار	دکتر جعفری	۵- استاد ممتحن

رئیس دانشکده: دکتر مهدی قناد کهتویی

تشکر و قدردانی

پس از حمد و سپاس خداوند متعال که در لحظه لحظه‌ی زندگی بهترین راهنما، دوست و یاور زندگی من بوده، در ابتدا از زحمات فراوان استاد عزیزم جناب آقای دکتر ایپک‌چی تشکر می‌کنم که در تمام مراحل تهیه این پایان‌نامه مرا با صبر و حوصله یاری نموده‌اند.

اینجانب فرید محبوبی نسرکانی تأیید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه تماماً نتیجه تحقیقات خودم می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده ام. کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه بار کمانش برای یک پوسته استوانه‌ای همگن تحت بار محوری در حالت الاستیک به دست آمده است. معادلات تعادل و پایداری به کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و روش انرژی تعیین شده است. روابط کرنش جابجایی بر اساس معادلات فن-کارمن بوده و مساله متقارن محوری است. در نهایت معادلات بی بعد شده تعادل، با کمک تئوری اغتشاشات حل گردیده است، پس از آن معادلات پایداری حل شده و بار کمانش به دست آمده است. علاوه بر آن، حل به دست آمده از معادلات تعادل و پایداری با روش عددی به کمک نرم افزار انسیس مقایسه شده است. در نهایت تاثیر پارامترهای هندسی بر بار کمانش مطالعه شده است. همچنین مقایسه‌ای بین نتایج حل بر اساس تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی صورت گرفته است. کلمات کلیدی: تحلیل کمانش، روش اجزا محدود، تئوری اغتشاشات، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

فهرست مطالب:

فصل اول - مبانی تئوری و مرور مقالات.....	۱
۱-۱) مقدمه.....	۲
۲-۱) کلیات.....	۲
۳-۱) تئوری کمانش تیموشنکو(تئوری کلاسیک پوسته‌ها).....	۳
۴-۱) تئوری غیر خطی دائل.....	۵
۵-۱) تئوری غیر خطی فلوگه- لور- بایرن.....	۸
۶-۱) تئوری غیر خطی ساندرس-کویتز.....	۸
۷-۱) تئوری غیر خطی دائل برای پوسته‌های کم عمق.....	۹
۸-۱) مرور مقاله‌ها.....	۹
۹-۱) جمع‌بندی.....	۱۹
فصل دوم - استخراج معادلات تعادل و پایداری.....	۲۰
۱-۲) مقدمه.....	۲۱
۲-۲) تئوری تغییر شکل برشی.....	۲۱
۳-۲) استخراج معادلات تعادل.....	۲۳
۴-۲) استخراج معادلات پایداری.....	۲۸
۵-۲) جمع‌بندی.....	۳۱
فصل سوم - حل معادلات به روش تحلیلی.....	۳۲
۱-۳) مقدمه.....	۳۳
۲-۳) حل معادلات تعادل.....	۳۳
۳-۳) حل معادلات پایداری.....	۳۷
۴-۳) جمع‌بندی.....	۴۰
فصل چهارم - حل مسئله کمانش به روش عددی.....	۴۱
۱-۴) مقدمه.....	۴۲
۲-۴) مدل سازی.....	۴۲
۳-۴) جمع‌بندی.....	۴۶
فصل پنجم - بررسی نتایج.....	۴۷
۱-۵) مقدمه.....	۴۸
۲-۵) مقایسه نتایج حل تحلیلی با حل عددی.....	۴۸
۳-۵) مقایسه نتایج حل تحلیلی با مراجع دیگر.....	۶۱

۶۴ جمع بندی (۴-۵)
۶۵ فصل ششم - جمع بندی و پیشنهادهای
۶۶ (۱-۶) مقدمه
۶۶ (۲-۶) جمع بندی
۶۶ (۳-۶) پیشنهادهای
۶۸ پیوست الف - مقدمه ای بر تئوری اغتشاشات
۷۱ مراجع

فهرست اشکال:

- شکل (۱-۱) یکی از شکل مدهای کمانش بر طبق تئوری تیموشنکو..... ۴
- شکل (۲-۱) تاثیر ضخامت بر روی شکل مد کمانش الف-پوسته ضخیم ب-پوسته نازک..... ۵
- شکل (۳-۱) شماتیک آزمایشگاهی پوسته..... ۱۷
- شکل (۴-۱) شکل مد کمانش با زمان انتشار موجهای مختلف..... ۱۹
- شکل (۱-۲) محورهای مختصات برای پوسته استوانه‌ای..... ۲۲
- شکل (۲-۲) تغییر شکل پوسته پس از بارگذاری..... ۲۹
- شکل (۱-۴) المان SHELL 93 در محیط انسیس..... ۴۲
- شکل (۲-۴) مدل شبکه‌بندی شده یک پوسته استوانه‌ای در محیط انسیس..... ۴۳
- شکل (۳-۴) تغییرات جابجایی طولی برای نقطه وسط پوسته با افزایش بار..... ۴۴
- شکل (۴-۴) تغییرات جابجایی شعاعی برای نقطه وسط پوسته با افزایش بار..... ۴۴
- شکل (۵-۴) شکل مدهای کمانش برای یک حالت خاص..... ۴۵
- شکل (۶-۴) المان PLANE82 در محیط انسیس..... ۴۵
- شکل (۱-۵) جابجایی طولی صفحه میانی برای ضخامت یک میلی‌متر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی..... ۴۹
- شکل (۲-۵) جابجایی شعاعی برای ضخامت یک میلی‌متر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی..... ۴۹
- شکل (۳-۵) جابجایی طولی صفحه میانی برای ضخامت پنج میلی‌متر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی..... ۵۰
- شکل (۴-۵) جابجایی شعاعی برای ضخامت پنج میلی‌متر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی..... ۵۰
- شکل (۵-۵) جابجایی طولی صفحه میانی برای ضخامت ده میلی‌متر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی..... ۵۱
- شکل (۶-۵) جابجایی شعاعی برای ضخامت ده میلی‌متر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی..... ۵۱
- شکل (۷-۵) جابجایی طولی در راستای ضخامت در نزدیکی مرز ($x^*=0.002$) ضخامت یک میلی‌متر..... ۵۲
- شکل (۸-۵) جابجایی طولی در راستای ضخامت در نزدیکی مرز ($x^*=0.002$) ضخامت پنج میلی‌متر..... ۵۲
- شکل (۹-۵) جابجایی طولی در راستای ضخامت در نزدیکی مرز ($x^*=0.002$) ضخامت ده میلی‌متر..... ۵۳
- شکل (۱۰-۵) جابجایی طولی در راستای ضخامت در وسط پوسته ($x^*=0.002$)..... ۵۳
- شکل (۱۱-۵) جابجایی شعاعی در راستای ضخامت در وسط پوسته ($x^*=0.002$)..... ۵۴
- شکل (۱۲-۵) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل عددی و تحلیلی نسبت به ضخامت برای مقادیر ثابت طول و شعاع..... ۵۵
- شکل (۱۳-۵) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل عددی و تحلیلی نسبت به طول برای مقادیر ثابت ضخامت و شعاع..... ۵۶

- شکل (۵-۱۴) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل عددی و تحلیلی نسبت به شعاع برای مقادیر ثابت طول و ضخامت ($h=2\text{mm}$)..... ۵۶
- شکل (۵-۱۵) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل عددی و تحلیلی نسبت به شعاع برای مقادیر ثابت طول و ضخامت ($h=5\text{mm}$)..... ۵۷
- شکل (۵-۱۶) بررسی تاثیر ضریب R/h بر مقدار بار کمانش در مقایسه با روش عددی ۵۸
- شکل (۵-۱۷) تغییرات بار کمانش نسبت به ضخامت برای طول‌های مختلف..... ۵۹
- شکل (۵-۱۸) تغییرات بار کمانش نسبت به طول برای ضخامت‌های مختلف..... ۶۰
- شکل (۵-۱۹) تغییرات بار کمانش بر حسب شعاع‌های مختلف..... ۶۰
- شکل (۵-۲۰) تغییرات بار کمانش بر حسب شعاع برای ضخامت‌های مختلف..... ۶۱
- شکل (۵-۲۱) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل تحلیلی و رابطه (۶-۱) نسبت به ضخامت برای مقادیر ثابت طول و شعاع..... ۶۲
- شکل (۵-۲۲) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل تحلیلی و رابطه (۵-۱) نسبت به شعاع برای مقادیر ثابت طول و ضخامت..... ۶۳

فهرست جداول:

جدول (۵-۱) مقادیر تنش بحرانی برای پوسته با شعاع ۱۰ سانتیمتر و طول ۸۰ سانتیمتر..... ۶۳

مبانی تئوری و مرور مقالات

۱-۱) مقدمه:

در این فصل به بررسی رایج‌ترین تئوری‌های موجود در زمینه پوسته‌ها و کمانش آنها پرداخته شده است، معایب و محاسن هر تئوری مطرح شده و فرض‌های تئوری‌ها با یکدیگر مقایسه شده است، همچنین سعی شده است تا حد امکان به طور مختصر و مفید به بررسی مقالات و تحقیق‌هایی که در این زمینه تا کنون انجام شده است، پرداخته شود.

۱-۲) کلیات:

پوسته‌های استوانه‌ای کاربردهای بسیار وسیعی در صنعت دارند، برای مثال در مخازن، کپسول‌ها و... به طور وسیعی کاربرد این نوع پوسته‌ها مشاهده می‌شود. مطالعه بر روی پوسته‌ها به خصوص پوسته استوانه‌ای تاریخچه کهنی دارد به طوری که معادلات پایداری پوسته‌های استوانه‌ای از قبل از سال ۱۸۰۰ موجود بوده است، ولی برای نخستین بار به وسیله لورنز^۱ (۱۹۱۱) به طور خاص به بررسی رفتار کمانشی یک پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری پرداخته شد، سپس توسط ساوتول^۲ (۱۹۱۳) و فن میزز^۳ (۱۹۱۴) حل کمانش پوسته تحت فشار یکنواخت جانبی به دست آمد. فلوگه^۴ (۱۹۳۲) به بررسی رفتار پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری مرکب و همچنین تحت خمش پرداخت و روش‌هایی برای حل ارائه داد. اما چیزی که امروز بیش از هر تئوری و روشی مورد استفاده قرار می‌گیرد بسط روابط ساده‌ای است که برای پایداری استوانه تحت پیچش توسط دانل^۵ (۱۹۳۴) و شورین^۶ (۱۹۲۵) ارائه شد. دانل (۱۹۳۴) تئوری غیر خطی پوسته‌های خود را منتشر کرد که بر اساس فرضیات ساده شده‌ی پوسته‌های کم عمق بوده و به دلیل سادگی و دقت به طور وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در تئوری دانل عوامل زیادی همچون نیروهای اینرسی درون صفحه‌ای^۷، تغییر شکل‌های برشی و اینرسی‌های دورانی^۸ در نظر گرفته نمی‌شوند و به همین خاطر نتایج این تئوری فقط برای پوسته‌های نازک صادق و از دقت بالایی برخوردار است. از دیگر نواقص این تئوری آن است که، به غیر از یک سری جملات سینماتیک غیر خطی غالب، سایر جملات غیر خطی حذف می‌شوند.

¹ Lorenz

² Southwell

³ Von Mises

⁴ Flugge

⁵ Donnel

⁶ Schwerin

⁷ In-Plane Inertia

⁸ Rotary Inertia

فن کارمن^۱ و تسین^۲ (۱۹۴۱) یک مطالعه بر پایه تئوری دائل انجام دادند و تئوری غیر خطی وون کارمن را ارائه دادند. ساندرس^۳ (۱۹۶۳) یک تئوری بهبود یافته برای پوسته‌های استوانه‌ای بیان کرد که برای حالت کشش بیان شده بود. همان معادلات توسط کویتر^۴ (۱۹۶۶) دوباره تعیین گردید که به همین خاطر به آنها معادلات تئوری ساندرس-کویتر گفته می‌شود. بعدها این روابط در دستگاه منحنی‌الخط نیز فرمول بندی شد، که کاربرد بیشتری داشت. بر اساس تئوری ساندرس-کویتر هر سه جابجایی در معادلات حرکت ظاهر شدند. نقدی و نوردگرن^۵ (۱۹۶۳) بر اساس فرضیات کیرشهف تئوری غیر خطی خود را ارائه دادند. در سال ۱۹۸۵ تئوری غیر خطی تغییر شکل برشی مرتبه اول توسط ردی^۶ و چاندراشکارا^۷ به منظور کاربرد در پوسته‌های ضخیم لایه‌ای ارائه شد. [۱،۲،۳]

۱-۳) تئوری کمانش تیموشنکو (تئوری کلاسیک پوسته‌ها) [۴]:

تیموشنکو در روش خود برای به دست آوردن بار کمانش در یک پوسته استوانه‌ای که تحت فشار محوری متقارن قرار دارد مقدار جابجایی را در جهت شعاعی به صورت سینوسی در نظر می‌گیرد، در واقع این فرض بر این اساس استوار است که جابجایی‌ها در جهت شعاعی نسبت به محور مرکزی متقارن می‌باشند که تا حدودی صحیح است البته به شرط آنکه تمام شرایط از جمله بارگذاری، هندسه، شرایط مرزی و... همگی متقارن محوری بوده که این خود فرضی ایده آل است و وجود نواقص هندسی در پروفیل پوسته و شرایط محیطی دیگر به راحتی این تقارن را بر هم می‌زنند اما به صورت کلی فرض تقارن به عنوان یک نظریه تئوری تا حدود زیادی به واقعیت نزدیک است و تقریب مناسبی به حساب می‌آید. تیموشنکو در نظریه خود جابجایی شعاعی (w) را به صورت رابطه (۱-۱) در نظر می‌گیرد.

$$w = -A \sin \frac{m\pi x}{\ell} \quad (1-1)$$

رابطه اخیر برای جابجایی تنها یک رابطه تقریبی می‌باشد و در حقیقت با واقعیت در مواردی اختلاف زیادی دارد اما با این حال امروزه نیز در بسیاری از مقالات برای تعیین جابجایی‌ها از همین روش استفاده می‌شود. تیموشنکو در ادامه با استفاده از همین جابجایی مقادیر کرنش را به دست آورد، برای به دست آوردن مقدار

¹ Von Karman

² Tsien

³ Sanders

⁴ Koiter

⁵ Nordgren

⁶ Reddy

⁷ Chandrashekhara

کرنش‌ها در هنگامی که کمانش رخ داده است فرض می‌کند که مقدار تنش در طول زمان کمانش ثابت باقی می‌ماند.

با محاسبه انرژی کرنشی قبل و بعد از کمانش و همچنین محاسبه کار انجام شده توسط نیروی فشاری اعمالی و در نهایت با برابر قرار دادن اختلاف انرژی‌ها و کار انجام شده (روش انرژی) مقدار بار کمانش را به صورت رابطه (۲-۱) به دست می‌آورد. در این رابطه l طول پوسته، h ضخامت و m تعداد نیم موج‌های هر شکل مد پوسته می‌باشد.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{h} = D \left(\frac{m^2 \pi^2}{h \ell^2} + \frac{E}{a^2 D m^2 \pi^2} \right) \quad (\text{N/m}) \quad (2-1)$$

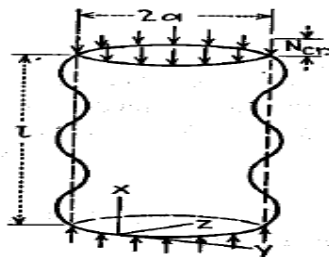
رابطه (۲-۱) نشان دهنده تمامی شکل موج‌های بار کمانش می‌باشد که با کمینه کردن آن نسبت به m می‌توان مقدار بار بحرانی را به صورت رابطه (۳-۱) به دست آورد:

$$\sigma_{cr} = \frac{2}{ah} \sqrt{EDh} = \frac{Eh}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (3-1)$$

که این مقدار در نیم موج زیر اتفاق می‌افتد:

$$\frac{m\pi}{\ell} = \sqrt[4]{\frac{Eh}{a^2 D}} \quad (4-1)$$

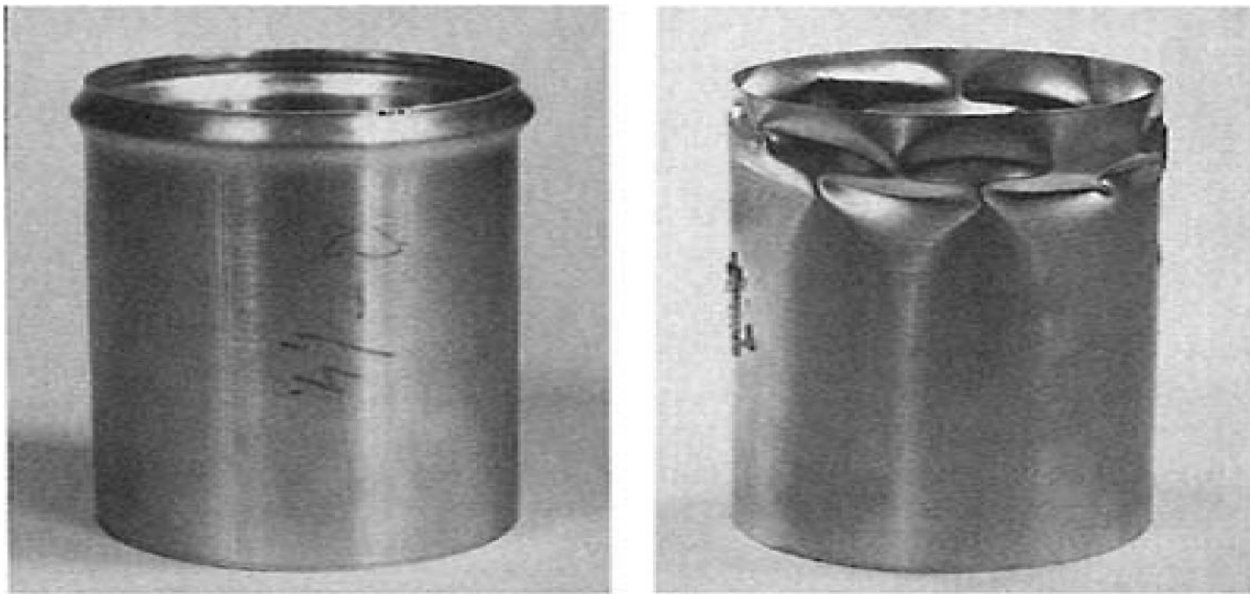
البته تیموشنکو برای به دست آوردن بار بحرانی از روش‌های دیگری نیز استفاده کرده است، برای مثال با استفاده از حل معادله دیفرانسیل حاکم بر پوسته متقارن رابطه دیگری برای بار بحرانی به دست آورده است که در نهایت نشان داده می‌شود که این دو رابطه به لحاظ کمی دارای مقادیری یکسان هستند. تمامی پارامترهای استفاده شده در روابط اخیر در شکل (۱-۱) که نشان دهنده یکی از شکل مدهای کمانش پوسته تیموشنکو می‌باشد مشخص است:



شکل (۱-۱) یکی از شکل مدهای کمانش بر طبق تئوری تیموشنکو [۴]

پس از انجام تست‌های آزمایشگاهی و عملی مشخص شد که تئوری کلاسیک یا تئوری تیموشنکو با واقعیت دارای اختلاف است به خصوص در مواردی که پوسته از نوع نازک بوده، هر چند در پوسته‌های ضخیم نیز این اختلاف مشاهده شده است اما در مواردی نتایج قابل قبول است، برای مثال در شرایط متقارن محوری پاسخ دارای تقریب خوبی می‌باشد. [۵]

آزمایشات تجربی نشان می‌دهد که در پوسته‌های نازک معمولاً در هنگام کمانش پوسته به صورت متقارن کمانش نمی‌کند در حالی که عکس این موضوع راجع به پوسته‌های ضخیم صادق است، شکل (۱-۲). البته باز هم فرض تقارن یک فرض ایده‌آل است که در بسیاری از مقالات برای پوسته‌های با هندسه متقارن و جنس متقارن مناسب و تقریب خوبی به حساب می‌آید.



شکل (۱-۲) تاثیر ضخامت بر روی شکل مد کمانش الف-پوسته ضخیم ب-پوسته نازک [۵]

۱-۴) تئوری غیر خطی دائل [۶]:

تئوری و فرضیات دائل از مهمترین و پرکاربردترین تئوری‌هاست که امروزه مرجع بسیاری از مقالات به صورت مستقیم یا غیر مستقیم می‌باشد. در فرضیات دائل در حوزه تغییر مکان‌های کوچک، چرخش‌ها حول محورهای درون صفحه‌ای^۱ کوچک فرض شده در نتیجه تمامی سینوس‌ها و کسینوس‌ها در روابط تعادل به ترتیب با خود زاویه و عدد یک جایگزین می‌شوند. عبارات درجه دوم نشان دهنده رابطه غیر خطی بین نیروهای برشی عرضی

^۱ In-plane Axial

کوچک و چرخش‌ها، به طور قابل اغمازی کوچک هستند. در فرضیات تعادل با نازک فرض کردن پوسته نیز از مقدار منتهی تنش برشی (Q_6) در معادلات تعادل در جهت محیطی صرفنظر می‌شود. به طور کلی می‌توان برای تئوری دائل فرضیات زیر را دسته‌بندی کرد:

الف- پوسته بسیار نازک است و ضخامت در مقابل شعاع و طول پوسته بسیار کوچک است.

ب- دامنه و شدت خیز شعاعی (W) هم مرتبه با ضخامت پوسته می‌باشد، یعنی خیز پوسته نیز در مقابل شعاع و طول پوسته بسیار کوچک است.

ج- شیب تغییرات خیز در هر نقطه کوچک است یا عبارت زیر در هر نقطه صادق است:

$$\left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \ll 1, \left| \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right| \ll 1$$

د- همه اجزای کرنش کوچک هستند و در نتیجه تمامی فرضیات و تئوری‌های الاستیسیته خطی قابل استفاده می‌باشند.

ه- فرضیات لوو-کیرشهف نیز صادق است، یعنی آنکه مقدار تنش در جهت عمود بر لایه میانی پوسته قابل چشم پوشی بوده و کرنش در این جهت با ضخامت پوسته رابطه خطی دارد و به صورت خطی با ضخامت تغییر می‌کند.

و- جابجایی‌ها در راستای طولی و محیطی (v و u) بسیار کوچک بوده و قابل صرفنظر است و در روابط کرنش-جابجایی تمامی ترم‌های غیر خطی بر اساس جابجایی شعاعی (W) می‌باشد.

در اکثر تئوری‌ها بعد از دائل تقریباً تمامی فرضیات دائل به غیر از فرض آخر معمولاً رعایت می‌شود که علت آن هم به دست آوردن معادلاتی دقیق و نزدیکتر به واقعیت است و وجود جابجایی‌ها برای بیان دقیق کرنش‌ها در روابط غیر خطی لازم است.

در فرضیات دائل روابط کرنش-جابجایی برای سطح میانی به صورت رابطه (۱-۵) در نظر گرفته می‌شود. که در آن u ، v و w به ترتیب جابجایی در راستای طول، محیط و شعاع بوده و x و θ به ترتیب محورهای مختصات در راستای طول و محیط می‌باشند.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ \gamma_{x\theta} &= \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (5-1)$$

روابط بالا شکل ساده شده معادلات دائل-مشتري-والسو می باشد که برای دستگاه استوانه ای ساده شده است. جایگزینی این روابط در معادلات بنیادین، محاسبه منتهجه ها و قرار دادن آنها در معادلات تعادل منجر به یک دستگاه با سه معادله دیفرانسیل غیر خطی بر حسب متغیرهای u و v و w می شود که به آن معادلات غیر خطی دائل گفته می شود.

معادلات دیگری نیز وجود دارد که با همان فرضیاتی که در ابتدا گفته شد با حذف همه عبارت های مرتبه دوم و بالاتر u و v و w به دست می آیند که به آنها معادلات خمشی خطی دائل می گویند و این معادلات که تشکیل یک دستگاه سه معادله و سه مجهول می دهند در رابطه (6-1) آورده شده است. با تعریف یک تابع تنش می توان دستگاه را به دو معادله و دو مجهول تبدیل کرد که این نیز یک دستگاه خطی می باشد. اگر در روابط زیر مقدار سختی خمشی صفر باشد معادلات غشایی مربوط به پوسته ها حاصل می شود. در رابطه زیر P بار خارجی می باشد.

$$\begin{aligned}\nabla^4 u &= -\frac{\nu}{a} w_{,xxx} + \frac{1}{a^3} w_{,x\theta\theta} \\ \nabla^4 v &= -\frac{2+\nu}{a^2} w_{,xx\theta} - \frac{1}{a^4} w_{,\theta\theta\theta} \\ D\nabla^8 w + \frac{1-\nu^2}{a^2} C w_{,xxxx} &= \nabla^4 p\end{aligned}\quad (6-1)$$

شکل غیر خطی معادلات تعادل به صورت رابطه (7-1) می باشد که به طور وسیعی برای تعیین تغییر مکان های بزرگ پوسته های استوانه ای استفاده می شود:

$$\begin{aligned}aN_{x,x} + N_{x\theta,\theta} &= 0 \\ aN_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} &= 0 \\ D\nabla^4 w + \frac{1}{a} N_{\theta} - \left(N_x w_{,xx} + \frac{2}{a} N_{x\theta} w_{,x\theta} + \frac{1}{a^2} N_{\theta} w_{,\theta\theta} \right) &= p\end{aligned}\quad (7-1)$$

در روابط بالا جمله های N همگی منتهجه های تنش می باشند که بر حسب جابجایی ها به صورت رابطه (8-1) تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}
N_x &= C(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) \\
N_\theta &= C(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) \\
N_{x\theta} &= C \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\theta} \\
C &= \frac{Eh}{1-\nu^2}
\end{aligned}
\tag{۸-۱}$$

۵-۱) تئوری غیر خطی فلوگه - لور - بایرن^۱ [۲]:

در این تئوری فرض آخر در تئوری دائل حذف می‌شود. در این تئوری تمامی جابجایی‌ها بر حسب جابجایی صفحه میانی تعریف می‌شوند. روابط کرنش - جابجایی برای صفحه میانی به صورت رابطه (۹-۱) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
\varepsilon_\theta &= \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{w}{a} + \frac{1}{2a^2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right)^2 \right\} + \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + w_0 \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\} \\
\gamma_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{a \partial \theta} + \frac{1}{a} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} w_0 \right\}
\end{aligned}
\tag{۹-۱}$$

در تمامی روابط بالا w_0 تعریف ریاضی نواقص هندسی می‌باشد. در واقع نواقص هندسی نوعی پیش‌بینی سوراخ، حفره و یا هر نوع نقص در پروفیل پوسته است و منجر به کاهش مقاومت پوسته در برابر بارگذاری می‌شود.

۶-۱) تئوری غیر خطی ساندرس - کویترا [۲]:

در این تئوری نیز مانند تئوری فلوگه از فرضیه آخر دائل صرف‌نظر می‌شود. از کرنش‌های برشی عرضی صرف‌نظر و روابط کرنش جابجایی برای صفحه میانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{a \partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
\varepsilon_\theta &= \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{w}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{a \partial \theta} - \frac{v}{a} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial u}{a \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{a \partial \theta} \left(\frac{\partial w}{a \partial \theta} - \frac{v}{a} \right) \\
\gamma_{x\theta} &= \frac{\partial u}{a \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{a \partial \theta} - \frac{v}{a} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{a \partial \theta} - \frac{v}{a} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{a \partial \theta}
\end{aligned}
\tag{۱۰-۱}$$

بر طبق این تئوری تغییرات پیچش و انحنا به صورت خطی می‌باشد.

¹ Flugge-Lure-Byrne

۷-۱) تئوری غیر خطی دائل برای پوسته‌های کم عمق^۱ [۲]:

به طور کلی اصطلاح کم عمق به پوسته‌هایی گفته می‌شود که شیب در مقایسه با شعاع انحنا آنها کوچک باشد. در واقع این تئوری یک توسعه و یا رشد برای تئوری دائل می‌باشد، مانند تئوری دائل نیروهای اینرسی درون صفحه‌ای قابل چشم پوشی بوده، از تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی چرخشی نیز صرفنظر می‌شود. در این تئوری فرض (ه) در تئوری دائل را در نظر نگرفته و در نتیجه از منته‌های تنش در جهت عمود بر صفحه میانی (Q_x و Q_θ) صرفنظر نمی‌شود. سایر منته‌ها با رابطه (۱۱-۱) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 N_x &= C \left\{ -\frac{\nu w}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{a \partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} \\
 N_\theta &= C \left\{ -\frac{w}{a} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{a \partial \theta} \right)^2 + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} \\
 N_{x\theta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\
 M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} \right) \\
 M_\theta &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{x\theta} &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x a \partial \theta} \\
 D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{۱۱-۱}
 \end{aligned}$$

Q_x و Q_θ بر حسب روابط بالا به دست می‌آیند. [۲]

۸-۱) مرور مقاله‌ها:

ان جی و لام [۷] (۱۹۹۹) به بررسی پایداری یک پوسته استوانه‌ای لایه‌ای پرداخته‌اند. آنها از سه تئوری دائل، لاو و فلوگه استفاده کرده‌اند. پوسته تحت بارگذاری مرکب ثابت و پریودیک محوری قرار دارد. ناپایداری دینامیک در پوسته‌های استوانه‌ای که تحت بارگذاری پریودیک قرار دارند شامل چهار نوع می‌شود: تشدید پارامتری مرتبه اول، تشدید پارامتری مرتبه‌ی بالا، مجموع ترکیب تشدیدها و تفاضل ترکیب تشدیدها. ناپایداری در پوسته زمانی رخ می‌دهد که یک رابطه بین فرکانس‌های طبیعی پوسته و همچنین فرکانس تحریک بار محوری باشد. دو نوع اول ناپایداری با نام تشدید پارامتری مستقیم و دو نوع دوم با نام تشدید پارامتری مرکب، معمولاً شناخته می‌-

¹ Shallow Shells