بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی دکتری رشته ریاضی گرایش جبر

مطالعه گراف ناجابجائی وابسته به یک گروه

استادان راهنما

دکتر علیرضا عبدالهی

دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی

پژوهشگر

عزیزاله آزاد

دی ماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی محض (نظریه گروهها) آقای عزیزا.. آزاد

تحت عنوان:

گراف ناجابجایی وابسته به یک گروه

در تاریخ ...۸۷/۱۰/۱۱..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالـی....... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی اکبر محمدی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکترشکرا.. سالاریان	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۴- استاد داور داخل گروه	دکترسعید اعظم	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۵- استاد داور خارج گروه	دکتر محمدرضا درفشه	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۶- استاد داور خارج گروه	دکتر حمیدرضا میمنی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء

.............................مهر و امضای مدیر گروه

سپاسگزاری:

سپاس آغازین سزاوار خداوندی است که بی عنایت او، هرگز خطی نگاشته نمی شد.

قدردان آنانم که مرا یاری نمودند تا این اثر به سرانجام رسد: استادان راهنمایم آقایان دکتر علی رضا عبدالهی، دکتر علی اکبر محمدی و پروفسور C.E.Praeger که نظرات صائب ایشان روشنگر راه اینجانب بود و آقای دکتر باقر نشوادیان که اینجانب را به ریاضیات علاقمند کرد.

همچنین تشکر از خانواده عزیزم که در این چند سال، صبورانه یاری ام کردند. در پایان از همدلی دوست خوبم آقای دکتر زرین نیز سپاسگزاری دارم.

تقدیم به:

نگاه مهربان مادرم

شکوه زندگیم دریا

و حلاوت هستیم هانی

چکیده

فرض کنیم G یک گروه و n, m اعداد طبیعی مثبت باشند. گوئیم G در شرط Comm(m,n) صدق می کند اگر برای زیر مجموعه های M و N از کاردینال های بترتیب m و n از G، عضوی از M با عضوی از N جابجا شوند. همچنین، زیر مجموعه N از G را یک زیر مجموعه از عناصر دو به دو جابجا نشونده گوئیم در صورتی که هر دو عضو متمایز از N باهم جابجا نشوند. اگر برای هر زیر مجموعه از عناصر دو به دو جابجا نشونده دیگر مانند M از G داشته باشیم $|N| \geq |M|$، آنگاه N را یک زیر مجموعه ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده نامیم و کاردینال چنین مجموعه ای را با نماد $\omega(G)$ نمایش می دهیم.

کاردینال متناوبی A۵ (از نظر مرتبه) اولین گروه ساده ناآبلی است و کاردینال زیر مجموعه ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده آن ۲۱ می باشد. در سال ۲۰۰۴ ع. عبدالهی و ع. محمدی گروههای حل ناپذیری که، کاردینال زیرمجموعه ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده آنها کمتر از ۲۱ است، را مشخص کرده اند.

دومین گروه ساده ناآبلی PSL(۲,۷) است که کاردینال زیرمجموعه ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده آن ۵۷ می باشد. ما ساختار گروههای حل ناپذیری که کاردینال زیر مجموعه ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده آنها کمتر از ۵۷ است را مشخص می کنیم.

برخی نتایج درباره گروه هائی که در شرط Comm(m,n) صدق می کند را ارائه می دهیم و با استفاده از این نتایج هنگامی که n, m دو عدد طبیعی باشند به طوری که $m+n \leq 10$ ساختار گروه هائی که در شرط فوق صدق می کنند را بررسی می کنیم.

سرانجام، برای ارائه یک زیرمجموعه از عناصر دو به دو جابجا نشونده در گروه GL(3,q) عناصری از گروه معرفی می کنیم که مرکز ساز آنها زیرگروه آبلی از GL(3,q) باشند.

زیرگروه دوری سینگر و زیرگروه دوری شبه سینگر در گروه خطی عام فضای برداری با بعد ۳روی میدان گالوای GF(q) را معرفی می کنیم و توسط مولدهای چنین گروههائی، یک زیر مجموعه از عناصر دو به دو جابجا نشونده برای گروه خطی عام با درجه ۳ ارائه می دهیم.

همچنین عناصر تک توان در گروه GL(3,q) معرفی خواهیم کرد و مجموعه ای از تک توانها که دو به دو با هم جابجا نمی شوند را ارائه می دهیم.

در پایان، توسط عناصر مولدهای سینگر، مولدهای شبه سیگنر و تک توان ها زیر مجمو عه ماکزیمال از عناصر دو جابجا نشونده از GL(3,q) ارائه خواهیم داد.

واژه های کلیدی: گروه های ساده ناآبلی- گروه های خطی – زیرگروه دوری سینگر

فهرست مندرجات

فصل ۱

ساختار بعضی از گروههای حل ناپذیر با شرایط خاص

در این فصل زیرمجموعه ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده از یک گروه را معرفی می کنیم. گروه متناوبی A_5 (از نظر مرتبه) اولین گروه مینیمال ساده (یعنی گروه های ساده ناآبلی متناهی که تمام زیرگروه های سره آن حلپذیرند) است و کاردینال زیرمجموعهٔ ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده آن ۲۱ می باشد. در [۵] گروههای حل ناپذیری که، کاردینال زیرمجموعهٔ ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده آنها کمتر از ۲۱ است، مشخص شده‌اند. دومین گروه مینیمال ساده $PSL(2,7)$ است که کاردینال زیرمجموعهٔ ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده آن ۵۷ می باشد. در این فصل ساختار گروههای حل ناپذیری که کاردینال زیرمجموعهٔ ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده آنها کمتر از۵۷ است را مشخص می کنیم. ضمناً مقاله ارائه شده در [۲] مستخرج از این فصل می باشد.

۱.۱ تاریخچه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرمجموعه N از G را یک زیرمجموعه از عناصر دو به دو جابجا نشونده گوئیم در صورتی که هر دو عضو متمایز از N با هم جابجا نشوند. اگر برای هر زیرمجموعه از عناصر دو به دو جابجا نشونده مانند M از G داشته باشیم $|M| \geq |N|$، آنگاه N را یک زیرمجموعهٔ ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده نامیم و کاردینال چنین مجموعه‌ای را با نماد $\omega(G)$ نمایش می دهیم.

در سال ۱۹۷۵ پ . اردوش[۱] [۲۱] برای اولین بار گراف ناجابجایی وابسته به یک گروه را به صورت زیر معرفی کرد:

فرض کنیم $Z(G)$ مرکز گروه G باشد. رئوس گراف ناجابجایی وابسته به G را مجموعه $G \setminus Z(G)$ در نظر گرفته و دو راس متمایز y, x بهم وصل می شوند اگر با هم جابجا نشوند.

با توجه به تعریف گراف کامل، رئوس زیرگراف کامل از گراف وابسته به گروه G یک زیرمجموعه از عناصر دو به دو جابجا نشونده از گروه G است و برعکس، اگر N یک زیرمجموعه از عناصر دو به دو جابجا نشونده از G باشد، آنگاه عناصر N رئوس یک زیرگراف کامل از گراف وابسته به گروه G را تشکیل می دهند. از این رو در بین تمام زیرگراف های کامل از گراف وابسته به گروه G، زیرگراف کاملی که مجموعه رئوس آن دارای بیشترین عضو باشد را، یک زیرمجموعه ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده از گروه G می نامیم. در واقع عدد خوشه‌ای گراف وابسته به گروه G با کاردینال زیرمجموعه ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده از گروه G یعنی $\omega(G)$

[۱] P. Erdös

مساوی است.

پ . اردوش در [۲۱] سوال زیر را مطرح کرد:

«اگر گراف ناجابجایی گروه G دارای زیر گراف کامل نامتناهی نباشد، آیا کاردینال زیرگراف های کامل گراف وابسته G کراندار متناهی است؟» بی. اچ. نویمن پس از یک سال به سوال فوق جواب مثبت داد و نشان داد $\omega(G)$ متناهی است اگر و فقط اگر گروه خارج قسمتی $\frac{G}{Z(G)}$ متناهی باشد [۲۱].

ال. پایبر در [۲۳] رابطه جالبی بین کاردینال زیرمجموعه ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده و کاردینال بزرگترین کلاس مزدوجی گروه متناهی G به دست آورده است. از این پس نماد $k(G)$ را برای کاردینال بزرگترین کلاس مزدوجی G به کار می بریم.

قضیه ۲.۱.۱. [۲۳] فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت

$$k(G) \leq ۴(\omega(G))^۲$$

همچنین دی. سگال [۲] و ای. شالف [۳] در [۲۷]، رابطه‌ای بین مرتبه گروهی که دارای زیر گروه نرمال آبلی غیربدیهی نیست و کاردینال بزرگترین کلاس مزدوجی آن به دست آورده اند:

قضیه ۳.۱.۱. [۲۷] فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، اگر G دارای زیر گروه نرمال آبلی غیربدیهی نباشد، آنگاه $|G| < (k(G))^۴$.

در سال ۲۰۰۵، ع. عبدالهی [۴] و سایرین در [۳] خواصی از گراف های ناجابجایی را مورد مطالعه قرار دادند و

[۲] D. Segal

[۳] A. Shalev

[۴] A. Abdollahi

سوال زیر را مطرح کردند.

« اگر G و H دو گروه ناآبلی باشند به طوری که گراف های ناجابجایی وابسته به آنها با هم یکریخت باشند، آیا $|G| = |H|$ ؟ »

آنها نشان دادند پاسخ سوال فوق برای بعضی از گروه ها مثبت است.

در [۵] گروههای حل ناپذیری که، کاردینال زیرمجموعهٔ ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده آنها کمتر از ۲۱ است، مشخص شده است.

قضیه ۴.۱.۱. [۵]. **فرض کنیم G یک گروه حل ناپذیر باشد. در این صورت $\omega(G) \leq ۲۱$ اگر و فقط اگر $G \cong Z(G) \times A_5$، که در آن A_5 گروه متناوبی از درجه ۵ می باشد.**

همچنین در [۵]، رابطه بین طول حل پذیری یک گروه ناآبلی و کاردینال زیرمجموعهٔ ماکزیمال‌از عناصر دو به دو جابجا نشونده آن به دست آمده است.

قضیه ۵.۱.۱. **فرض کنیم G یک گروه حل پذیر با طول حل پذیری d باشد طوری که $\omega(G) \leq n$. در این صورت اگر $n \in \{۱, ۲\}$، آنگاه $d = ۱$ و اگر $n \geq ۲$، آنگاه $d \leq ۲n - ۱$.**

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. بزرگترین زیرگروه نرمال حل پذیر از G را زیرگروه رادیکال حل پذیر نامیم و با نماد $Sol(G)$ نمایش می دهیم.

در این فصل قضیه ۴.۱.۱ را به شرح زیر توسیع خواهیم داد.

قضیه ۷.۱.۱. **فرض کنیم G یک گروه حل ناپذیر باشد و $\omega(G) \leq ۵۷$. در این صورت G با یکی از گروه های زیر یکریخت است:**

۱- $Z(G) \times PSL(۲,p)$، که در آن ۷ ، ۵ $= p$

۲- $Z(G)SL(۲,p)$، که در آن ۷ ، ۵ $= p$

۳- $G''\langle a\rangle Sol(G)$، که در آن $a^۲ \in Z(G)$ و G'' یکی از دو گروه $SL(۲,۵)$ یا $A_۵$ است.

۴- $G''\langle a\rangle Z(G)$، که در آن $a^۲ \in Z(G)$ و G'' یکی از دو گروه $SL(۲,۷)$ یا $PSL(۲,۷)$

۲.۱　بررّسی برخی گروه های ساده و نیمه ساده

در این بخش قضیه ۵.۱.۱ را برای گروه های ساده و نیمه ساده اثبات می کنیم.

لم ۱.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه ساده ناآبلی باشد و $\omega(G) \leq ۵۷$. در این صورت G یکریخت با $A_۵$ یا $PSL(۲,۷)$ است.

اثبات. با استفاده از نتیجه بی. اچ. نویمن [۵] در [۲۱]، $\frac{G}{Z(G)}$ یک گروه متناهی است. چون G یک گروه ساده ناآبلی است داریم ۱ $= Z(G)$. بنابراین G متناهی است. فرض کنیم M گروهی با کمترین مرتبه باشد که در شرایط قضیه صدق کند و با هیچ یک از گروه های $A_۵$ و $PSL(۲,۷)$ یکریخت نباشد. پس هر بخش ساده ناآبلی واقعی از M یکریخت با $A_۵$ یا $PSL(۲,۷)$ است. با توجه به گزاره ۴ از [۹]، M با یکی از گروههای زیر یکریخت است:

$PSL(۲,۲^m)$، ۴ $= m$ یا یک عدد اول است،

$PSL(۲,۳^p)$، $PSL(۲,۵^p)$، $PSL(۲,۷^p)$، p عدد اول است،

[۵] B. H. Neumann

$PSL(۲,p)$، $p > ۷$،

$PSL(۳,۳)$، $PSL(۳,۵)$، $PSL(۳,۷)$،

$PSU(۳,۳)$، $PSU(۳,۴)$، $PSU(۳,۷)$،(گروه یکانی خاص تصویری با بعد ۳ روی میدانی بترتیب ۳، ۴ و ۷ عضوی)

$Sz(۲^p)$، p عدد اول فرد است.

اکنون، برای هر عدد اول p و عدد طبیعی $n \geq ۰$، با استفاده از لم ۴.۴ از [۳]، داریم $\omega(PSL(۲,p^n)) = p^{۲n} + p^n + ۱$. بنابراین از گروه های تصویری خاص از درجه ۲ تنها $PSL(۲,۲^۲) \cong A_۵$ و $PSL(۲,۷)$ باقی می ماند.

برای عدد اول p که مرتبه گروه G را بشمارد، تعداد p- زیرگروه های سیلوی G را با نماد $\nu_p(G)$ نمایش می دهیم.

اگر عدد اول p مرتبه گروه G را بشمارد به طوری اشتراک هر دو تا p- زیرگروه سیلو متمایزی G بدیهی باشد، آنگاه، با استفاده از لم ۳ از [۱۵]، داریم $\nu_p(G) \leq ۵۷$ $(*)$.

حال $PSL(۳,۳)$ دارای مرتبه $۱۳ \times ۳^۳ \times ۲^۴$ است، پس $\nu_{۱۳}(PSL(۳,۳)) \geq ۵۷$.

$PSL(۳,۵)$ دارای مرتبه $۳۱ \times ۵^۳ \times ۳ \times ۲^۵$ است، پس $\nu_{۳۱}(PSL(۳,۵)) \geq ۵۷$.

$PSL(۳,۷)$ دارای مرتبه $۱۹ \times ۷^۳ \times ۳ \times ۲^۵$ است، پس $\nu_{۱۹}(PSL(۳,۷)) \geq ۵۷$.

$PSU(۳,۳)$ دارای مرتبه $۷ \times ۳^۳ \times ۲^۵$ است، پس $\nu_۷(PSU(۳,۳)) \geq ۵۷$.

$PSU(۳,۴)$ دارای مرتبه $۱۳ \times ۵^۲ \times ۳ \times ۲^۶$ است، پس $\nu_{۱۳}(PSU(۳,۴)) \geq ۵۷$.

$PSU(۳,۷)$ دارای مرتبه $۴۳ \times ۷^۳ \times ۳ \times ۲^۷$ است، پس $k > ۰$ ای هست که $\nu_{۴۳}(PSU(۳,۷)) = ۱ + ۴۳k$ و

چون ۴۴ مرتبه گروه $PSU(۳,۷)$ را نمی شمارد، پس $\nu_{۴۳}(PSU(۳,۷)) \geq ۵۷$.

$Sz(۲^p)$، با استفاده از قضیه ۳.۱۰ از فصل XI در [۱۹]، دارای مرتبه $(۲^{۲p}+۱)\times(۲^p-۱)\times ۲^{۲p}$ است و لذا $\nu_۲(Sz(۲^p)) = ۲^{۲p}+۱ \geq ۶۵$. اکنون با استفاده از $(*)$ اثبات کامل می گردد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. گوئیم G کاملاً کاهش پذیر است اگر به صورت حاصل ضرب خانواده‌ای (ممکن است نامتناهی باشد) از گروه های ساده باشد.

از این پس گروه های کاملاً کاهش پذیر را CR- گروه نامیم. بدیهی است که مرکز یک CR- گروه به صورت حاصل ضربی از گروه های آبلی است. از اینرو G یک CR- گروه بدون مرکز است اگر وفقط اگر به صورت حاصل ضربی از گروه های ساده ناآبلی باشد.

لم ۳.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت G دارای CR- زیرگروه نرمال ماکزیمال بدون مرکز یکتا است. به علاوه این زیرگروه مشخصه است.

اثبات. به لم ۱۷.۳.۳ در [۲۵] رجوع کنید.

در گروه G به CR- زیرگروه نرمال ماکزیمال بدون مرکز، CR- رادیکال بدون مرکز گوئیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. گوئیم G نیمه ساده است اگر G دارای زیرگروه آبلی نرمال غیربدیهی نباشد.

با توجه به تعاریف فوق هر CR- گروه بدون مرکز یک گروه نیمه ساده است.

لم ۵.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه نیمه ساده باشد و $\omega(G) \leq ۵۷$. در این صورت G یکریخت با $A_۵$، $S_۵$، $PSL(۲,۷)$ یا $PGL(۲,۷)$ است.

اثبات. با استفاده از نتیجه بی. اچ. نویمن [۶] در [۲۱]، $\frac{G}{Z(G)}$ یک گروه متناهی است. چون G یک گروه نیمه ساده است داریم $Z(G) = ۱$. فرض کنیم R زیرگروه CR- رادیکال بدون مرکز از G باشد. پس R حاصل ضرب تعداد متناهی از گروه های ساده ناآبلی متناهی است، مانند $R = S_۱ \times S_۲ \times \cdots \times S_m$. از این که $\omega(G) \leq ۵۷$، برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, m\}$ داریم $\omega(S_i) \leq ۵۷$. اکنون با استفاده از لم ۱.۲.۱، برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, m\}$، $S_i \cong A_۵$ یا $S_i \cong PSL(۲, ۷)$. چون $\omega(A_۵) \leq ۲۱$، با در نظر گرفتن لم ۲.۲ در [۵] نتیجه می شود که $m = ۱$. بنابراین $R \cong A_۵$ یا $R \cong PSL(۲, ۷)$. می دانیم که $C_G(R) = ۱$ و G را می توان در $Aut(R)$ نشاند. اگر $R \cong A_۵$، آنگاه $Aut(R) = S_۵$ و لذا $G \cong A_۵$ یا $G \cong S_۵$.

اگر $R \cong PSL(۲, ۷)$، آنگاه $Aut(R) = PGL(۲, ۷)$ و لذا $G \cong PSL(۲, ۷)$ یا $G \cong PGL(۲, ۷)$. بدین ترتیب اثبات کامل می شود.

نتیجه **۶.۲.۱.** فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\omega(\frac{G}{Sol(G)}) \leq ۵۷$. در این صورت $\frac{G}{Sol(G)}$ یکریخت با $A_۵$، $S_۵$، $PSL(۲, ۷)$ یا $PGL(۲, ۷)$ است.

اثبات. برای هر گروه دلخواه G، $\frac{G}{Sol(G)}$ دارای زیرگروه نرمال آبلی غیربدیهی سره نیست، یعنی G نیمه ساده است. حال با استفاده از لم ۲.۲.۱، اثبات کامل می گردد.

---

[۶] B. H. Neumann

۳.۱ بررّسی برخی گروه های حل ناپذیر

در این بخش قضیه ۵.۱.۱ را برای گروه های حل ناپذیر اثبات می کنیم. برای این منظور، با استفاده از نتیجه ۴.۲.۱، ساختار گروه G که برای آن $\frac{G}{Sol(G)}$ یکریخت با A_5، S_5، $PSL(2,7)$ یا $PGL(2,7)$ است، را به طور جداگانه بررّسی می کنیم. برای این کار لم زیر نیاز است.

لم ۱.۳.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. اگر G دارای زیرگروه مرکزی B باشد که مرتبه آن بیشتر از ۲ نیست و $\frac{G}{B} \cong A_5$، آنگاه $G \cong B \times A_5$ یا $G \cong SL(2,5)$.

اثبات. به لم ۴.۲ از [۵] رجوع شود.

لم ۲.۳.۱. فرض کنیم G یک گروه حل ناپذیر متناهی باشد به طوری که $\omega(G) \leq 57$ و $\frac{G}{Sol(G)} \cong A_5$. در این صورت $G \cong Z(G) \times A_5$ یا $G \cong Z(G)SL(2,5)$.

اثبات. قرار می دهیم $S = Sol(G)$. فرض کنیم که $C_G(S) = G$. پس $S \leqslant Z(G)$ و با در نظر گرفتن تعریف S، $S = Z(G)$. حال توسیع مرکزی $Z(G) \to G \to \frac{G}{Z(G)}$ را در نظر می گیریم. با استفاده از برهان لم ۴.۲ از [۵]، داریم که مرتبه $K = G' \cap Z(G)$ بیشتر از ۲ نیست، بنابراین $G = G'Z(G)$ و $\frac{G'}{K} \cong A_5$. حال از لم ۱.۳.۱ می توان نتیجه گرفت که زیرگروهی مانند L از G' موجود است به طوری که $G' = K \times L$ و $L \cong A_5$ یا $G' \cong SL(2,5)$. پس $G = G'Z(G) = LKZ(G) = LZ(G)$ و بدیهی است که $L \cap Z(G) = 1$ یا $G = G'Z(G) \cong SL(2,5)Z(G)$. لذا $G \cong A_5 \times Z(G)$ یا $G = Z(G)SL(2,5)$.

اکنون فرض می کنیم $C_G(S)$ یک زیرگروه سره (نرمال) از G باشد. اگر $C_G(S)$ حل پذیر باشد، آنگاه $C_G(S) \leqslant S$. حال با استفاده از تبصره ۹.۲ از [۵] داریم $\frac{G}{S} = \bigcup_{i=1}^{21} P_i$، که در آن P_1، ...، P_{21} تمام زیرگروه

های سیلو از $\frac{G}{S}$ هستند. فرض کنیم $P_{۱}$، ...، $P_{۱۰}$ ۳- زیرگروه های سیلو، $P_{۱۱}$، ...، $P_{۱۷}$، ۵- زیرگروه های سیلو و $P_{۱۸}$، ...، $P_{۲۱}$، ۲- زیرگروه های سیلو از G باشند. حال اگر برای هر $i \in \{۱,\dots,۲۱\}$ عضو $a_iS \in P_i \backslash \{۱\}$ را انتخاب کنیم، آنگاه مجموعه $\{a_۱S,\dots,a_{۲۱}S\}$ یک زیرمجموعه ماکزیمال از عناصر دو به دو جابجا نشونده از $\frac{G}{S}$ است و $P_i = C_{\frac{G}{S}}(a_iS)$.

برای $i \in \{۱,\dots,۱۰\}$ داریم $|a_iS| = ۳$ و برای $i \in \{۱۱,\dots,۱۷\}$ داریم $|a_iS| = ۵$. پس $C_{\frac{G}{S}}(a_iS) = \frac{\langle a_i\rangle S}{S} = \langle a_iS\rangle$. از این که، برای $i \in \{۱,\dots,۱۷\}$، $a_i \notin S$ و $|a_iS|$ اول است لذا، برای $i \in \{۱,\dots,۱۷\}$ داریم $a_i \notin C_G(S)$. بنابراین، برای $i \in \{۱,\dots,۱۷\}$، عضوی مانند $s_i \in S$ موجود است به طوری که $a_is_i \neq s_ia_i$. اکنون می توان بررسی کرد که مجموعه

$$\{a_i, a_is_i, a_i^۲s_i \ : \ i = ۱,\dots,۱۰\} \cup \{a_j, a_j^۲s_j, a_j^۳s_j, a_j^۴s_j \ : \ i = ۱۱,\dots,۱۷\}$$

یک زیرمجموعه از عناصر دو به دو جابجا نشونده از G است. پس می توان نتیجه گرفت $\omega(G) \geq ۶۰$ که این یک تناقض است.

حال فرض می کنیم $C_G(S)$ حل پذیر نباشد. پس $\frac{C_G(S)S}{S}$ نیز حل پذیر نیست و لذا $C_G(S)S = G$. فرض کنیم N یک زیرگروه حل ناپذیر از $C_G(S)$ با کمترین مرتبه باشد. در این صورت داریم $NS = G$،

$$\frac{N}{N \cap S} \cong \frac{NS}{S} = \frac{G}{S} \cong A_۵$$

، $Sol(N) = N \cap S$ و هر زیرگروه سره از N حل پذیر است.

اگر $C_N(Sol(N)) = S$، آنگاه $Z(N) = Sol(N)$. با استفاده از قسمت اول اثبات، $N = Z(N) \times A_۵$ یا $N = Z(N)SL(۲,۵)$ که نتیجه می شود $G = SN = S \times A_۵$ یا $G = SSL(۲,۵)$. اگر $G = S \times A_۵$،