دانشکده علوم

گروه ریاضی محض

زیرمدول‌های خودتوان و پوچ‌توان از مدول‌های ضربی

استاد راهنما

دکتر احمد یوسفیان دارانی

اساتید مشاور

دکتر عادل کاظمی

دکتر احمد خوجالی

توسط

فاطمه سهیل‌نیا

پاییز ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

گروه ریاضی محض

زیرمدول های خودتوان و پوچ توان از مدول های ضربی

پژوهشگر

فاطمه سهیل نیا

پایان‌نامه برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

از

دانشگاه محقق اردبیلی

اردبیل - ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: عالی

دکتر احمد یوسفیان دارانی (استاد راهنما و رئیس کمیته داوران): .... استادیار

دکتر عادل کاظمی (استادمشاور) .... استادیار

دکتر احمد خوجالی (استاد مشاور) .... استادیار

دکتر کمال بهمن پور (داورخارجی) .... استادیار

دکتر جعفر اعظمی (داورداخلی) .... استادیار

مهرماه ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادر عزیزتر از جانم و

خواهر و برادر عزیزم

سپاسگزاری

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

سپاس خدائیرا که اول است و پیش از او اولی نبوده و آخر است و پس از او آخری نباشد. و سپاس خدای را بهر چه که او را نزدیکترین فرشتگانش و گرامی‌ترین آفریدگانش و پسندیده‌ترین ستایش کنندگانش ستوده‌اند. گرچه من نتوانم به آن اندازه و به آن جور سپاسگذار باشم، ولی چنین می‌گویم تا شاید خدای تعالی بفضل و احسانش مرا در زمره ایشان داخل نماید. سپاسی که حد آن را انتها و عدد آن را شمارش و بپایان آن دسترسی و مدت آن را بریدنی نیست. سپاسی ابدی و همیشگی.

بعد از **حمد و سپاس خدای** *منان که توفیق کسب علم و دانش را تا به امروز، روزی زندگی من قرار داده، بر خود لازم می‌دانم از* **پدر و مادر** *مهربانم که در تمام مراحل زندگیم از هیچگونه تلاشی در راه تحصیل اینجانب دریغ نکرده و همواره مشوق من در ادامه تحصیل و چراغ هدایتی برایم بودند، صیمیمانه تشکر کنم، و بر دستان پر مهرشان به نشانه سپاس بوسه می‌زنم. از* **خواهر عزیزم الناز و برادر مهربانم علی رضا** *برای تمام مهربانی‌هایشان ممنونم.*

همچنین بر خود واجب می‌دانم از **استاد ارجمندم جنات آقای دکتر احمد یوسفیان دارانی** *که در درجه اول معلم اخلاق من بودند و در درجه دوم با صبر و بردباری در پیشرفت علمی من کوشیدند و همواره مشوق من بوده‌اند و با تجارب گرانمایه‌ی خود راهنما و راهگشای اینجانب بودند، نهایت سپاسگزاری و قدردانی را داشته باشم، و برای ایشان آرزوی سلامتی و موفقیت روزافزون دارم و همواره بر شاگردی آن استاد بزرگوار برخود می‌بالم.*

از **جناب آقای دکتر کمال بهمن‌پور و جناب آقای دکتر جعفر اعظمی** *که داوری این پایان‌نامه را تقبل نمودند، سپاسگزارم و توفیقات روز افزون برای ایشان از خداوند منان خواهانم.*

همچنین از **سرکار خانم دکتر نسرین اقبالی** *که در پاره‌ای از لحظات با گشاده‌رویی پاسخگوی مشکلات من بودند، و با تجربیات گرانمایه‌ی خود، من را راهنمایی می‌نمودند، صمیمانه تشکر می‌کنم.*

فاطمه سهیل‌نیا

پاییز ۱۳۸۹

نام خانوادگی: سهیل‌نیا　　　　　　　　　　نام: فاطمه

عنوان پایان‌نامه:
زیرمدول‌های خودتوان و پوچ‌توان از مدول‌های ضربی

استاد راهنما: دکتر احمد یوسفیان دارانی

اساتید مشاور: دکتر عادل کاظمی، دکتر احمد خوجالی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　رشته: ریاضی محض　گرایش: جبر
دانشگاه: محقق اردبیلی　دانشکده: علوم　تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۸۹/۷/۱۸
تعداد صفحه: ۱۴۸

کلید واژه‌ها :
زیرمدول خودتوان، مدول ضربی، زیرمدول پوچ‌توان، زیرمدول محض، مدول منظم ون نویمن، زیرمدول ۲ − جاذب، زیرمدول ۲ − جاذب ضعیف.

چکیده:
در این پایان‌نامه، همه حلقه‌ها جابجایی و یکدار و همه مدول‌ها یکانی در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$ مدول باشد. مدول M را ضربی می‌نامیم هرگاه به ازای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل I از R موجود باشد به‌طوریکه $N = IM$. هدف این پایان‌نامه بررسی مدول‌های ضربی منظم ون نویمن است.
ابتدا مقدمه‌ای در مورد زیرمدول‌های پوچ‌توان که تعمیمی از ایده‌آل‌های پوچ‌توان است بیان می‌شود و نشان می‌دهیم مدول ضربی وفادار با تولید متناهی، منظم ون نویمن است اگر و تنها اگر دارای عناصر ناصفر پوچ‌توان نباشد و بعد کرول آن صفر باشد. همچنین مشخص سازی جدیدی برای رادیکال زیرمدول‌های یک مدول ضربی ارائه می‌شود و بویژه نشان می‌دهیم رادیکال هر زیرمدول یک مدول ضربی نوتری، اشتراک تعداد متناهی زیرمدول‌های اول می‌باشد. بعلاوه تعمیم‌هایی از زیرمدول‌های اول، یعنی زیرمدول‌های ۲ − جاذب و زیرمدول‌های ۲ − جاذب ضعیف معرفی و مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

درک و شناخت زیباییها اساساً برای هر انسانی هیجان‌انگیز و لذت بخش است. از سوی دیگر، این درک و شناخت اگر به یک نفع و بهره‌ی عملی نیز منجر شود، هیجان‌انگیزتر و لذت بخش‌تر خواهد شد. به‌عبارت دیگر انسان به لحاظ حس زیبایی طلب خود از دانستن، به خودی خود، لذت می‌برد و به لحاظ سرشت منفعت طلب‌اش از دانستن برای نفعش مسرور می‌شود. **هنر** نتیجه آن حس زیبایی طلب انسان است و علم و تکنولوژی ماحصل این سرشت منفعت طلب. با دقت بیشتر می‌توان گفت که هنر علاوه بر ارضای حس زیبایی طلبی، دارای منافع و بهره‌های عملی فراوانی نیز هست و علم و تکنولوژی ، علاوه بر منافع و بهره‌های عملی، زیباییها و دلنوازیهایی نیز در بردارد. آنچه ماحصل نگاه زیبایی خواه بشر است یک حقیقت علمی یا تکنولوژیک است و نه هنری. حال در مورد حقایق ریاضیات چگونه باید داوری کرد؟ کدام مسئله ریاضی اصالتاً زیبا و پرفایده نیست؟

به نظر می‌رسد زیبایی اصیل حقایق ریاضی، هرگز مورد تردید واقع نشده است. اما تا قرن ۱۹ ، گمان می‌رفت که برخی از حقایق ریاضی فقط زیباست. لکن به زودی معلوم شد که آنچه علم جوان در آیینه نمی‌بیند پیر ریاضی در خشت خام می‌بیند. استفاده شیمیدانانی همچون **برودی** از نظریه گروه‌های جبری، در تحلیل‌های شیمی از جمله موارد نقصی بود که پارادایم **ریاضی همیشه نافع نیست** را دچار تردید نمود.

این تردید امروزه به حدی رسیده که می‌توان به حکم عقل ادعا کرد که **ریاضی هم زیباست و هم نافع.**

یکی از مباحثی که در سال‌های اخیر ذهن برخی از ریاضیدانان حاضر شاخه جبر را به خود مشغول نموده و هر ساله در مورد آن یافته‌های جدید خود را ارائه می‌دهند، پیرامون **مدول‌های ضربی** است.

مفهوم مدول‌های ضربی تعمیمی از ایده آل‌های ضربی است. ایده آل‌های ضربی اولین بار

توسط لارسن و مک‌کارتی [۱] بدین صورت ارائه شد، ایده‌آل I از حلقه‌ی R را ایده‌آل ضربی می‌نامند هرگاه به ازای هر ایده‌آل $J \subseteq I$، ایده‌آل K از R موجود باشد به‌طوریکه $J = IK$. و حلقه‌ای که تمام ایده‌آل‌های آن ضربی باشد را حلقه‌ی ضربی می‌نامند. اما به نظر می‌رسد موری [۲] اولین بار ایده‌آل I را ضربی نامید در صورتی که به ازای هر جفت ایده‌آل $J \subset K$، ایده‌آل C از R موجود باشد به‌طوریکه $J = KC$. ریاضیدانان بسیاری از جمله کرول، موری و گیلمر [۳] از جهات مختلف حلقه‌های ضربی را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. با توجه به جستجوهایی که توسط اینجانب صورت گرفت، به نظر می‌رسد اولین بار فاضل مهدی [۴] در مقاله "On Multiplication modules" مدول M را ضربی نامید در صورتی که به ازای هر جفت زیرمدول $K \subset N$، ایده‌آل I از R موجود باشد به‌طوریکه $N = IM$. در واقع مدولی ضربی است که تمام زیرمدول‌های آن ضربی باشد. در ادامه‌ی کار، خود ایشان به همراه سورجت سینگ [۵] در سال ۱۹۷۹ در مقاله "Multiplication Modules" از سمت و سویی دیگر به مسئله نگریستند. در سال‌های بعد ریاضیدانان دیگری از جمله بارنارد، اسمیت، ال — بست و اسمیت [۶] مفهوم مدول ضربی را بدین‌گونه ارائه نمودند، $R-$ مدول M ضربی می نامند هرگاه به ازای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل I از R موجود باشد به‌طوریکه $N = IM$. در سال‌های اخیر در مورد مفاهیم مختلفی از علم جبر در حیطه‌ی مدول‌های ضربی مطالعاتی صورت گرفته و تقریباً هر ساله یافته‌های جدیدی در قالب مقالات منتشر می‌یابد. مفاهیمی از قبیل مدول‌های ضربی دوری، محض، حذفی و... . برای مطالعه‌ی بیشتر می‌توانید به مراجع [۷، ۸، ۹، ۱۰] مراجعه نمائید.

---

[۱] Larsen and MacCarthy (1971)

[۲] Mori (1934)

[۳] Krull (1936), Mori (1932,1940), Gilmer (1972)

[۴] Fazel Mehdi (1974)

[۵] Surjet Singh

[۶] Barnard (1981), Smith (1988), EL-Bast and Smith (1988)

یکی دیگر از این مفاهیم، مفهوم **زیرمدول‌های خودتوان و پوچ‌توان** *است. این مفاهیم توسط مجید ام. علی [۱] ارائه شده است. مجید ام. علی به قضیه ۱.۱ که شامل ۱۰ قسمت معادل است، در مرجع [۱۰] اشاره نموده، به‌طوریکه به نتایج بسیار ارزنده‌ای در خصوص زیرمدول‌های خودتوان و محض از مدول‌های ضربی وفادار با تولید متناهی، می‌توانیم برسیم. به عنوان مثال، با شرایط مذکور، زیرمدول N از $R-$ مدول M محض است اگر و تنها اگر $(N :_R M)$ ایده‌آل محض در R باشد. N زیرمدول محض است اگر و تنها اگر N زیرمدول ضربی و خودتوان باشد. N زیرمدول محض است اگر و تنها اگر به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال P، $N_P = 0_P$ یا $N_P = M_P$.*

اساس این پایان نامه مبتنی بر گسترش مفاهیم زیرمدول‌های خودتوان و پوچ‌توان از مدول‌های ضربی است، که بر اساس مراجع [۳] و [۴۰] در شش فصل تنظیم شده است.

در فصل اول قضایا و تعاریف اساسی مورد نیاز در فصل‌های آتی را بیان می‌کنیم و نکاتی در مورد حلقه‌های منظم ون نویمن بیان می‌شود. و در نهایت مباحثی در خصوص رادیکال ایده‌آل‌ها ارائه می‌شود.

فصل دوم مدول‌های خودتوان و پوچ‌توان تعریف می‌شود و در قضایای ۲.۶ و ۲.۱۱ خصوصیات اولیه و اساسی مدول‌های مورد بحث بیان می‌شود و در نهایت نشان می‌دهیم اگر M یک $R-$ مدول ضربی وفادار باشد، $Nil(M)$ یک زیرمدول است و همچنین $Nil(M) = Nil(R)M = \bigcap_{P\in Spec(M)} P$.

در فصل سوم مفهوم مدول‌های منظم ون نویمن بیان می‌شود و مفاهیم عناصر خودتوان و عناصر منظم ون نویمن ارائه می‌شود. همچنین نشان می‌دهیم اگر M یک $R-$ مدول ضربی وفادار با تولید متناهی باشد، آنگاه M منظم ون نویمن است اگر و تنها اگر دارای عناصر ناصفر پوچ‌توان نباشد و بعد کرول آن صفر باشد. و به این نتیجه می‌رسیم که اگر $R-$ مدول M ضربی

[۱] Majid M. Ali (2004, 2008)

وفادار و منظم ون نویمن باشد، آنگاه R یک حلقه‌ی منظم ون نویمن است.

در فصل چهارم با بیان یک مشخص‌سازی برای رادیکال زیرمدول‌ها، نشان می‌دهیم مجموعه‌ی رادیکال زیرمدول‌ها، یک زیرمدول است و اگر M یک مدول ضربی باشد در آن صورت مجموعه رادیکال زیرمدول‌ها برابر است با رادیکال زیرمدول N. اگر N, K زیرمدول‌هایی از $R-$ مدول M باشند، آنگاه $M - rad(K \cap N) = M - radK \cap M - radN$. عکس این مطلب برقرار نمی‌باشد. این خصوصیت در مراجع [۳۰، ۲۹] بررسی شده است. در قضیه ۴.۵ برقراری این خصوصیت را در شرایط دیگری مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. و در انتها نشان می‌دهیم هر زیرمدول از $R-$ مدول ضربی نوتری از اشتراک تعداد متناهی زیرمدول اول تشکیل شده است.

در فصل پنجم با بیان مفاهیم اولیه و اساسی از روش ایده‌السازی که از مراجع [۲۳، ۱۲] بیان شده است، به تعمیم قضایای اصلی مرجع [۲۳] برای $R-$ مدول ضربی وفادار با تولید متناهی و ایده‌آل‌های اولیه در قضایای ۵.۲۱ و ۵.۲۳ می‌پردازیم.

در فصل ششم تعمیم‌هایی از زیرمدول‌های اول را ارائه می‌دهیم. نتایج این فصل همگی نتایج جدیدی می‌باشند که در مرجع [۴۰] قابل مشاهده می‌باشند. در این فصل مفاهیم زیرمدول‌های **۲− جاذب و ۲− جاذب ضعیف** ارائه می‌شوند. فرض کنید M یک $R-$ مدول و N زیرمدولی از M باشد. زیرمدول سره N از $R-$ مدول M را *زیرمدول ۲ − جاذب*[1] (۲ − *جاذب ضعیف*[2]) می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in R$ و $m \in M$، به‌طوریکه $abm \in N$ $(0 \neq abm \in N)$ آنگاه $ab \in (N :_R M)$ یا $am \in N$ یا $bm \in N$. یک زیرمدول ۲− جاذب یک زیرمدول ۲− جاذب ضعیف است. اما عکس این مطلب همواره برقرار نمی‌باشد. در این فصل نشان می‌دهیم اگر N یک زیرمدول ۲− جاذب ضعیف باشد و $(N :_R M)^2 N \neq 0$، آنگاه N یک زیرمدول ۲− جاذب است. همچنین نشان می‌دهیم، اگر N یک زیرمدول از $R-$مدول

[1] 2-absorbing submodule

[2] Weakly 2-absorbing submodule

دوری M باشد، آنگاه N یک زیرمدول ۲− جاذب است اگر و تنها اگر $(N:_R M)$ یک ایده‌آل ۲− جاذب باشد. در قضیه ۶.۲۴ نشان می‌دهیم اگر R یک حلقه، M یک $R-$ مدول دوری و N زیرمدول ۲ − جاذب در M باشد، در اینصورت یکی از حالات زیر برقرار است.

(۱) $M-radN=P$ یک زیرمدول اول است به‌طوریکه $P^{۲}\subseteq N$.

(۲) $(M-radN)^{۲}\subseteq N$ و زیرمدول‌های اول مینیمال از هم جدای $P_۱, P_۲$ از N وجود دارند به‌طوریکه $P_۱P_۲\subseteq N \quad , \quad M-radN=P_۱\cap P_۲$.

همچنین در قضیه ۶.۲۶، نشان می‌دهیم اگر N یک زیرمدول $P-$ اولیه از $R-$ مدول دوری M باشد، آنگاه N یک زیرمدول ۲ − جاذب است اگر و تنها اگر $(PM)^{۲}\subseteq N$.

۱ مقدمات و پیش‌نیازها

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل قضایا و تعاریف اساسی مورد استفاده در فصل‌های آتی بیان می‌شود. بویژه مباحثی در خصوص حلقه منظم ون نویمن و رادیکال ایده‌آل‌ها بیان می‌شود. در سراسر این پایان‌نامه تمام حلقه‌ها جابجایی و یکدار و تمام مدول‌ها یکانی در نظر گرفته شده است.

تعریف و نمادگذاری ۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و I و J ایده‌آل‌هایی از R باشند. مجموعه تمام عناصر $x \in R$، به‌طوریکه $xI \subseteq J$ باشد را با $(J :_R I)$ نشان می‌دهیم و آن را *ایده‌آل خارج قسمتی*[1] می‌نامیم. $(J :_R I)$ ایده‌آلی از R است. *پوچساز*[2] I با $ann(I) = (\circ :_R I)$ نشان داده می‌شود، و به ازای هر $a \in I$ پوچساز a را با نماد $ann(a)$ نمایش می‌دهیم به‌طوریکه برابر است با $(\circ :_R a) = (\circ :_R aR)$.

تعریف و نمادگذاری ۲.۱ فرض کنید R یک حلقه و N زیرمدولی از $R-$ مدول M باشد. مجموعه $\{r \in R | rM \subseteq N\}$ را با نماد $(N :_R M)$ نشان می‌دهیم و آن را *زیرمدول مانده‌های*[3] N می‌نامیم. همچنین $(\circ :_R M)$ را پوچساز M می‌نامیم و با $ann(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. $R-$ مدول M را *وفادار*[4] می‌نامیم هرگاه $ann(M) = \circ$.

---

[1] Quotient ideal

[2] Annihilator

[3] Residual submodule

[4] Faithful

تعریف ۴.۱ فرض کنید N زیرمدولی از $R-$ مدول M و I ایده‌آلی از R باشد. زیرمدول مانده‌های N توسط I را با $(N :_M I)$ نشان می‌دهیم، یعنی $(N :_M I) = \{m \in M | Im \subseteq N\}$.

گزاره ۵.۱ فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R و L، K و N زیرمدول‌هایی از $R-$ مدول M باشند.

(۱) اگر $I \subseteq J$، آنگاه $(N :_R J) \subseteq (N :_R I)$.

(۲) $((N :_R I) :_R J) = (N :_R IJ)$.

(۳) $((L \cap N) :_R I) = (L :_R I) \cap (N :_R I)$.

(۴) $(N :_R I + J) = (N :_R I) \cap (N :_R J)$.

(۵) اگر $L \subseteq N$، آنگاه $(L :_R I) \subseteq (N :_R I)$ و $(L :_R K) \subseteq (N :_R K)$.

(۶) اگر $L \subseteq N$، آنگاه $(K :_R L) \supseteq (K :_R N)$.

(۷) $((L \cap N) :_R K) = (L :_R K) \cap (N :_R K)$.

(۸) $(K :_R (L + N)) = (K :_R L) \cap (K :_R N)$.

اثبات. به مرجع [۲۸]، گزاره ۳.۲ مراجعه شود. ■

گزاره ۶.۱ فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R و N, L زیرمدول‌هایی از $R-$ مدول M باشند.

(۱) $I(JN) = (IJ)N$.

(۲) $IN \subseteq N$.

(۳) $I(L + N) = IL + IN$.

(۴) اگر $I \subseteq J$، آنگاه $IN \subseteq JN$.

(۵) اگر $L \subseteq N$، آنگاه $IL \subseteq IN$.

(۶) $I(L \cap N) \subseteq IL \cap IN$ و $(I \cap J)N \subseteq IN \cap JN$.

اثبات. به مرجع [۲۸]، گزاره ۲.۲ مراجعه شود. ■

لم ۷.۱ فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$ مدول باشد. فرض کنید N, K زیرمدول‌هایی از M و I ایده‌آلی از R باشد. در اینصورت $((N :_R K) :_R I) = (N :_R IK)$.

اثبات. فرض کنید $x \in (N :_R IK)$. بنابراین $x(IK) \subseteq N$. پس $(xI)K \subseteq N$. لذا $xI \subseteq (N :_R K)$. بنابراین $x \in ((N :_R K) :_R I)$. درنتیجه $((N :_R K) :_R I) \supseteq (N :_R IK)$.
حال فرض کنید $x \in ((N :_R K) :_R I)$. بنابراین $xI \subseteq (N :_R K)$. لذا عناصر $a_i \in I$ و $y_i \in K$ $(1 \leq i \leq n)$ وجود دارند به‌طوریکه $m = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$. بنابراین $xm = \sum_{i=1}^{n} a_i x y_i$. پس $x \in (N :_R IK)$. بنابراین $((N :_R K) :_R I) \subseteq (N :_R IK)$. درنتیجه تساوی برقرار است. ■

لم ۸.۱ فرض کنید R یک حلقه و I و J ایده‌آل‌هایی از R باشند، آنگاه $I \subseteq (I :_R J)$.

اثبات. به مرجع [۳۵]، صفحه ۱۱۳ مراجعه شود. ■

گزاره ۹.۱ فرض کنید L و N زیرمدول‌های $R-$ مدول M باشند، آنگاه $\frac{(L+N)}{N} \cong \frac{L}{L \cap N}$.

اثبات. به مرجع [۲۸]، نتیجه ۱.۱ مراجعه شود. ■

گزاره ۱۰.۱ فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از حلقه R باشد. در اینصورت I جمعوند مستقیم در R است اگر و تنها اگر عضو خودتوان $e \in R$ موجود باشد به‌طوریکه $I = Re$.

بعلاوه اگر $e \in R$ خودتوان باشد، آنگاه $R(1-e)$ و Re مکمل مستقیم یکدیگرند. یعنی $R = Re \oplus R(1-e)$.

اثبات. به مرجع [۱۴]، گزاره ۱.۷ مراجعه شود. ■

نتیجه ۱۱.۱ فرض کنید I ایده‌آل خودتوان با تولید متناهی از حلقه R باشد. در اینصورت I ایده‌آل اصلی و تولید شده توسط یک عضو خودتوان از حلقه R است.

اثبات. به مرجع [۲۲]، نتیجه ۳.٦ مراجعه شود. ■

تعریف ۱۲.۱ ایده‌آل I از حلقه R را *ایده‌آل ضربی*[۱] می‌نامیم هرگاه به ازای هر ایده‌آل $J \subseteq I$، ایده‌آل K از R موجود باشد به‌طوریکه $J = KI$. حلقه‌ای که تمام ایده‌آل‌های آن ضربی باشد را *حلقه ضربی*[۲] می‌نامیم.

تبصره ۱۳.۱ (۱) فرض کنید I ایده‌آل ضربی از حلقه R و $J \subseteq I$ ایده‌آلی از R باشد. در اینصورت $K \subseteq (J :_R I)$. پس $J = KI \subseteq (J :_R I)I \subseteq J$. لذا $(J :_R I)I = J$.

(۲) به ازای هر دو ایده‌آل I, J از حلقه ضربی R داریم $J \cap I = (J \cap I :_R I)I = (J :_R I)I$.

تعریف ۱۴.۱ ایده‌آل I از حلقه R را *محض*[۳] می‌نامیم هرگاه به ازای هر ایده‌آل J از R، $JI = I \cap J$.

---

[۱] Multiplication ideal

[۲] Multiplication ring

[۳] Pure

لم ۱۵.۱ فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. در این‌صورت اگر $(I :_R J) + (J :_R I) = R$، آنگاه $(I \cap J)^۲ = I^۲ \cap J^۲$.

اثبات. به مرجع [۲]، لم ۴.۳ مراجعه شود. ■

گزاره ۱۶.۱ فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. اگر $(I :_R J) + (J :_R I) = R$، آنگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت k، $(I \cap J)^k = I^k \cap J^k$. بویژه، اگر $I + J$ ایده‌آل ضربی باشد نتیجه باز برقرار است.

اثبات. به مرجع [۲]، گزاره ۳.۱ مراجعه شود. ■

لم ۱۷.۱ فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. اگر $(I :_R J) + (J :_R I) = R$، آنگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت k، $(I^k :_R J^k) + (J^k :_R I^k) = R$.

اثبات. به مرجع [۲]، لم ۵.۳ مراجعه شود. ■

لم ۱۸.۱ فرض کنید I, J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند، به‌طوریکه $(I :_R J) + (J :_R I) = R$ باشد، آنگاه $I^۲ \cap J^۲ \subseteq IJ$.

اثبات. به مرجع [۲]، لم ۲.۳ مراجعه شود. ■

تعریف ۱۹.۱ مدول M را یک *مدول ضربی*[۱] می‌نامیم هرگاه به ازای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل I از R موجود باشد به‌طوریکه $N = IM$.

[۱] Multiplication module

تبصره ۲۰.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول ضربی و N زیرمدولی از M باشد. بنابراین ایده‌آل I از R وجود دارد به‌طوریکه $N = IM$. توجه داریم که $I \subseteq (N :_R M)$. پس $N = IM \subseteq (N :_R M)M \subseteq N$. درنتیجه $N = (N :_R M)M$.

تبصره ۲۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و K زیرمدول ضربی از $R-$ مدول M باشد. در اینصورت به ازای هر زیرمدول N از M داریم

$$N \cap K = (N \cap K :_R K)K = (N :_R K)K.$$

گزاره ۲۲.۱ $R-$ مدول M ضربی است اگر و تنها اگر به ازای هر $m \in M$ ایده‌آل I از R موجود باشد به‌طوریکه $Rm = IM$.

اثبات. به مرجع [۲۰]، گزاره ۱.۱ مراجعه شود. ■

نتیجه ۲۳.۱ فرض کنید K و L زیرمدول‌هایی از $R-$ مدول M باشند.

(۱) اگر $K + L$ مدول ضربی با تولید متناهی باشد، آنگاه $R = (K :_R L) + (L :_R K)$.

(۲) اگر K و L مدول‌های ضربی باشند، به‌طوریکه $R = (K :_R L) + (L :_R K)$، آنگاه $K + L$ ضربی است.

اثبات. به مرجع [۳۷]، نتیجه ۳ مراجعه شود. ■

گزاره ۲۴.۱ فرض کنید K و L زیرمدول‌هایی از $R-$ مدول M باشند، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند.

(۱) $R=(K:_R L)+(L:_R K)$.

(۲) به ازای هر زیرمدول N از M، $(K+L:_R N)=(K:_R N)+(L:_R N)$.

(۳) به ازای هر زیرمدول N از M، $(N:_R K\cap L)=(N:_R K)+(N:_R L)$.

اثبات. به مرجع [۳۷]، گزاره ۴ مراجعه شود. ■

قضیه ۲۵.۱ فرض کنید R یک حلقه جابجایی یکدار و N_i $(1\leq i\leq n)$ گردایه‌ای متناهی از زیرمدول‌های $R-$ مدول M باشد به‌طوریکه به ازای هر $1\leq i\leq k\leq n$، N_i+N_j مدول ضربی باشد. در اینصورت

(۱) $N_1+\ldots+N_k$ مدول ضربی است.

(۲) $N_1,\ldots,N_k$ مدول‌های ضربی‌اند اگر و تنها اگر زیرمدول $N_1\cap\ldots\cap N_k$ مدول ضربی باشد.

اثبات. به مرجع [۳۷]، قضیه ۸ مراجعه شود. ■

قضیه ۲۶.۱ فرض کنید R یک حلقه و N_i $(1\leq i\leq n)$ گردایه‌ای متناهی از زیرمدول‌های $R-$ مدول M باشد، به‌طوریکه به ازای هر $i\leq j$، $R=(N_i:_R N_j)+(N_j:_R N_i)$. در اینصورت برای $S=\sum_{i=1}^{n}N_i$ و $N=\bigcap_{i=1}^{n}N_i$ داریم

(۱) به ازای هر زیرمدول K از M، $(S:_R K)=\sum_{i=1}^{n}(N_i:_R K)$.

(۲) $\sum_{i=1}^{n}(N_i:_R S)=R$.

(۳) به ازای هر زیرمدول K از M، $(K:_R N)=\sum_{i=1}^{n}(K:_R N_i)$.

(۴) $\sum_{i=1}^{n}(N:_R N_i)=R$.

(۵) به ازای هر زیرمدول K از M، $K\cap S=\sum_{i=1}^{n}(K\cap N_i)$.