دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

مدول‌هایی که هر زیرمدول آن به طور اساسی در یک جمعوند مستقیم می‌نشیند

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

مهتاب لک

استاد راهنما

دکتر حسین خبازیان

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر) خانم مهتاب لک

تحت عنوان

مدول‌هایی که هر زیرمدول آن به طور اساسی در یک جمعوند مستقیم می‌نشیند

در تاریخ ۱۳۹۰/۱۰/۲۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر حسین خبازیان
۲– استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر محمد رضا ودادی
۳– استاد داور ۱	دکتر جواد اسدالهی (دانشگاه اصفهان)
۴– استاد داور ۲	دکتر احمد حقانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر اعظم اعتماد دهکردی

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان نامه به بررسی دو فرم ضعیف شده از CS می‌پردازیم. فرض می‌کنیم R یک حلقه و M یک $R-$مدول راست باشد. فرض کنیم N یک زیرمدول از مدول M و K یک جمعوند مستقیم از M باشد، در این صورت K یک مکمل N در M است اگر و تنها اگر $K \cap N = 0$ و $K \oplus N$ در M اساسی است. مدول M را $\mathrm{CS}-$مدول گوییم هرگاه هر زیرمدول آن در یک جمعوند مستقیم از M اساسی باشد یا به عبارت دیگر هر زیرمدول مکمل آن، یک جمعوند مستقیم از M باشد. در چنین حالتی گوییم M در شرط C_1 صدق می‌کند. گوییم مدول M در شرط C_{11} صدق می‌کند هرگاه هر زیرمدول آن یک مکمل داشته باشد که جمعوند مستقیم از M باشد، به عبارت دیگر برای هر زیرمدول N از M یک جمعوند مستقیم K از M وجود داشته باشد به طوری‌که K یک مکمل N در M باشد. گوییم مدول M در شرط C_{12} صدق می‌کند هرگاه هر زیرمدول آن به طور اساسی در یک جمعوند مستقیم از M بنشیند، به عبارت دیگر برای هر زیر مدول N از M یک جمعوند مستقیم K از M و یک تکریختی $\alpha : N \to K$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha(N)$ در K اساسی باشد. هر مدول مانند M که در شرط C_1 صدق کند، در شرط C_{11} نیز صدق می‌کند و هر مدول که در شرط C_{11} صدق کند، در شرط C_{12} نیز صدق می‌کند اما برعکس آن صادق نیست. نشان می‌دهیم که کلاس مدول‌هایی که در شرط C_{11} صدق می‌کنند، تحت حاصل جمع مستقیم بسته است و هر جمعوند مستقیم از یک $\mathrm{CS}-$مدول، یک $\mathrm{CS}-$مدول است اما با یک مثال نشان می‌دهیم که یک جمعوند مستقیم از یک $\mathrm{C}_{12}-$مدول، یک $\mathrm{C}_{12}-$مدول نیست. ثابت می‌کنیم که زیرمدول‌های اساسی M در شرط ACC (DCC) صدق کنند اگر و تنها اگر $M/\mathrm{Soc}\ M$ نوتری (آرتینی) باشد و از این برای اثبات قضیه‌ی بعدی استفاده می‌شود که فرض کنیم M یک $\mathrm{C}_{12}^{+}-$مدول باشد که در شرط ACC (DCC) روی زیرمدول‌های اساسی‌اش صدق کند و دارای بنیان حذف پذیر باشد، در این صورت زیرمدول نیم ساده M_1 و زیرمدول نوتری M_2 وجود دارد که $M = M_1 \oplus M_2$. ثابت می‌کنیم که هرگاه M یک مدول باشد که در شرط C_{12} صدق می کند و $\mathrm{Soc}\ M$ حذف

پذیر باشد، آن‌گاه $M = M_1 \oplus M_2$ که M_1 و M_2 زیرمدول‌هایی ناصفر از M هستند که $\mathrm{Soc}\ M_1$ در M_1 اساسی است و M_2 دارای بنیان صفر است. با ارائه یک مثال نقض نشان می‌دهیم که مدولی وجود دارد که برابر حاصل جمع مستقیم یک مدول با بنیان اساسی و یک مدول ناصفر با بنیان صفر است، که نه در شرط C_{12} صدق می‌کند و نه دارای بنیان حذف پذیر است. در نتیجه عکس گزاره‌ی ذکر شده صادق نمی‌باشد.
کلمات کلیدی : مدول حذف پذیر، مدول توسیعی، بعد یکنواخت متناهی، C_{11}—مدول، C_{12}—مدول

فصل ۱

مقدمه

در سراسر این پایان نامه، R را حلقه‌ای یکدار و شرکت پذیر و تمام مدول‌ها را یک $R-$مدول راست یکانی در نظر می‌گیریم، مگر آن که به طور صریح قید شود. فرض می‌کنیم N یک زیرمدول از M باشد از این‌رو بنا به لم زرن، مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های L و N از M به طوری‌که $N \cap L = 0$ دارای یک عضو ماکسیمال K است، K را مکمل N در M می‌نامیم. یک زیرمدول K از M را، یک مکمل در M می‌نامیم، هرگاه یک مکمل برای یک زیرمدول در M باشد. ما به ذکر سه خاصیت شناخته شده برای مکمل‌ها می‌پردازیم. یک زیرمدول K از M را، یک مکمل در M می‌نامیم اگر و تنها اگر K هیچ توسیع اساسی سره در M نداشته باشد. نتیجه‌ی واضح از این تعریف این است که، هر زیرمدول از M، در یک مکمل از یک مکمل آن، اساسی است و خاصیت دیگر این است که اگر K یک مکمل، یک زیرمدول N از M باشد، در این صورت $N \oplus K$ یک زیرمدول اساسی از M است. یادآوری می‌کنیم که یک مدول را توسیعی یا CS گوییم، اگر هر زیرمدول آن در یک جمعوند مستقیم اساسی باشد و در چنین حالتی گوییم این مدول در شرط C_1 صدق می‌کند. با توجه به این تعریف دو شرط ضعیف شده‌ی CS را بررسی می‌کنیم. گوییم مدول M در شرط C_{11} صدق می‌کند، هرگاه برای هر زیرمدول از M، یک مکمل وجود داشته باشد که یک جمعوند مستقیم از M باشد، به عبارت دیگر برای هر زیرمدول N از M یک جمعوند مستقیم K از M وجود دارد که K یک مکمل N در M است. اسمیت و ترکان در سال ۱۹۹۳ فرم ضعیف شده‌ای از مدول‌هایی که در شرط C_{11} صدق می‌کنند، را بررسی کردند که $C_{12}-$مدول نامیدند. گوییم مدول M در شرط C_{12} صدق می‌کند، هرگاه برای هر زیرمدول N از M، یک جمعوند مستقیم K از M و

یک تکریختی $\alpha : N \to K$ وجود دارد به طوری‌که $\alpha(N)$ یک زیرمدول اساسی از K است. هر مدول که در شرط C_1 صدق کند، در شرط C_{11} نیز صدق می‌کند و هر مدول که در شرط C_{11} صدق کند، در شرط C_{12} نیز صدق می‌کند. اما بر عکس آن برقرار نیست. این پایان‌نامه متشکل از ۷ فصل می‌باشد. در فصل ۲ به معرفی برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز از حلقه و مدول پرداخته‌ایم. در فصل ۳ نشان می‌دهیم که هر جمع مستقیم از مدول‌هایی که در شرط C_{11} صدق می‌کنند، در شرط C_{11} صدق می‌کند. در فصل ۴ ثبات می‌کنیم که اگر M_R در شرط C_{12} صدق کند، آن‌گاه $E(M)$ در شرط C_{12} صدق می‌کند. می‌دانیم که هر مدولی که در شرط C_{11} صدق کند، در شرط C_{12} نیز صدق می‌کند. باارائه یک مثال نقض نشان می‌دهیم که $\mathbb{Z}$−مدولی وجود دارد که شرط C_{12} صدق می‌کند، اما درشرط C_{11} صدق نمی‌کند. در فصل ۵ به بیان تعاریف و لم‌هایی می‌پردازیم، تا بتوانیم، ثابت کنیم که اگر فرض کنیم عدد اول p وجود دارد که M یک p−گروه آبلی است و $\mathbb{Z}$−مدول M یک جمع مستقیم از مدول‌های یکنواخت است، آن‌گاه هر جمعوند مستقیم از M یک جمع مستقیم از مدول‌های یکنواخت است. در ادامه نشان می‌دهیم که هرگاه M یک $\mathbb{Z}$−مدول باشد که جمع مستقیم از مدول‌های یکنواخت است، آن‌گاه هر جمعوند مستقیم از M یک جمع مستقیم از مدول‌های یکنواخت است. در فصل ٦ به مطالعه‌ی تجزیه‌ی C_{12}^{+}−مدول (هر جمعوند مستقیم از مدول در شرط C_{12} صدق می‌کند) با حذف پذیری بنیان، می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم که اگر فرض کنیم M یک C_{12}^{+}−مدول با بنیان حذف پذیر باشد و $M/\mathrm{Soc}\, M$ دارای بعد یکنواخت متناهی باشد، در این صورت M شامل یک زیرمدول نیم ساده M_1 و یک زیرمدول با بعد یکنواخت متناهی M_2 است، به طوری‌که $M = M_1 \oplus M_2$. در ادامه به این نتیجه می‌رسیم که اگر فرض کنیم M یک مدول با بنیان حذف پذیر باشد که در شرط C_{12}^{+} و نیز در شرط ACC (DCC) روی زیرمدول‌های اساسی‌اش صدق کند، در این صورت زیرمدول نیم ساده M_1 و زیرمدول نوتری M_2 وجود دارد که $M = M_1 \oplus M_2$. در فصل ۷ نشان می‌دهیم که هرگاه M یک مدول باشد که در شرط C_{12} صدق کند و $\mathrm{Soc}\, M$ حذف پذیر باشد، آن‌گاه $M = M_1 \oplus M_2$ که M_1 و M_2 زیرمدول‌هایی از M هستند که $\mathrm{Soc}\, M_1$ در M_1 اساسی است و M_2 دارای بنیان صفر است. با ارائه یک مثال نقض نشان می‌دهیم که مدولی وجود دارد که برابر جمع مستقیم یک مدول با بنیان اساسی و یک مدول ناصفر با بنیان صفر است، که نه در شرط C_{12} صدق می‌کند و نه دارای بنیان حذف پذیر است. در نتیجه عکس گزاره‌ی ذکر شده صادق نمی‌باشد.

فصل ۲

پیش نیازها

تعریف ۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه و M یک $R-$مدول راست باشد.
(۱) مدول M نوتری نامیده می‌شود، هرگاه هر زنجیر افزایشی $M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq \dots$ از زیرمدول‌های M، بعد از یک تعداد متناهی مرحله متوقف شود، یعنی عددی چون k موجود باشد به طوری که برای هر $n \geq k$، $M_n = M_k$. در چنین حالتی گوییم M در شرط زنجیر افزایشی بر زیرمدول‌های چپ صدق می‌کند.
(۲) مدول M آرتینی نامیده می‌شود، هرگاه هر زنجیر کاهشی $M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq \dots$ از زیرمدول‌های M، بعد از یک تعداد متناهی مرحله متوقف شود، یعنی عددی چون k موجود باشد به طوری که برای هر $n \geq k$، $M_n = M_k$. در چنین حالتی گوییم M در شرط زنجیر کاهشی بر زیرمدول‌های چپ صدق می‌کند.

تعریف ۲.۲ حلقه‌ی R مفروض است.
(۱) حلقه‌ی R نوتری راست نامیده می‌شود، هرگاه R به عنوان یک $R-$مدول راست، نوتری باشد.
(۲) حلقه‌ی R آرتینی راست نامیده می‌شود، هرگاه R به عنوان یک $R-$مدول راست، آرتینی باشد.

مشابه با تعریف فوق حلقه‌ی نوتری چپ و آرتینی چپ نیز تعریف می‌شود. اگر R هم نوتری (آرتینی) چپ و هم نوتری (آرتینی) راست باشد، آن‌گاه R را یک حلقه‌ی نوتری (آرتینی) می‌نامند.

گزاره ۳.۲ فرض کنیم M یک R–مدول راست باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(۱) M نوتری است.

(۲) هر زیرمدول از M متناهی–تولید شده است.

(۳) هر مجموعه‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M یک عضو ماکسیمال دارد.

اثبات. [مرجع [۲۲] گزاره‌ی ۳.۴.۲]. ■

نتیجه ۴.۲ هر زیرمدول از یک مدول نوتری، نوتری است.

گزاره ۵.۲ فرض کنیم M یک R–مدول راست و $N \leq M$ زیرمدولی از M باشد. در این صورت

(۱) M نوتری است اگر و تنها اگر N و M/N نوتری باشند.

(۲) M آرتینی است اگر و تنها اگر N و M/N آرتینی باشند.

اثبات. [مرجع [۲۲] لم ۵.۴.۲]. ■

تعریف ۶.۲ فرض کنیم M یک R–مدول راست باشد و $X \subseteq M$. در این صورت پوچساز X که با $\mathrm{Ann}_R(X)$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\mathrm{Ann}_R(X) = \{r \in R \quad : \quad \forall x \in X \quad xr = 0 \ \}.$$

به سادگی دیده می‌شود که $\mathrm{Ann}_R(X)$ یک ایدال راست R است. به خصوص اگر X زیرمدول M باشد آن‌گاه $\mathrm{Ann}_R(X)$ یک ایدال دو طرفه‌ی R است. مدول M وفادار نامیده می‌شود هرگاه $\mathrm{Ann}_R(M) = (0)$. در صورتی که $X = \{m\}$ تک عضوی باشد $\mathrm{Ann}_R(X)$ را با $\mathrm{Ann}_R(m)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $c \in R$ باشد، $\mathrm{Ann}_l(c)$ ($\mathrm{Ann}_r(c)$) نشان دهنده‌ی پوچ ساز راست (پوچ ساز چپ) عضو c می‌باشد.

تعریف ۷.۲ فرض کنیم R یک حلقه و M یک R–مدول راست باشد. در این صورت مجموعه‌ی

$$T(M) = \{m \in M \quad : \quad mc = 0 \ \text{ موجود است که } c \in R \text{ عنصرمنظم } \}$$

زیرمجموعه‌ی تاب‌دار M نامیده می‌شود.

مدول M تاب‌دار نامیده می‌شود هرگاه $T(M) = M$ و از تاب آزاد نامیده می‌شود هرگاه $T(M) = (0)$.

تعریف ۸.۲ فرض کنیم M یک R–مدول چپ باشد. مجموع تمام زیرمدول‌های مینیمال (ساده) M، ساکل (بنیان) M نامیده می‌شود و با $\mathrm{Soc}(M)$ نمایش داده می‌شود. اگر M هیچ زیرمدول مینیمالی نداشته باشد، آن‌گاه $\mathrm{Soc}(M) = (0)$.

گزاره ۹.۲ فرض کنیم M یک $R-$مدول چپ باشد. در این صورت

$$Soc(M) = \bigcap \{\, L \leq M \mid \text{است } M \text{ یک زیرمدول اساسی در } L \,\}.$$

اثبات. [مرجع [۲۱] گزاره‌ی ۲۱.۱]. ■

تعریف ۱۰.۲ $R-$مدول چپ M یکنواخت نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو زیرمدول ناصفر K و L از M داشته باشیم $L \cap K \neq (\circ)$.

با توجه به تعریف قبل واضح است که
$R-$مدول چپ M یکنواخت است اگر و تنها اگر هر زیرمدول ناصفر آن اساسی باشد.

لم ۱۱.۲ گزاره‌های زیر برای مدول M_R معادل‌اند.
(۱) M_R یکنواخت است.
(۲) هر زیرمدول ناصفر از M در M اساسی است.

اثبات. به طور مستقیم از تعریف نتیجه می‌شود. ■

گزاره ۱۲.۲ برای $R-$مدول M استلزام‌های زیر برقرار است.
M_R تجزیه‌ناپذیر است $\Leftarrow$ M_R یکنواخت است $\Leftarrow$ M_R ساده است

اثبات. ساده است. ■

تعریف ۱۳.۲ مجموعه $\{M_i : i \in I\}$ از زیرمدول‌های ناصفر M یک خانواده‌ی مستقل زیر مدول‌ها نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی $J \subseteq I$ و برای هر $i \in I \backslash J$، داشته باشیم $(\sum_{j \in J} M_j) \cap M_i = (\circ)$.

تعریف ۱۴.۲ فرض کنیم M یک $R-$مدول راست باشد.
(۱) زیرمدول ناصفر K از M_R را اساسی در M_R گوییم، هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر L از M، $K \cap L \neq \circ$ و با نماد $N \leq_e M$ نشان می‌دهیم.
(۲) اگر K جمعوند مستقیمی از M_R باشد آن را، با نماد $K \leq_{\oplus} M$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۵.۲ فرض می‌کنیم $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ و $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ زیرمدول‌های اساسی از R−مدول راست M باشند، که به ازای هر i، U_i و V_i مدول‌های یکنواخت هستند. در این صورت $n = m$.

اثبات. [مرجع [۱۲] قضیه‌ی ۱.۶.۳]. ■

تعریف ۱۶.۲ گوییم مدول M_R دارای بعد یکنواخت n است. (می نویسیم $\mathrm{u.dimM = n}$) هرگاه زیرمدول اساسی $V \leq_e M$ موجود باشد که جمع مستقیم n زیرمدول یکنواخت است و چنانچه چنین nی پیدا نشود. $\mathrm{u.dim\ M} = \infty$ تعریف می‌کنیم.

اثبات. [مرجع [۱۲] تعریف ۲.۶.۳]. ■

مثال ۱۷.۲ هر R−مدول چپ یکنواخت، دارای بعد یکنواخت متناهی است.

گزاره ۱۸.۲ فرض کنیم M یک مدول باشد و $\mathrm{u.dim\ M = n} < \infty$ در این صورت هر جمع مستقیم از زیرمدول‌های ناصفر M مانند $N_1 \oplus \ldots \oplus N_k$ در نظر بگیریم، تعداد این جمعوندها یعنی k کمتر از n است. به عبارت دیگر M فاقد جمع مستقیم $n + 1$ تایی از زیرمدول‌های M است.

اثبات. [مرجع [۱۲] گزاره‌ی ۳.۶.۳]. ■

گزاره ۱۹.۲ $\mathrm{u.dim\ M} = \infty$ اگر و تنها اگر M شامل یک جمع مستقیم نامتناهی از زیرمدول‌های ناصفرش باشد.

اثبات. [مرجع [۱۲] گزاره‌ی ۴.۶.۳]. ■

نتیجه ۲۰.۲ $\mathrm{u.dim\ M}$ برابر سوپریموم مجموعه‌ی

{M شامل یک جمع مستقیم از k زیرمدول ناصفر است : $k \in \mathbb{N}$}

اثبات. [مرجع [۱۲] نتیجه‌ی ۶.۶.۳]. ■

گزاره ۲۱.۲ اگر M یک مدول نوتری (آرتینی) باشد، آن‌گاه $\mathrm{u.dimM} < \infty$.

اثبات. [مرجع [۱۲] نتیجه‌ی ۷.٦.۳]. ■

قضیه ۲۲.۲ (۱) $\mathrm{u.dim}\ (\bigoplus_{i=1}^{k} M_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{u.dim}\ M_i$.

(۲) اگر $N \leq M$ آن‌گاه $\mathrm{u.dim}\ N \leq \mathrm{u.dim}\ M$.

(۳) اگر $N \leq_e M$ آن‌گاه $\mathrm{u.dim}\ N = \mathrm{u.dim}\ M$.

اثبات. [مرجع [۱۲] گزاره‌ی ۱۰.٦.۳]. ■

گزاره ۲۳.۲ اگر $K \leq M$ آن‌گاه $K \leq_e M$ اگر و تنها اگر به ازای هر $0 \neq x \in M$، $r \in R$ موجود باشد که $0 \neq xr \in K$.

اثبات. ($\Leftarrow$) اگر $K \leq_e M$ و $0 \neq x \in M$ باشد، آن‌گاه $xR \cap K \neq 0$.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $0 \neq L \leq M$. $0 \neq x \in L$ را در نظر می‌گیریم. بنا به فرض $r \in R$ موجود است که $0 \neq xr \in K \cap L$. ■

گزاره ۲۴.۲ فرض می‌کنیم K و L و M $R-$مدول هستند.

(۱) اگر $K_1 \leq_e L_1 \subseteq M$ و $K_2 \leq_e L_2 \subseteq M$ آن‌گاه $K_1 \cap K_2 \leq_e L_1 \cap L_2$.

اثبات. [مرجع [۲۱] گزاره‌ی ۳.۱۷]. ■

لم ۲۵.۲ فرض کنید $K \leq N \leq M$ و $H \leq M$.

(۱) $K \leq_e N\ ,\ N \leq_e M \ \Leftrightarrow\ K \leq_e M$.

(۲) $K \leq_e M\ ,\ H \leq_e M \ \Leftrightarrow\ H \cap K \leq_e M$.

اثبات. به طور مستقیم از تعریف نتیجه می‌شود. ■

لم ۲٦.۲ اگر $K_1 \leq M_1 \leq M$، $K_2 \leq M_2 \leq M$ و $M = M_1 \oplus M_2$، آن‌گاه

$$K_1 \oplus K_2 \ \leq_e\ M_1 \oplus M_2 \quad \Leftrightarrow \quad K_1 \leq_e M_1 \ ,\ K_2 \leq_e M_2$$

اثبات. ($\Rightarrow$) اگر M_1، $K_1 \not\leq_e M_1$، آن‌گاه زیرمدول ناصفر L_1 از M_1 موجود است که $L_1 \cap K_1 = 0$. بنابراین

$$(K_1 \oplus K_2) \cap L_1 = 0$$

واین با $K_1 \oplus K_2 \leq_e M$ درتناقض است. به طور مشابه $K_2 \leq_e M_2$.
($\Leftarrow$) فرض کنید

$$0 \neq x = x_1 + x_2 \ \in M \quad x_1 \in M_1 \ , \ x_2 \in M_2$$

می توان فرض کرد $x_1 \neq 0$. از آن‌جا که $K_1 \leq_e M_1$ ، لذا $r_1 \in R$ موجود است که $0 \neq x_1 r_1 \in K_1$. اگر $x_2 r_1 \in K_2$، آن‌گاه $0 \neq x r_1 \in K_1 \oplus K_2$. پس فرض کنید $x_2 r_1 \in M_2 - K_2$. از آن‌جا که $K_2 \leq_e M_2$، لذا $r_2 \in R$ موجود است که $0 \neq x_2 r_1 r_2 \in K_2$. بنابراین

$$0 \neq x r_1 r_2 = x_1 r_1 r_2 + x_2 r_1 r_2 \in K_1 \oplus K_2$$

■

گزاره ۲۷.۲ فرض کنید $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M و $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ نیز خانواده‌ای از زیرمدول‌های M باشند که برای هر $\alpha \in A$، $L_\alpha \leq_e M_\alpha$. در این صورت
(۱) $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ مستقل‌اند.
(۲) $\bigoplus_{\alpha \in A} L_\alpha \leq_e \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$.

اثبات. ابتدا با استفاده از یک استدلال استقرایی، نشان می‌دهیم (۱) و (۲) برای هر زیر مجموعه‌ی متناهی از A برقرار است.
برای $n = 2$ نشان می‌دهیم (۱) و (۲) برقرار است. فرض کنیم L_1 و L_2 مستقل‌اند. از آن‌جا که $L_2 \leq_e M_2$، لذا

$$(L_1 \cap M_2) \cap L_2 = 0 \ \Rightarrow \ L_1 \cap M_2 = 0$$

چون $L_1 \leq_e M_1$،

$$L_1 \cap (M_1 \cap M_2) = 0 \ \Rightarrow \ M_1 \cap M_2 = 0$$

بنابراین M_1 و M_2 مستقل و از لم ۲۶.۲ نتیجه می‌شود $L_1 \oplus L_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$. حال فرض می‌کنیم (۱) و (۲) برای $F = \{\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n\}$ برقرار باشند. یعنی داریم $(M_\alpha)_{\alpha \in F}$ مستقل‌اند و

$\bigoplus_{\alpha\in F} L_\alpha \leq_e \bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$. برای هر $\alpha_{n+1}\in A-F$،

$$\sum_{i=1}^{n+1} M_{\alpha_i} = (\bigoplus_{i=1}^{n} M_{\alpha_i}) + M_{\alpha_{n+1}}$$

از فرض استقرا می‌توان نتیجه گرفت

$$(\bigoplus_{i=1}^{n} M_{\alpha_i}) \cap M_{\alpha_{n+1}} = 0$$

زیرا در غیر این صورت $0 \neq x \in (\bigoplus_{i=1}^{n} M_{\alpha_i}) \cap M_{\alpha_{n+1}}$ با استفاده از فرض استقرا و بنا به تعریف ۲۳.۲ $r_1 \in R$ وجود دارد که $0 \neq xr_1 \in \bigoplus_{i=1}^{n} L_{\alpha_i}$ از طرفی بنا به فرض داریم $L_{\alpha_{n+1}} \leq_e M_{\alpha_{n+1}}$ از این‌رو برای هر $0 \neq x \in M_{\alpha_{n+1}}$ بنا به تعریف ۲۳.۲ $r_2 \in R$ وجود دارد که $0 \neq xr_2 \in L_{\alpha_{n+1}}$. در نتیجه $r_1r_2 \in R$ موجود است که $0 \neq xr_1r_2 \in (\bigoplus_{i=1}^{n} L_{\alpha_i}) \cap L_{\alpha_{n+1}}$. تناقض با این که خانواده‌ای $(L_\alpha)_{\alpha\in A}$ مستقل از زیرمدول‌های M هستند. از طرفی بنا به لم ۲۶.۲ نتیجه می‌شود

$$(\bigoplus_{i=1}^{n} L_{\alpha_i}) \oplus L_{\alpha_{n+1}} \leq_e \bigoplus_{i=1}^{n+1} M_{\alpha_i}$$

پس اکنون نشان دادیم (۱) و (۲) برای هر زیر مجموعه‌ی متناهی از A برقرار است. از آن‌جا که برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی F از A، $(M_\alpha)_{\alpha\in F}$ مستقل‌اند پس $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ نیز مستقل‌اند. فرض کنید $0 \neq x \in \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$. پس زیرمجموعه‌ی متناهی F از A موجود است که $x \in \bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$. چون $\bigoplus_{\alpha\in F} L_\alpha \leq_e \bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$، $r \in R$ موجود است که

$$0 \neq xr \in \bigoplus_{\alpha\in F} L_\alpha \leq \bigoplus_{\alpha\in A} L_\alpha$$

بنابراین $\bigoplus_{\alpha\in A} L_\alpha \leq_e \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$. ■

تعریف ۲۸.۲ فرض کنیم M و U دو R—مدول باشند. مدول M، **تزریقی** نامیده می‌شود هرگاه برای هر نمودار زیر در رسته‌ی R—مدول‌های راست، با سطر کامل

$$\begin{array}{ccccc} (0) & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & U \\ & & \downarrow g & & \\ & & M & & \end{array}$$

یک R—همریختی $\widehat{f} : U \longrightarrow M$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار بالا را جابه‌جا کند، یعنی $\widehat{f}\circ f = g$.

قضیه ۲۹.۲ فرض می‌کنیم M، M_1 و M_2، R—مدول باشند. در این صورت، دنباله‌ی دقیق کوتاه

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

شکافته می‌شود اگر و تنها اگر زیرمدولی مانند N از M موجود باشد که $M = f(M_1) \oplus N$.

اثبات. [مرجع [۲۳] قضیه‌ی ۵.۳]. ■

نتیجه ۳۰.۲ به ازای هر R—مدول مانند M، R—مدولی تزریقی موجود است که M زیرمدولی از آن است.

اثبات. [مرجع [۲۳] قضیه‌ی ۲.۹]. ■

گزاره ۳۱.۲ حاصل ضرب مستقیم $\prod_{i \in I} J_i$ از R—مدول‌ها تزریقی است اگر و تنها اگر J_i، به ازای هر i، تزریقی باشد.

اثبات. [مرجع [۱۰] قضیه‌ی ۷.۳.۴]. ■

گزاره ۳۲.۲ فرض می‌کنیم E، R—مدول چپ باشد. اگر به ازای هر ایدال چپ مانند I از R، هر R—هم ریختی مانند $\psi : I \to E$ را بتوان به R—هم ریختی‌ای از R به E توسعه داد (یعنی بتوان R—هم ریختی‌ای مانند $\bar{\psi} : R \to E$ یافت که $\bar{\psi}|_I = \psi$)، آن‌گاه E تزریقی است.

اثبات. فرض می‌کنیم نموداری از R—هم ریختی‌ها و R—مدول‌ها مانند

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\quad g \quad} & N \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ & & E & & \end{array}$$

که سطر آن دقیق است، داده شده باشد. قرار می‌دهیم

$\Sigma = \{(N',\varphi) : \mathrm{Im}\ g \le N' \le N$ و φ یک R—هم ریختی‌ای از N' به E است $f = \varphi g\}$.

چون g، R—هم ریختی‌ای یک به یک است، $fg^{-1} : \mathrm{Im}\ g \to E$ هم R—هم ریختی است. در نتیجه $(\mathrm{Im}\ g\ (fg^{-1}))$ در Σ است. پس Σ مجموعه‌ای ناتهی است. اکنون رابطه‌ی $\le$ را روی Σ به این صورت تعریف می‌کنیم که

$$(N_1, \varphi_2) \le (N_1, \varphi_2) \iff N_1 \subseteq N_2, \varphi_2|_{N_1} = \varphi_1$$

به راحتی می‌توانیم نشان دهیم که $\leq$ رابطه‌ی ترتیب جزئی روی Σ است. گیریم $T=\{(N_i,\varphi_i)\}_{i\in\Lambda}$ زنجیر ناتهی دلخواه‌ای در Σ باشد. نشان می‌دهیم که این زنجیر، کران بالایی در Σ دارد. برای این منظور، تابع $\bigcup_{i\in\Lambda}\varphi_i$ از $\bigcup_{i\in\Lambda}N_i$ به E را در نظر می‌گیریم. (گیریم $x\in\bigcup_{i\in\Lambda}N_i$، پس $i\in\Lambda$ موجود است که $x\in N_i$. تعریف می‌کنیم $\bigcup_{i\in\Lambda}\varphi_i(x)=\varphi_i(x)$. ممکن است $j\in\Lambda$ نیز موجود باشد که $x\in N_j$. در این صورت، چون T زنجیر است، $(N_i,\varphi_i)\leq(N_j,\varphi_j)$ یا $(N_j,\varphi_j)\leq(N_i,\varphi_i)$. فرض می‌کنیم $(N_i,\varphi_i)\leq(N_j,\varphi_j)$. پس $N_i\subseteq N_j$ و $\varphi_j|_{N_i}=\varphi_i$ و در نتیجه $\varphi_j(x)=\varphi_i(x)$. یعنی تابع $\bigcup_{i\in\Lambda}\varphi_i$ خوش تعریف است.) به راحتی می‌توانیم نشان دهیم که $\bigcup_{i\in\Lambda}\varphi_i$، R—هم ریختی است، پس $(\bigcup_{i\in\Lambda}N_i,\bigcup_{i\in\Lambda}\varphi_i)$ عضو Σ است. واضح است که این عضو Σ، کران بالایی برای T است. پس ثابت کرده‌ایم که هر زنجیر ناتهی در Σ کران بالایی در Σ دارد. پس، بنابر لم زرن، Σ عضوی ماکزیمال مانند $(N_\circ,\varphi)$ دارد. حال نشان می‌دهیم که $N_\circ=N$. اگر چنین نباشد، یعنی $N_\circ\subsetneqq N$، عضوی از N مانند a موجود است که در $N_\circ$ نیست. قرار می‌دهیم $I=\{r\in R : ra\in N_\circ\}$. به راحتی می‌توانیم نشان دهیم که I ایدال چپی از R است. حال تابع $\psi:I\to E$ را به صورت $\psi(r)=\varphi(ra)$ تعریف می‌کنیم. به راحتی دیده می‌شود که ψ، R—هم ریختی است، در نتیجه R—هم ریختی‌ای مانند $\bar{\psi}:R\to E$ موجود است که $\bar{\psi}|_I=\psi$. قرار می‌دهیم $\bar{N}=N_\circ+Ra$. چون a در $N_\circ$ نیست، $N_\circ\subsetneqq\bar{N}$. از طرفی، تابع $\bar{\varphi}(n_\circ+ra)=\varphi(n_\circ)+r\bar{\psi}(۱)$ تعریف می‌شود، خوش تعریف است، زیرا $n_\circ+ra=n'_\circ+r'a$ نتیجه می‌دهد که $(r-r')a=n'_\circ-n\in N_\circ$ و در نتیجه $r-r'\in I$، پس

$$\begin{aligned}\varphi(n'_\circ)-\varphi(n_\circ)&=\varphi(n'_\circ-n_\circ)=\varphi((r-r')a)=\psi(r-r')=\bar{\psi}(r-r')\\&=(r-r')\bar{\psi}(۱)=r\bar{\psi}(۱)-r'\bar{\psi}(۱),\end{aligned}$$

و در نتیجه $\varphi(n_\circ)+r\bar{\psi}(۱)=\varphi(n'_\circ)+r'\bar{\psi}(۱)$. به راحتی می‌توانیم نشان دهیم که $\bar{\varphi}$، R—هم ریختی است و داریم $\bar{\varphi}|_{N_\circ}=\varphi$. پس $N_\circ\subsetneqq\bar{N}$ نتیجه می دهد که $(N_\circ,\varphi)\lneqq(\bar{N},\bar{\varphi})$. ولی $(\bar{N},\bar{\varphi})\in\Sigma$ و این با ماکزیمال بودن $(N_\circ,\varphi)$ در Σ تناقض دارد، در نتیجه، لزوماً $N_\circ=N$. پس (N,φ) عضو ماکزیمال Σ است. در نتیجه $(N,\varphi)\in\Sigma$، و این نیز به این معنی است که R—هم ریختی $\varphi:N\to E$ این ویژگی را دارد که $\varphi g=f$ و لذا نمودار زیر را جابه‌جا می‌کند:

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, "\varphi"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

در نتیجه E، R—مدولی تزریقی است. ■

قضیه ۳۳.۲ شرایط زیر معادل‌اند:

(۱) E، R—مدولی تزریقی است.

(۲) هر دنباله‌ی دقیق کوتاه مانند $0 \to E \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ شکافته می‌شود.

(۲) به ازای هر توسیع از E مانند E'، زیر مدولی مانند K از E' موجود است که $E' = E \oplus K$.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض می‌کنیم دنباله‌ی دقیق کوتاهی مثل $0 \to E \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ داده شده است. نمودار

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_E"'] & M \\
& E &
\end{tikzcd}$$

را که سطر آن دقیق است، در نظر می‌گیریم. چون E تزریقی است، R—همریختی مانند $h : M \to E$ موجود است که نمودار داده شده را جابه‌جا می‌کند.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_E"'] & M \arrow[dl, "h"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

یعنی $hf = 1_E$، پس دنباله‌ی دقیق کوتاه داده شده شکافته می‌شود.

(۲) $\Leftarrow$ (۳) فرض می‌کنیم E' توسیع دلخواهی از E باشد. در نتیجه، E زیرمدولی از E' است. واضح است که دنباله

$$0 \to E \xrightarrow{j} E' \xrightarrow{\pi} E'/E \to 0$$

دنباله‌ی دقیق کوتاه که j نگاشت شمول و π نگاشت تصویری است. در نتیجه، بنا به فرض، این دنباله شکافته می‌شود، پس بنا بر قضیه‌ی ۲۹.۲ زیرمدولی مانند K از E' موجود است که $E' = j(E) \oplus K$. از طرفی $j(E) = E$، پس $E' = E \oplus K$.

(۳) $\Leftarrow$ (۱) بنا به نتیجه‌ی ۳۰.۲ R—مدولی تزریقی مانند E' موجود است که E زیرمدولی از آن است. پس E'، توسیعی از E است و در نتیجه، بنا به فرض، زیرمدولی مانند K از E' موجود است که $E' = E \oplus K$. چون E' تزریقی است و $E' = E \oplus K$، از این‌رو $E \oplus K$ نیز تزریقی است. بنا به گزاره‌ی ۳۱.۲ تزریقی بودن E را نتیجه می‌دهد. ■

گزاره ۳۴.۲ گزاره‌های زیر برای R−مدول F معادل‌اند.

(۱) F دارای پایه‌ی ناتهی است.

(۲) F با مجموع مستقیم داخلی خانواده‌ای از R−مدول‌های دوری است که هر یک به عنوان R مدول راست با R یکریخت است.

اثبات. [مرجع [۱۰] قضیه‌ی ۱.۲.۴]. ■

لم ۳۵.۲ **(قانون مدولی)** فرض کنیم M یک R−مدول راست و A، B و C زیرمدول‌هایی از M باشند که $A \leq C$. در این صورت

$$A + (B \cap C) = (A + B) \cap C.$$

اثبات. ساده است. ■

تعریف ۳۶.۲ فرض کنیم M و P دو R−مدول باشند. مدول M، **تصویری** نامیده می‌شود هرگاه برای هر نمودار زیر در رسته‌ی R−مدول‌های راست، با سطر کامل

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow g & & \\ P & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & (0) \end{array}$$

یک R−همریختی $\widehat{f} : M \longrightarrow P$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار بالا را جابه‌جا کند، یعنی $f \circ \widehat{f} = g$.

قضیه ۳۷.۲ هر R−مدول آزاد M تصویری است.

اثبات. [مرجع [۱۰] قضیه‌ی ۲.۳]. ■

گزاره ۳۸.۲ اگر P یک R−مدولی تصویری باشد، آن‌گاه R−مدول آزاد F وجود دارد، به طوری‌که $F \cong F \oplus P$.

اثبات. [مرجع [۱۲] نتیجه‌ی ۷.۲.۱]. ■

گزاره ۳۹.۲ اگر $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ یک مجموعه‌ی اندیس گذاری شده از زیرمدول‌های M که $M = \oplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ آن‌گاه $\mathrm{Soc}\ M = \oplus_{\alpha\in A} \mathrm{Soc}\ M_\alpha$

اثبات. [مرجع [۱] گزاره‌ی ۱۹.۹]. ■

لم ۴۰.۲ فرض کنیم M یک R–مدول باشد اگر N یک زیرمدول اساسی از M باشد آن‌گاه $\text{Soc } M = \text{Soc } N$.

اثبات. در ابتدا نشان می‌دهیم $\text{Soc } N = \text{Soc } M \cap N$.
واضح است $\text{Soc } N \subseteq N$ از این‌رو $\text{Soc } N \cap \text{Soc } M \subseteq N \cap \text{Soc } M$ در نتیجه داریم $\text{Soc } N \subseteq N \cap \text{Soc } M$.
از طرفی $N \cap \text{Soc } M$ یک زیرمدول نیم ساده از N است، هم چنین $\text{Soc } N$ بزرگترین زیرمدول نیم ساده N است از این‌رو داریم $N \cap \text{Soc } M \subseteq \text{Soc } N$. که نتیجه می‌دهد

$$N \cap \text{Soc } M = \text{Soc } N$$

می‌دانیم N زیرمدول M است، پس $\text{Soc } N \subseteq \text{Soc } M$. از طرفی

$$\text{Soc } M = \bigcap_{N' \leq_e M} N' \leq N \leq_e M$$

پس داریم $\text{Soc } M \subseteq N$ و می‌دانیم $\text{Soc } M \subseteq \text{Soc } M$ که نتیجه می‌دهند $\text{Soc } M \subseteq N \cap \text{Soc } M$ که یعنی $\text{Soc } M \subseteq \text{Soc } N$. بنابراین داریم

$$\text{Soc } M = \text{Soc } N$$

. ■

تعریف ۴۱.۲ فرض می‌کنیم $S \leq M_R$. زیرمدول C از M_R را یک مکمل S گوییم هرگاه $C \cap S = \circ$ و C نسبت به این خاصیت ماکزیمال باشد.
بنابر لم زرن هر زیرمدول از M_R، دارای یک مکمل است.

گزاره ۴۲.۲ اگر $S \leq M_R$ و C مکمل S در M_R باشد، آن‌گاه $C \oplus S \leq_e M$.

اثبات. موقتاً فرض کنیم $\circ \neq L \leq M$ و $(C \oplus S) \cap L = \circ$ داریم

$$S \cap (C \oplus L) = \circ \quad , \quad C \subsetneqq C \oplus L$$

و این با ماکزیمال بودن C نسبت به خاصیت فوق در تناقض است. ■