دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

موضوع:

مساله عکس استورم لیوویل غیر خودالحاق با شرایط جهشی و منفرد

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

گرایش آنالیز

استاد راهنما:

دکتر عبدالعلی نعمتی

استاد مشاور:

دکتر محسن علی محمدی

دانشجو:

ندا باقری

شهریور ۱۳۸۸

خداوند بی‌نهایت است، لامکان و بی‌زمان اما به‌قدر فهم ما کوچک می‌شود، به قدر نیاز ما فرود می‌آید، به قدر آرزوی ما گسترده می‌شود و به قدر ایمان ما کارگشا.

ایمانوئل کانت : علم ریاضی درخشان‌ترین مثال برای این واقعیت است که چگونه استدلال محض، دامنه تاثیرگذارش را بدون کمک تجربه، گسترش می‌دهد.

فیلیکس کلاین : افلاطون گفت، خدا هندسه‌دان است، ژاکوبی این جمله را چنین تغییر داد، خدا حساب‌دان است، سپس کرونکر آمد و این سخن به یادماندنی را باب کرد، خدا عددهای طبیعی را آفرید، مابقی کار انسان است.

قدردانی

اینک که با استعانت از بارگاه خداوند متعال این تحقیق به پایان رسیده است لازم می‌دانم مراتب قدردانی خود را از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر عبدالعلی نعمتی ابراز دارم که با توصیه‌های مفید و ارزشمندشان به نحو شایسته‌ای به اینجانب یاری رسانده‌اند.

از استاد مشاور بزرگوارم جناب آقای دکتر محسن علی‌محمدی به پاس مشاوره ارزشمندشان سپاسگزارم.

از اساتید مدعو جناب آقای دکتر علی تقوی و جناب آقای دکتر ماشاءالله متین‌فر که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند، کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر ابوالفضل طالشیان که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع حضور داشتند، تشکر می‌کنم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر سید هادی ناصری به پاس زحمات بی‌دریغشان کمال قدردانی را دارم.

در نهایت از همه‌ی اساتیدی که در طول دوران تحصیلم از آنان دانش آموخته‌ام تشکر می‌نمایم.

پیشگفتار

مسائل مقدار مرزی با ناپیوستگی درون یک بازه، اغلب در ریاضیات و شاخه‌های مختلف فیزیک، مکانیک، الکترونیک، ژئوفیزیک و رشته‌های دیگر علوم طبیعی و تکنولوژی ظاهر می‌شوند. برای مثال، مسائل معکوس ناپیوسته در الکترونیک برای ساختار پارامترهای نامتجانس خطوط الکترونیک با مشخصه‌های صنعتی ظاهر می‌شوند. بعد از ساده کردن مدل ریاضی متناظر، ما یک مساله مقدار مرزی با ناپیوستگی در نقاط درونی بدست می‌آوریم به طوری که تابع پتانسیل باید از اطلاعات طیفی مفروض که فاز مشخصه‌ها را توصیف می‌کند، ساخته شده باشد. اطلاعات طیفی می‌تواند برای بازسازی ثابت دی‌الکتریک و قابلیت هدایت مقاطع عرضی از یک ناپیوستگی، استفاده شود. مسائل مقدار مرزی با ناپیوستگی در یک نقطه درونی، همچنین در مدل‌های مربوط به ژئودزیک برای نوسان‌های زمین ظاهر می‌شود که در آن ناپیوستگی اصلی با انعکاس بخشی از امواج پوسته‌ی اساسی، پوشیده می‌شود.

مسائل طیفی معکوس نقش مهمی در تحقیق برخی معادلات غیر خطی فیزیک ریاضی بازی می‌کند. همچنین مسائل معکوس در ریاضیات برای تحقیق خواص طیفی بعضی کلاس‌های دیفرانسیل، انتگرو دیفرانسیل و عملگر انتگرالی ظاهر می‌شود.

مسائل معکوس از آنالیز طیفی برای عملگرهای استورم لیوویل کلاسیک بدون ناپیوستگی در مراجع [۵] – [۱] مطالعه شده است. بعضی ویژگی‌های مسائل معکوس و مستقیم برای مسائل مقدار مرزی ناپیوسته در فرم‌های گوناگون در [۱۰] – [۶] بیان شده است. به خصوص، در [۶] برای حالت

بازه متناهی $x \in [0, T]$، نشان داده شده است که اگر $q(x)$ از قبل روی $[0, T/2]$ شناخته شده باشد، آن‌گاه $q(x)$ به طور یکتا روی $[T/2, T]$ با مقادیر ویژه تعیین می‌شود. همچنین مسائل مقدار مرزی با نقاط منفرد در مراجع [۱۲] − [۱۱] مورد بررسی قرار گرفته است. مراجع فوق این نتیجه را حاصل می‌کند که وجود ناپیوستگی، تغییر کیفی اساسی در تحقیق عملگرها، به ویژه برای عملگرهای غیر خود الحاق منفرد ایجاد می کند. معادلات دیفرانسیل با نقاط برگردان نیز در [۱۴] − [۱۳] مطالعه شده است.

در سال‌های ۱۸۳۶ و ۱۸۳۷، استورم[۱] و لیوویل[۲] یک سری مقالات راجع به عملگرهای دیفرانسیل‌پذیر معمولی خطی از مرتبه دوم منتشر کردند که آغازگر مبحثی شد که امروزه آن را به عنوان نظریه استورم‌ـلیوویل می‌شناسیم. در سال ۱۹۱۰، ویل، اولین بار مقاله‌ای منتشر کرد که در آن مسائل استورم‌ـلیوویل منفرد مورد مطالعه قرار گرفته بودند.

به طور کلی پیشرفت اصلی در مطالعه نظریه طیفی مسائل عکس برای رده‌های گوناگونی از عملگرهای دیفرانسیل‌پذیر و انتگرالی در قرن بیستم انجام گرفت. از جمله کسانی که در این زمینه اولین مطالعات را انجام دادند، برنولی[۳]، آلمبرت[۴] و اویلر[۵] هستند.

هدف اصلی ما در این پایان‌نامه بررسی مسائل عکس معادله استورم‌ـلیوویل منفرد با ناپیوستگی تحت شرایط جهشی است. در اولین فصل این پایان نامه، تعاریف پایه آنالیز ریاضی، معادلات دیفرانسیل و توابع مختلط را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم، ما به بررسی خواص طیف و معرفی داده‌ی طیفی می‌پردازیم که رفتار طیف را منعکس می‌کند. فصل سوم را به بازسازی مساله عکس L از داده‌ی طیفی مفروض و همچنین اثبات قضیه یکتایی و ارائه یک روند برای جواب مساله عکس اختصاص می‌دهیم و شرایط لازم و کافی برای حل آن را برقرار می‌کنیم. برای این منظور، ما از روش نگاشت طیفی استفاده می‌کنیم که در آن از مفهوم روش انتگرال کانتور استفاده شده است([۱۵] و

---

[۱] sturm

[۲] liouville

[۳] Bernoulli

[۴] Alembert

[۵] Euler

[۱۶]). در فصل چهارم فرم‌های دیگری از معادلات استورم لیوویل را با شرایط جدید بیان و فرم‌های مجانبی جواب و مقادیر ویژه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

چکیده

در این رساله ابتدا عملگرهای دیفرانسیل پذیر مرتبه دوم غیرخودالحاق روی نیم خط که دارای یک ناپیوستگی در یک نقطه درونی با استفاده از شرایط جهشی هستند، مطالعه شده‌است که برای این عملگرها خواصی از طیف را بدست می آوریم و بازیابی عملگر مساله معکوس از مشخصه‌های طیفی مفروض را تحقیق می‌کنیم. ما برای این مساله معکوس، قضیه یکتایی را اثبات می‌کنیم و یک روش برای ساختار جواب بدست می آوریم و شرایط لازم و کافی را برای حل مساله معکوس فراهم می‌کنیم. سپس مسائل استورم لیوویل را با نقاط برگردان، شرایط جهشی و منفرد مورد مطالعه قرار می‌دهیم و برای این مسائل مقادیر ویژه مجانبی را بررسی می‌کنیم که برای بازیابی مسائل معکوس حائز اهمیت می‌باشند.

واژه‌های کلیدی : عملگرهای دیفرانسیل پذیر، مسائل مقدار مرزی، مشخصه‌های طیفی، مسائل معکوس

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل، ابتدا معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم را معرفی می‌کنیم. سپس به بررسی جواب‌های اساسی معادلات دیفرانسیل همگن می‌پردازیم. تعاریف کلیدی از مسائل مقدار مرزی و استورم لیوویل ارائه می‌کنیم. همچنین مفاهیم و قضایای اساسی از آنالیز ریاضی عنوان می‌کنیم که در روند این پایان نامه به ما یاری می‌رساند. در نهایت مباحثی از توابع مختلط که به توابع تحلیلی مربوط می‌شود را بیان می‌کنیم.

۲.۱ تعاریف پایه از معادلات دیفرانسیل

۱.۲.۱ تعریف

هر معادله شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

۲.۲.۱ تعریف

یک معادله دیفرانسیل خطی درجه دوم، معادله دیفرانسیلی است که بتوان آن را به فرم زیر نوشت:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x) \qquad (۱.۲.۱)$$

که در آن $a_0(x)$، $a_1(x)$، $a_2(x)$ و $b(x)$ توابعی پیوسته روی بازه I می‌باشند. اگر $a_i(x)$، $0 \leq i \leq 2$ و $b(x)$ توابعی ثابت باشند آن‌ها را ضرایب ثابت و در غیراین‌صورت آن‌ها را ضرایب متغیر می‌نامیم. حال اگر $a_2(x) \neq 0$ باشد، معادله‌ی فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=g(x) \qquad (۲.۲.۱)$$

به طوری که

$$g(x)=\frac{b(x)}{a_2(x)}\ ,\ q(x)=\frac{a_0(x)}{a_2(x)}\ ,\ p(x)=\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$$

روی I، توابعی پیوسته‌اند. معادله‌ی (۲.۲.۱) را فرم استاندارد معادله‌ی (۱.۲.۱) گوییم.

۳.۲.۱ تعریف

اگر به ازای هر x عضو I در معادله‌ی (۲.۲.۱)، $g(x)=0$ باشد یعنی:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \qquad (۳.۲.۱)$$

معادله‌ی (۲.۲.۱) را یک معادله همگن و در غیراین صورت آن را ناهمگن نامیم.

۳.۱ جواب‌های اساسی یک معادله همگن

در این بخش به بررسی حالات مختلف جواب برای یک معادله همگن می‌پردازیم و مفاهیمی مانند رونسکین، جواب‌های مستقل و وابسته خطی را بیان می‌کنیم.

۱.۳.۱ قضیه

فرض کنید $y_۱$ و $y_۲$ دو جواب معادله همگن

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = ۰ \qquad (۴.۳.۱)$$

و c ثابت باشد. دراین‌صورت $cy_۱ + y_۲$ نیز یک جواب معادله فوق است.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. □

۲.۳.۱ تعریف رونسکین[۱]

اگر $y_۱(x)$ و $y_۲(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه رونسکین این دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W[y_۱, y_۲](x) =< y_۱(x), y_۲(x) >= y_۱(x)y'_۲(x) - y'_۱(x)y_۲(x).$$

[۱] Wronskian

۳.۳.۱ قضیه

فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل (۴.۳.۱) روی بازه (a,b) در نظر گرفته شوند و $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته روی این بازه باشند. دراین صورت اگر $x_0 \in (a,b)$ در شرط

$$< y_1(x), y_2(x) > \neq 0$$

صدق کند، آن‌گاه هر جواب معادله دیفرانسیل همگن (۴.۳.۱)، ترکیب خطی از توابع y_1 و y_2 می‌باشد.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. □

۴.۳.۱ تعریف

دو تابع y_1 و y_2 را روی بازه I وابسته‌خطی گوییم هرگاه ثابت‌های c_1 و c_2 که همزمان صفر نیستند، موجود باشند به طوری که به ازای هر $x \in I$،

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

در غیراین‌صورت آن‌ها را مستقل خطی گوییم.

۵.۳.۱ تعریف

فرض کنید y_1 و y_2 جواب‌های معادله‌ی همگن (۴.۳.۱) روی بازه‌ی I باشند و $x_0 \in I$ یک نقطه‌ی دلخواه باشد. y_1 و y_2 را روی I وابسته‌ی خطی گوییم اگر و فقط اگر $\begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{bmatrix}$ وابسته‌ی خطی باشند.

۶.۳.۱ قضیه

اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله‌ی همگن (۴.۳.۱) روی بازه‌ی I باشند آن‌گاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

۱) $\{y_1, y_2\}$ مجموعه جواب‌های اساسی روی بازه‌ی I است.

۲) y_1 و y_2 روی I مستقل خطی هستند.

۳) برای هر $x \in I$، $W[y_1, y_2](x) \neq 0$.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. □

۷.۳.۱ قضیه

فرض کنید $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ توابعی پیوسته روی بازه $I := (a, b)$ باشند و $x_0 \in I$، آنگاه با در نظر گرفتن شرایط اولیه

$$y(x_0) = c_1, \qquad y'(x_0) = c_2$$

برای معادله‌ی $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ روی بازه (a, b) یک جواب یکتا وجود دارد.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. □

۴.۱ مسائل مقدار مرزی

در این بخش چند نوع شرط مرزی مختلف را برای معادلات دیفرانسیل خطی معرفی می‌کنیم.

۱.۴.۱ تعریف

مسئله پیداکردن جواب برای یک معادله دیفرانسیل خطی درجه‌دوم به صورت

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad x \in (a, b)$$

با شرایط عمومی

$$\begin{cases} a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = c_1 \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = c_2 \end{cases}$$

را یک مسئله مقدارمرزی دونقطه‌ای گوییم و شرایط فوق را شرایط عمومی مرزی روی نقاط a و b می‌نامیم. اگر $c_1 = c_2 = 0$ آن‌گاه شرایط مرزی را شرایط مرزی همگن و درغیراین‌صورت ناهمگن می‌گوییم. از انواع شرایط مرزی عبارت است از:

شرایط مجزا یا تفکیک پذیر
$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = c_1 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = c_2 \end{cases}$$

دیریکله
$$y(a) = c_1 \ , \ y(b) = c_2$$

نیومن
$$y'(a) = c_1 \ , \ y'(b) = c_2$$

متناوب
$$y(-T) = y(T) \ , \ y'(-T) = y'(T)$$

شرایط تفکیک پذیر حالت خاصی از شرایط مرزی عمومی و شرایط دیریکله و نیومن حالات خاصی از شرایط تفکیک پذیر می‌باشند. همچنین شرایط $y(a) = c_1$ و $y'(a) = c_2$ را به عنوان شرایط اولیه تعریف می‌کنیم.

۵.۱ مسائل استورم لیوویل

مسائل استورم لیوویل حالت خاصی از مسائل مقدار مرزی هستند. در اینجا، ما تعاریفی از نقاط برگردان، ناپیوستگی و منفرد که باعث ایجاد تغییرات اساسی در فرم جواب‌های مسائل استورم لیوویل می‌شود، ارائه می‌کنیم. همچنین به بیان مفاهیمی از عملگر استورم لیوویل، تابع مشخصه و ارتباط آن با مقادیر ویژه می‌پردازیم.

۱.۵.۱ تعریف

یک معادله استورم—لیوویل، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به صورت

$$-\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad x \in (a,b) \qquad (۵.۵.۱)$$

می‌باشد که در آن y تابعی از x است و همچنین توابع $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ توابعی پیوسته روی $[a,b]$ هستند و λ یک عدد می‌باشد که مقدار آن در معادله مشخص نیست.

۲.۵.۱ تعریف

$q(x)$ را تابع پتانسیل و $r(x)$ را تابع وزن یا چگالی گوییم و صفرهای $r(x)$ را نقاط برگردان مساله‌ی استورم لیوویل می‌نامیم.

۳.۵.۱ تعریف

یک مسئله استورم لیوویل را منفرد یا نامنظم گوییم هرگاه دارای یکی از شرایط زیر باشد:

(الف) $p(x)$ در a یا b صفر باشد.

(ب) $p(x)$ یا $q(x)$ یا $r(x)$ وقتی x به a یا b نزدیک می‌شود، به بی‌نهایت میل کند.

(پ) $a=-\infty$ یا $b=+\infty$.

درغیراین‌صورت مسئله استورم لیوویل را منظم گوییم.

۴.۵.۱ تعریف

شرط جهشی شرطی است که درآن، یک نقطه از بازه‌ی I در جواب‌های معادله‌ی استورم لیوویل ناپیوستگی ایجاد می‌کند به طوری که این شرط، جواب‌های قبل از نقطه‌ی ناپیوستگی را به جواب‌های بعد از نقطه‌ی ناپیوستگی مربوط می‌سازد و در واقع این مفهوم را می‌رساند که این جواب‌ها وابسته‌ی خطی هستند.

۵.۵.۱ تعریف

مقدار λ ای که بتوان به ازای آن یک جواب ناصفر برای مساله استورم-لیوویل بدست آورد را یک مقدار ویژه و تابع ناصفر بدست‌آمده برای جواب مساله استورم—لیوویل را تابع ویژه مربوط به λ می‌نامیم.

۶.۵.۱ تعریف

عملگر L که به صورت

$$L[y] = -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y$$

تعریف می‌شود، را عملگر استورم-لیوویل می‌نامیم.

۷.۵.۱ تعریف

فرض کنید f و g دو تابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[a, b]$ باشند. ضرب داخلی f و g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

۸.۵.۱ تعریف

عملگر دیفرانسیل خطی L را یک عملگر خودالحاقی گوییم هرگاه به ازای هر دو جواب u و v

$$(u, L(v)) = (L(u), v).$$

۹.۵.۱ تعریف

اگر در یک مساله‌ی استورم لیوویل تابع پتانسیل $q(x)$ حقیقی (مختلط) مقدار باشد و همچنین ضرایب شرایط مرزی نیز حقیقی (مختلط) باشند، در این صورت مساله را خود الحاق (غیر خودالحاق) نامیم.

۱۰.۵.۱ تعریف

فرض کنید $\varphi(x, \lambda)$ و $\psi(x, \lambda)$ جواب‌های مساله استورم‌ـلیوویل باشند، آن‌گاه

$$\Delta(\lambda) = < \varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda) >$$

را تابع مشخصه‌ی مساله‌ی استورم لیوویل می‌نامیم.

۱۱.۵.۱ تعریف

اگر y_1 و y_2 جواب‌های مستقل خطی مسئله استورم‌ـلیوویل در بازه $[a, b]$ باشند، آن‌گاه

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} M_1 y_1(0, \lambda) & M_1 y_2(0, \lambda) \\ M_2 y_1(0, \lambda) & M_2 y_2(0, \lambda) \end{vmatrix}$$

تابع مشخصه مساله استورم‌ـلیوویل نامیده می‌شود و صفرهای $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ از تابع مشخصه $\Delta(\lambda)$، بر مقادیر ویژه مساله استورم—لیوویل منطبق هستند.

۱۲.۵.۱ قضیه

مقادیر ویژه مسئله استورم—لیوویل شمارا و همگرا به بی‌نهایت می‌باشند.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. □

۱۳.۵.۱ قضیه

جواب‌های مساله مقدار مرزی برحسب ρ به طوری که $\lambda = \rho^{2}$ تام هستند.

برهان. به [۱۸] مراجعه شود. □

۶.۱ تعاریف پایه از آنالیز ریاضی

۱.۶.۱ تعریف

$\Omega \subseteq R^n$ را حوزه یا قلمرو گوییم هرگاه Ω باز و همبند باشد. بنابراین برای هر $x \in \Omega$، $r > 0$ ای موجود است به طوری که برای $B_r(x) = \{y \in R^n : d(x,y) < r\}$، داریم $B_r(x) \subseteq \Omega$.

۲.۶.۱ تعریف

تابع مختلط f تعریف شده روی قلمرو Ω، انتگرال پذیر لبگ از مرتبه‌ی p نامیده می‌شود هرگاه برای $1 \leq p < \infty$، $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx$ موجود و متناهی باشد. مجموعه‌ی چنین توابعی را با $L^p(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

۳.۶.۱ تعریف

مجموعه توابع پیوسته روی Ω را با $C(\Omega)$ و مجموعه توابع k—بار مشتق پذیر پیوسته روی Ω را با $C^k(\Omega)$ نشان می‌دهیم. حال فرض کنید $f \in C(\Omega)$، بستار مجموعه‌ی $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ را محمل تابع f روی Ω می‌نامیم و مجموعه توابع با محمل فشرده روی Ω را با $C_c(\Omega)$ معرفی می‌کنیم.

۴.۶.۱ تعریف

فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه باشد، گردایه τ از زیر مجموعه‌های X را یک توپولوژی در X نامیم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

۱) $X, \emptyset \in \tau$،

۲) اگر $A_i \in \tau$، اجتماع دلخواه از آن‌ها نیز عضو τ باشد یعنی $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$،

۳) اگر $A_i \in \tau$، اشتراک متناهی از آن‌ها نیز عضو τ باشد یعنی $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

در این صورت X را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم.

۵.۶.۱ تعریف

گردایه m از زیر مجموعه‌های X را یک σ−جبر در X گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

۱) $X \in m$،

۲) اگر $A \in m$، آن‌گاه $A^c \in m$،

۳) برای $A_i \in m$، $1 \leq i < \infty$ آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in m$.

۶.۶.۱ تعریف

هرگاه m یک σ−جبر روی X باشد آن‌گاه (X, m) را یک فضای اندازه پذیر و اعضای m را مجموعه‌های اندازه پذیر در X می‌گوییم.

۷.۶.۱ تعریف

فرض کنید $f : X \to Y$، X یک فضای اندازه پذیر و Y یک فضای توپولوژیک باشد. f را اندازه پذیر گوییم هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی باز $V \subseteq Y$، $f^{-1}(V) \subseteq X$ اندازه‌پذیر باشد.

۸.۶.۱ تعریف

یک تابع با برد مثبت بر روی اعضای یک $\sigma-$جبر m از X را که به طور شمارا جمع پذیر باشد را یک اندازه مثبت می‌نامیم. اگر اندازه مثبت را با μ نشان دهیم، $\sigma-$جبر m را به طور شمارا جمع پذیر گوییم هرگاه $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in m$ گردایه‌ای دو به دو جدا از هم باشند و فرض کنیم $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$، در این صورت

$$\mu(E) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

۹.۶.۱ تعریف

برای $\sigma-$جبر m، گوییم $E \subseteq m$ تقریباً همه جا دارای خاصیت P است هرگاه زیر مجموعه‌ی نقاطی از E که دارای چنین خاصیتی نمی‌باشد از اندازه صفر باشد.

۱۰.۶.۱ تعریف

فرض کنید تابع u تقریباً همه جا روی Ω تعریف شده باشد. در این صورت u را روی Ω انتگرال پذیر موضعی گوییم و می‌نویسیم $u \in L^1_{loc}(k)$، هرگاه برای هر زیر مجموعه‌ی فشرده اندازه پذیر k از Ω، $u \in L^1(k)$ باشد.

۱۱.۶.۱ تعریف

تابع مختلط f تعریف شده بر بازه I را مطلقاً پیوسته گوییم و با $AC(I)$ نشان می‌دهیم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ای موجود باشد به طوری که به ازای هر n زیر بازه جدا از هم (α_1, β_1)، (α_2, β_2)،...، (α_n, β_n) در I که $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i - \alpha_i| < \delta$، نتیجه بگیریم $\sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$.

۱۲.۶.۱ تعریف

توابع مطلقاً پیوسته روی هر زیر مجموعه‌ی فشرده از I را مطلقاً پیوسته موضعی گوییم و مجموعه‌ی این توابع را با $AC_{loc}(I)$ نشان می‌دهیم.

۱۳.۶.۱ تعریف

فرض کنید V یک فضای خطی روی R باشد. یک نرم روی V یک نگاشت $P : V \to R$، با ضابطه‌ی $x \mapsto \|x\|$ می‌باشد که دارای شرایط زیر است:

۱) برای هر $x \in V$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

۲) برای هر $x \in V$ و $\alpha \in R$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳) برای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای خطی V با نرم فوق را فضای خطی نرم‌دار می‌نامیم.

۱۴.۶.۱ تعریف

هر فضای خطی نرم‌دار که نسبت به متر تعریف شده به وسیله‌ی نرمش تام باشد، یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد، را یک فضای باناخ [۲] می‌نامیم.

۱۵.۶.۱ تعریف

اگر X و Y دو فضای برداری نرم‌دار روی یک میدان باشند، نگاشت $T : D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ را یک عملگر می‌گوییم به طوری که $D(T)$ دامنه عملگر T و $R(T)$ برد عملگر T نامیده می‌شود. همچنین عملگر T را خطی گوییم هرگاه:

به ازای هر $x, y \in D(T)$ و اسکالر α، $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$.

---

۲ Banach Space