بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

موضوع:

نمایش‌ها و سرشت‌های تحویل ناپذیر با وفا در P- گروهها

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر محمدرضا درفشه

نگارش

محمودرضا غلامی

تیرماه ۱۳۷۱

تقدیم به :
========

پدرومادرمهربانم
==================

و
=

تقدیم به :
========

برادران وخواهرمهربانم
====================

و
=

تقدیم به :
========

همسرمهربانم
==================

و
=

تقدیم به :
========

فرزندم حمید
====================

سپاس خداوند بخشنده و مهربان که سلامتی را به ما ارزانی داشته و توفیق کسب علم و دانش را به ما عطا کرده است . لازم می دانم از همه کسانی که در امر تعلیم و تربیت و مراحل فراگیری علم و دانش مرا یاری کرده اند تشکر و قدردانی کنم . بخصوص از پدر و مادر و برادران و خواهر و همسر مهربانم که همیشه چراغ راهم و مشوق تحصیلم بوده اند .

همچنین از استاد محترم آقای دکتر محمدرضا درفشه که وقت خود را صرف این پایان نامه نموده اند و بنده از راهنمائی های ایشان بهره برده ام تقدیر و تشکر می کنم .

و از آقایان دکتر مهدوی هزاوه ای و دکتر حسین ذاکری و دکتر احمد موسوی که زحمت مطالعه این پایان نامه را بعهده داشتند نیز ، تشکر فراوان می نمایم .

و لازم می دانم که از مسئول سازمان چاپ پاک و همه دست اندرکاران این سازمان مخصوصا" از سرکار خانم نسرین اسلامی که تایپ فارسی پایان نامه و سرکار خانم مریم هراتی که تایپ انگلیسی و لاتین پایان نامه را برعهده گرفتند تشکر و قدردانی کنم .

هیئت ممتحنین :

استاد پروژه : جناب آقای دکتر محمدرضا درفشه

ممتحن اول : جناب آقای دکتر محمدمهدوی هزاوه‌ای

ممتحن دوم : جناب آقای دکتر احمد موسوی

استاد دعوت‌شده : جناب آقای دکتر حسین ذاکری

فهرست مطالب

چکیده

با توجه به اینکه نمایش‌ها و سرشت‌های یک گروه در نظریه گروهها دارای جایگاه خاصی هستند برآن شدیم تا P- گروههای متناهی که دارای سرشت‌های تحویل‌ناپذیر با وفا و از درجه متمایز هستند دسته‌بندی کنیم. در این راستا ابتدا نمایش و سرشت‌ها بطور کامل توصیف شده، سپس دو P- گروه خاص معروف به extra-special و حاصلضرب حلقوی دو P- گروه معرفی شده است.

P- گروه اول اگر مرتبه‌اش p^{2r+1} باشد دقیقاً $(p-1)$ نمایش تحویل ناپذیر با وفا همگی از درجه p^r دارد.

P- گروه‌های دوم دارای خاصیت بهتری هستند زیرا بعضی از آنها دارای نمایش تحویل ناپذیر با وفا از درجه یکسان اند. مثل $C_p \wr P$ که در آن P یک P- گروه متناهی است و همه نمایش‌های تحویل ناپذیر با وفای این گروه دارای درجه $|P|$ است و بعضی دیگر از آنها دارای نمایش‌های تحویل ناپذیر با وفا از درجه متمایزاند که بیشتر این گروه را مدنظر قرار داده است و در نهایت ثابت شده است که اگر یک P-گروه دارای سرشت‌های تحویل ناپذیر با وفا از درجه متمایز داشته باشد مرتبه آن بزرگتر یا مساوی P^8 است.

در حالت $p \neq 2$ (یعنی P اول فرد است) P- گروهی ساخته شده است که از مرتبه P^8 است و دارای سرشت‌های تحویل ناپذیر با وفا و از درجه متمایز است.

مقـــدمه :

با مفهوم نما یش وسرشت یک گروه ا بتدا با شرکت دردرس نما یش گروهها کــه آقا ی دکتردرفشه آ ن را تدریس می کردندآشنا شدم وبا کسب ا طلاعا ت لازم درا یــن زمینه وعلاقه ا ی که به نما یش وسرشت گروهها پیدا کرده بودم تصمیم گرفتم‌درا یــن زمینه تحقیق بیشتری دا شته با شم . به‌همین منظوربا مرا جعه به‌ا ستا دمحترم‌دکتر درفشه علا قه‌خودرا نسبت به‌ا ین موضوع ا برا زکردم وا یشا ن نیزبا کما ل مســرت پس ا زرا هنما یی ها ی لازم مقا له‌ا ی که‌دررا بطه‌با نما یش وسرشت گروهها بــود در ا ختیا رمن قرا ردا دندوعملا" کا رپا یا ن نا مه‌کا رشنا سی ا رشدخودرا شروع کــردم . کا را صلی را روی مقا له M.C.TAMBURINI و L.DIMARTINO متمرکزکردم .

فصل ا ول را به نما یش گروهها ا ختصا ص دا دم وسعی کردم مطا لب موردا حتیا ج را به‌طورخلاصه‌بیا ورم ا زجمله‌ا رتبا ط نما یشها به مدولها وقضا یا ی مربوط به‌آ نها بخصوص قضیه ودربرن وقضیه مشکه ونتا یج آ نها که‌تعدا دکلاسها ی تزویج یک گروه G را به‌تعدا د KG- مدولها ی تحویل نا پذیرغیرا یزو مر ف مربوط می کنند . همچنین درا ین فصل هم ا رزی دونما یش وتحویل نا پذیری وتحویل پذیری یک نما یــش بیا ن گردیده‌ا ست .

درفصل دو م که مشتمل برشش بخش ا ست تعریف سرشت یک گروه وقضا یا ی مهمی که‌تحت عنوا ن روا بط تعا مدسطری وستونی مطرحندبیا ن شده وهمچنین قضیه‌ا ی که را بطه‌بین سرشتها ی تحویل نا پذیریک گروه وکلاسها ی تزویج آ ن گروه‌را بیــا ن

می کند آورده شده و سرشت منظم یک گروه تعریف شده است .

در بخش دوم از فصل دوم حاصل ضرب گروهها و سرشت حاصل ضرب گروهها بررسی شده است همچنین سرشت خطی وسرشت ونمایش گروههای آبلی وگروههای دوری موردمطالعه قرار گرفته ، البته چون حاصل ضرب گروهها موردنیاز بوده به تفصیل موردبررسی قرار گرفته است .

دربخش سوم : زیرگروهها وتعدادی تعریف مقدماتی مورداستفاده بیان شده وتحت یک قضیه رابطه بین سرشتهای گروه G وگروه خارج قسمتی $G/_N$ (N زیر گروه نرمال G) که هسته آنها N را دربردارد بیان شده است . با استفاده از قضیه دیگری تعداد سرشتهای خطی یک گروه تعیین شده وشرط دارا بودن سرشتهای تحویل ناپذیرباوفا برای یک گروه که از قضایای مهم می باشد مطرح شده است .

دربخش چهارم سرشتهای القایی موردبررسی قرار گرفته وچندرابطهٔ مهم در محاسبه سرشتهای القاء شده یک گروه از جمله خاصیت تعدی سرشتها وقانون تقابل فرابینیوس اثبات شده است بدنبال آن تعریف سرشت monomial ومزدوج یک سرشت آمده که براساس آن قضیه مشهورکلیفوردتحت دو قضیه بیان واثبات گردیده است . همچنین تعریف گروه inertia وارتباط آن با تحویل ناپذیری سرشت القایی موردبررسی قرار گرفته ودرادامه گروه پوچ توان تعریف شده است وقضیه معروف Ito درموردد رجه یک سرشت بیان واثبات شده همچنین قضایای گالاهرو Brauer ونتایج آنها موردبررسی قرار گرفته است .

دربخش پنجم گروههای جابجایی وسرشتهای جابجایی موردبررسی قرار گرفته‌که با بررسی عمل یک گروه روی یک مجموعه ، نمایش ها وسرشتهای جابجایی گروههای جابجایی را بیان کرده‌ایم .

دربخش ششم تعریف P-گروه extra-special وتعریف حاصل ضرب مرکزی زیرگروههای یک گروه آمده‌وارتباط آنها را موردبررسی قرارداده‌ایم وسرشتهای گروه extra-special را تحت یک قضیه معرفی شده‌است .

درفصل سوم دربخش اول حاصل ضرب نیم مستقیم را معرفی کرده‌ایم وچند قضیه‌ای دررابطه‌آن بیان واثبات شده‌است دربخش دوم این فصل یکی ازگروههای مهم بنام حاصل ضرب حلقوی دوگروه‌که یکی ازانواع ضرب بین گروهها است موردمطالعه‌قرارگرفته‌وخواص این گروهها را بااختصارتشریح شده‌وبدلیل نیاز به این گروه‌یک فصل به‌آن اختصاص داده‌شده‌است درادامه‌این بخش نمایش های جابجایی حاصل ضرب حلقوی دوگروه موردبررسی قرارداده‌ایم دربخش سوم این فصل نمایش وسرشتهای حاصل ضرب حلقوی دوگروه موردبررسی قرارداده‌شده‌است و قضایای چنددراین رابطه‌بیان واثبات کرده‌ایم .

درفصل چهارم که‌یکی ازبااهمیت ترین قسمتها است با چندقضیه مهم ، P-گروههای متناهی که‌دارای سرشت های تحویل ناپذیربا وفاازدرجه متمایزهستند دسته‌بندی کرده‌ایم . این فصل بنابرتقسیم بندی مقاله Tamburini و Martino تنظیم شده‌وسعی شده‌قضایای این مقاله‌روشن وواضح بیان

وا شبا ت شو د .

درتنظیم ا ین پا یا ن نا مه سعی شده ا ست هرجا که نیا زبا شدتعا ریف مقدما تی آ ورده شو دوبا ا ستفا ده ا زا ین تعا ریف مبحث ا صلی موردبحث شروع شود . لذا بعضی ا زبخش ها که می با یست بدنبا ل هم آ ورده شوندبترتیب آ ورده نشده ا ست ا زجملـــه حا صل ضرب گروهها که دربیشترفصل ها بنا برنیا ز ، قسمتی ا نتخا ب شده وا ستفـا ده لازم ا زآ ن شده ا ست ضمنا" بیشترمطا لب ا زدوکتا ب نظریه نما یش ها وسرشتها مولـف دا رنف وا یزا ک گرفته شده که بعضی ا زقضا یا ولم ها ونتا یج آ نها بدون ا شبـــا ت آ ورده ا یم وبعضی ا زبرها ن ها با عبا رت ر. ک .[ ] ص به فهرست منا بع رجـــوع دا ده شده ا ست وا ین عبا رت دا را ی ا ین معنی ا ست که رجوع کنیدبه کتا ب یا مقا له [ ] صفحه . . .

فصل اول : نمایش گروه‌ها

تعریف : ۱-۱ فرض کنید G یک گروه R یک حلقه جا بجای یکدار و $GL(n,R)$ مجموعه همه ماتریسهای وارون پذیر $n\times n$ روی R است ، یک نمایش ماتریسی از G روی R عبارتست از همومورفیسمی از G به $GL(n,R)$ مانند T

$$T: G \longrightarrow GL(n,R)$$

$T(g) \in GL(n,R)$ $\forall g \in G$. n را درجه نمایش می نامند .

تعریف : ۲-۱ مجموعه $\{g ; g\in G, T(g)=I_{n\times n}\}$ را هسته نمایش می نامندوآن را با $KerT$ نمایش می دهیم وثابت می شودکه $KerT \trianglelefteq G$ است .

تعریف : ۳-۱ نمایش ماتریسی T را باوفا می نامیم هرگاه نمایش ماتریسی T یک بیک باشدیعنی $KerT = 1$.

تبصره : اگر R میدانی با مشخصه صفر($Char\ R=0$) باشد T را یک نمایش معمولی گروه G نامیده می شودواگر R میدانی با مشخصه $P\neq 0$ (P عدد اول) باشد T را نمایش پیمانه‌ای G نامیده می شودواگر R یک حوزه صحیح باشد T را یک نمایش درست می نامند .

توجه : فرض کنید R یک حلقه جا بجای و V یک R- مدول است مجموعه همه همومورفیسم های از V را با $End_R(V)$ نمایش می دهیم ومجموعه همه عناصر وارون پذیر $End_R(V)$را با $GL(V)$ نمایش می دهیم . اگر V یکR- مدول آزاد با بعدمتناهی n باشدآنگاه $GL(V) \cong GL(n,R)$ دراین صورت نمایش ماتریسی

به‌صورت $T: G \to GL(V)$ درمی آیدکه آن را یک نمایش گروه G می نامیم و

$\dim V = n$ را درجه نمایش T نامیده می شود.

تعریف :۴ـ ۱ فرض‌کنید $T:G\to GL(V)$ و $T':G\to GL(W)$ نمایش های گروه G

باشندکه درآن V و W ، R-مدولهای با بعدمتناهی اند. نمایش T و T' هم‌ارز

می نامیم هرگاه ایزومورفیسم $S:V\to W$ وجودداشته باشدبطوریکه برای هر $g\in G$

داشته باشیم $T(g) = S^{-1}T'(g)S$ اگر M ماتریس نمایش T و N نمایش

ماتریسی $T'(g)$ باشددا ریم $M=S^{-1}NS$ که می توان نتیجه‌گرفت که اگر $\dim V=n$

و $\dim W=m$ آنگاه $n=m$.

تعریف : ۵ـ۱ فرض‌کنید G یک گروه و R یک حلقه باشدگروه‌حلقه RG

عبارت است از مجموعه $RG = \{ \Sigma r_g . g \mid r_g \in R\ ,\ g\in G\}$ که‌جمع وضرب روی

RG به‌صورت زیرتعریف می شود.

$$\sum_{g\in G} r_g . g + \sum_{g\in G} s_g . g = \sum_{g\in G} (r_g + s_g) . g$$

$$\Big(\sum_{g\in G} r_g . g\Big)\Big(\sum_{h\in G} r_h . h\Big) = \sum_{g,h\in G} r_{gh} . gh$$

و $\sum_{g\in G} r_g . g = \sum_{g\in G} s_g . g$ اگروفقط اگر $r_g = s_g$.

گروه‌حلقه RG را گروه‌حلقه G روی R می نامیم . اگر R یکدار باشد RG

نیزیکدار است واگر R جابجای باشدلزوما" RG جابجایی نیست .

اگر R یکدار باشد $G\subsetneq RG$ و $R\subsetneq RG$ است .

می توان RG را به‌عنوان یک R مدول درنظرگرفت با درنظرگرفتن ضرب

یک عنصر R درعناصر RG که به‌صورت زیرتعریف می شود :

$$\forall r \in R \;,\quad \forall \sum_{g \in G} r_g . g \in RG \qquad r\left(\sum_{g\in G} r_g . g\right) = \sum_{g\in G} (r r_g) g$$

قضیه : ۱-۶ : مطالعه نمایش‌های گروه G روی R معادل با مطالعه RG-مدولهای آزاد با بعدمتناهی است .

برهان : فرض کنید $\phi : G \to GL(V)$ یک نمایش گروه G باشدکه درآن V یک R - مدول آزاد است با تعریف $V ,\ g.v = \phi(g) V$ تبدیل به‌یک RG - مدول میشود

برعکس : فرض کنید V یک RG- مدول باشدبرای هر $g \in G$ تعریف می کنیم

$$\psi(g) : V \to V$$

$$\psi(g) V = g.V$$

آنگاه هر $\psi(g)$ در $GL(V)$ قرار دارد وچون V یک RG- مدول است می توان نتیجه گرفت که

$$\psi(g_1 g_2) v = g_1 . g_2 . v = g_1 (g_2 v) = g_1 . \psi(g_2) v = \psi(g_1)(g_2) v . \forall v \in V$$

بنابراین $\psi(g_1 g_2) = \psi(g_1)\ \psi(g_2)$ یعنی ψ یک نمایش است ψ را نمایش تامین شده به‌وسیله V نامیده می شود .

قضیه : ۱-۷ فرض کنید V و W هردو RG - مدول هستندوبه عنوان R - مدول دارای بعدمتناهی اندآنگاه V و W بعنوان RG - مدول ایزومرفنداگروفقط اگرنمایش‌های تامین شده بوسیله آنهاهم ارزباشند . (برهان ر . ک [۴] ص ۳)

تعریف : ۱-۸ R - مدول V را تحویل ناپذیرمی نامیم اگرفقط O وخود V زیرمدولهای آن باشند . درغیراین صورت V را R- مدول تحویل پذیر

می نامیم و R-مدول V را کاملاً" تحویل پذیرمی نامیم اگربرای هرزیرمدول W_1 از V یک زیرمدول W_2 از V وجودداشته باشدبطوریکه : $V = W_1 \oplus W_2$

تعریف : ۹-۱ فرض کنید G یک گروه و $T: G \to GL(V)$ یک نمایش G باشد نمایش T را تحویل ناپذیر،کاملاً" تحویل پذیر ، تحویل پذیرمی نامیم هرگاه V به عنوان یک R- مدول به ترتیب تحویل ناپذیر، کاملاً" تحویل پذیروتحویل ـ پذیرباشد .

لم : ۱۰-۱ فرض کنید V یک R مدول تحویل پذیربا زیرمدول W باشد بنابراین می توان نوشت که $V=W+W_1$ جائیکه W_1 یک زیرفضای V از V است دراین صورت نمایش ماتریسی $T:G \to GL(V)$ به صورت زیراست :

$$[T(g)] = \begin{bmatrix} A(g) & B(g) \\ 0 & C(g) \end{bmatrix}$$

که درآن $A(g)$ یک ماتریس $K \times K$ و $B(y)$ یک ماتریس $(n-k)\times(n-k)$ می باشند و O یک ماتریس صفرواگر $V=W \oplus W_1$ یعنی V کاملاً" تحویل پذیرباشدآنگاه نمایش ماتریسی T به صورت زیراست :

$$[T(g)] = \begin{bmatrix} D(g) & 0 \\ 0 & E(g) \end{bmatrix}$$

که درآن $D(g)$ یک ماتریس $k \times k$ و $E(g)$ یک ماتریس $(n-k)\times(n-k)$ است .

(برهان ر. ک . [۴] ص ۵)

نتیجه : ۱۱-۱ اگر V کاملاً" تحویل پذیرباشدیعنی $V=W_1\oplus\ldots\oplus W_t$ که