دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل برخی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کسری یک بعدی و دو بعدی با استفاده از روش‌های تفاضل متناهی

استاد راهنما

دکتر بهنام سپهریان

استاد مشاور

دکتر علی محمد نظری

پژوهشگر

فاطمه یعقوبی

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: یعقوبی　　　　نام: فاطمه

عنوان: حل برخی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کسری یک بعدی و دو بعدی با استفاده از روش‌های تفاضل متناهی

استاد راهنما: دکتر بهنام سپهریان
استاد مشاور: دکتر علی محمد نظری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　رشته: ریاضی کاربردی　　گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: اراک　　　　دانشکده علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲　　تعداد صفحات: ۹۴

واژگان کلیدی: مشتق‌کسری، روش‌تفاضل‌متناهی، توابع اسپلاین خطی، معادله‌ی فوکر-پلانک کسری.

چکیده

در این پایان‌نامه با روش‌های تفاضل متناهی و انتگرال و مشتق کسری یک تابع و برخی از ویژگی‌های آن‌ها آشنا می‌شویم. به حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کسری با روش تفاضل متناهی می‌پردازیم که این معادلات شامل معادله‌ی گرمای خطی کسری و معادله‌ی فوکر-پلانک خطی کسری و معادله دوبعدی گرمای کسری می‌باشد.
در این پایان‌نامه از چهار روش تفاضل متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری استفاده شده است که به جزء یک روش سه روش دیگر پایدار نامشروط است.

تقدیم به روح بلند پدرم و وجود پر محبت مادرم

الهی...

پسندیدگان تو را به تو جستند: بپیوستند، ناپسندیدگان تو را به خود جستند: بگسستند، نه او که پیوست به شکر رسید، نه او که گسست به عذر رسید! ای برساننده در خود و رساننده به خود برسانم که کس نرسید به خود. الهی! دلی ده که طاعت افزاید، طاعتی ده که به بهشت رهنمون آید، علمی ده که در او آتش هوا نبود، عملی ده که در او آب ریا نبود، دیده‌ای ده که عز ربوبیت تو بیند، دلی ده که ذل عبودیت تو گزیند، نفسی ده که حلقهٔ بندگی تو در گوش کند، جانی ده که زهر حکمت را به طبع نوش کند. الهی! به هر صفت که هستم بر خواست تو موقوفم، بر هر نام که مرا خوانند به بندگی تو معروفم، تا جان دارم رخت از این کوی برندارم، او که تو آن اویی بهشت او را بنده است، او که تو در زندگانی اویی جاوید زنده است.

سپاس گزاری... [1]

با سپاس از سه وجود مقدس:
آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...
موهایشان سپید شد تا ما رو سفید شویم...
و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...
پدر،مادر و استاد ارجمند.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد فرزانه، جناب آقای دکتر بهنام سپهریان، که به معنای واقعی کلمه، استاد راهنمای من بودند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر علی محمد نظری که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در اینجا لازم می‌دانم از دوستان عزیزم خانم عطیه نظامی،ریحانه باقری که در این مدت همواره یاریگر من بودند قدردانی کنم. و همچنین از سایر همکلاسی‌هایم کمال تشکر و سپاس را دارم.

در پایان از خانواده‌ی عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند تشکر می‌کنم.

فاطمه یعقوبی
۱۳۹۲

---

[1] fateme.yaqoobi@yahoo.com

چکیده

در این پایان‌نامه با روش‌های تفاضل متناهی و انتگرال و مشتق کسری یک تابع و برخی از ویژگی‌های آن‌ها آشنا می‌شویم.
به حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کسری با روش تفاضل متناهی می‌پردازیم که این معادلات شامل معادله‌ی انتقال گرمای خطی کسری و معادله‌ی فوکر- پلانک خطی کسری و دو بعدی گرمای کسری می‌باشد.
در این پایان‌نامه از چهار روش تفاضل متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری استفاده شده است که به جزء یک روش سه روش دیگر پایدار نامشروط است.

واژگان کلیدی

مشتق کسری، روش تفاضل متناهی، توابع اسپلاین خطی، معادله فوکر- پلانک کسری.

پیشگفتار

مشتق و انتگرال کسری برای مدل‌سازی برخی پدیده‌ها در علوم مختلفی از جمله فیزیک، شیمی و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

از آن‌جا که جواب تحلیلی بیشتر معادلات دیفرانسیل کسری را نمی‌توان به آسانی به دست آورد، حل عددی این معادلات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

در این پایان‌نامه ابتدا با روش‌های تفاضل متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری آشنا می‌شویم. سپس به حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با روش‌های تفاضل متناهی می‌پردازیم.

به طور کلی این پایان‌نامه از ۶ فصل تشکیل شده است. فصل اول به آشنایی با مفهوم مشتق و انتگرال کسری و روش‌های تفاضل متناهی اختصاص داده شده است . فصل دوم به بررسی یک روش تفاضل متناهی برای حل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی خطی کسری گرما می‌پردازیم که یک روش پایدار نامشروط می‌باشد. در فصل سوم به ارائه روش تفاضل متناهی وزنی برای معادله‌ی دیفرانسیل جزئی خطی کسری گرما و مقایسه آن با روش های دیگر می‌پردازیم. فصل چهارم شامل معرفی و حل معادله پخش-وزش کسری با روش تفاضلات متناهی بیان شده است، که یک روش پایدار نامشروط و از مرتبه دقت دو می باشد.

فصل پنجم پژوهش جدیدی است که در این پایان‌نامه صورت گرفته و به حل معادله‌ی فوکر-پلانک کسری در حالت یک بعدی با استفاده از یکی از روش‌های مورد بحث در فصل چهار پرداخته است. فصل ششم به بیان یک روش فشرده برای حل معادله‌ی دوبعدی گرمای کسری می‌پردازد که یک روش نامشروط است و مرتبه دقت روش چهار می‌باشد. در انتهای هر فصل نتایج عددی برای پیاده سازی روش‌ها آورده شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که نتایج عددی با نتایج تئوری هم‌خوانی داشته و روش پایدار نامشروط است. شایان ذکر است که تمام محاسبات و نمودارهای رسم شده با نرم افزار $Maple$۱۲ انجام شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱
تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل مطالبی را که در این پایان نامه به آن نیازمندیم به اختصار توضیح می‌دهیم.

۱.۱ یادآوری

تعریف ۱.۱.۱. یک مسأله را خوش وضع می‌نامیم اگر
الف)دارای جواب باشد.
ب)جوابش یکتا باشد.
ج)جواب به طور پیوسته به داده‌ها و پارامترها وابسته باشد.
مفهوم قسمت الف وب واضح است. اما در مورد قسمت ج می‌گوییم جواب به طور پیوسته به داده‌ها و پارامترها وابسته است اگر تغییرات کوچک در توابع اولیه و مرزی و مقدار پارامترها موجب تغییر کوچکی در جواب شود.

قضیه ۲.۱.۱. (قضیه هم‌ارزی لکس [۱]) یک روش تفاضل متناهی سازگار برای مسأله‌ی خطی مقدار اولیه -مرزی خوش وضع پایدار است اگروفقط اگر همگرا باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید $I \subseteq R$ ، می‌گوییم تابع $f : I \longrightarrow R$ مطلقاً پیوسته است هر گاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر دنباله از زیربازه‌های باز جدا از هم(یعنی اشتراک آن‌ها تهی باشد) مانند $\{(a_n, b_n)\}_{n\geq 1}$ که در رابطه‌ی $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta$ صدق کنند داشته باشیم $\sum_{n=1}^{\infty}|f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon$.

تعریف ۴.۱.۱. فضای توابع پیوسته روی R^n را با $C(R^n)$ نمایش می دهیم.

[۱]Lax Equivalence Theorem

تعریف ۵.۱.۱. فضای تمام توابع روی R^n که مشتقات جزئی آن‌ها تا مرتبه‌ی k $(k \in N)$ وجود دارد و پیوسته است را با $C^k(R^n)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $(-\infty < a < b < +\infty)$ و $[a,b]$ یک بازه کراندار باشد آن‌گاه فضای توابع مطلقاً پیوسته روی بازه $[a,b]$ را با $AC[a,b]$ نشان می‌دهیم و برای $n \in N$ فضای توابع مختلط را که دارای مشتق‌های پیوسته تا مرتبه‌ی $n-1$ روی بازه $[a,b]$ هستند به طوری که $f^{n-1} \in AC[a,b]$ با AC^n نشان می‌دهیم.

نکته۷.۱.۱. اگر $f \in C^{m+1}(R^n)$ و $\partial^\alpha f \in L^1(R^n) \cap C_\circ(R^n)$ برای $\alpha \leq m+1$ آن‌گاه ثابت مثبت c وجود دارد به طوری که

$$|\widehat{f}(\xi) \leq c(1+|\xi|)^{-m-1}.$$

در نتیجه $\widehat{f} \in L^1(R^n)$.[۷]

۲.۱ حساب کسری

در ابتدا به بیان تاریخچه‌ای از حساب کسری می‌پردازیم.

۱.۲.۱ تاریخچه

حساب کسری، تقریباً قدمتی برابر با حساب صحیح دارد در واقع اسم حساب کسری یک نام غلط است. ابتدا ریاضی‌دان‌ها مشتق وانتگرال را تنها به مرتبه‌ی کسری بسط دادند و آن را حساب کسری نامیدند. وقتی مشتق وانتگرال به مرتبه‌ی دلخواه تعمیم داده شد این اسم باقی ماند که تا حدودی گمراه کننده است .

بیشتر ریاضی‌دان‌ها با مشتق مرتبه‌ی n ام $\frac{d^ny}{dx^n}$ لایب‌نیتز [۲] آشنا هستند (n عدد صحیح است) و مشتق کسری همان $\frac{d^ny}{dx^n}$ است وقتی n یک کسر است .

در۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ آل هوپیتال[۳] از لایب‌نیتز پرسید اگر $n = \frac{1}{2}$ باشد $\frac{d^ny}{dx^n}$ چگونه تعریف می‌شود وبا این سوال مطالعه در حساب کسری آغاز شد. در پی سال‌ها در توسعه حساب کسری پیشرفت‌های کمی به‌دست آمد.

در سال ۱۸۱۹، لاکراکس [۴] با $y = x^m$ که m یک عدد صحیح است شروع کرد و مشتق مرتبه‌ی

[۲] Leibniz
[۳] L 'Hopital
[۴] Lacroix

n ام آن را به صورت زیر به‌دست آورد

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \qquad m \geq n,$$

یا به عبارت دیگر

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \qquad m \geq n,$$

که $\Gamma(.)$ تابع گاما است.

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1} dx, \qquad \nu > 0, \tag{۱.۱}$$

سپس برای $y = x$ و $n = \frac{1}{2}$ جواب زیر را به‌دست آورد

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

مشکل روش لاکراکس این بود که برای خیلی از توابع قابل استفاده نبود. بیشترین پیشرفت در حساب کسری در سال ۱۸۳۲ توسط جوزف لیوویل [۵] به دست آمد. او با نتایج شناخته شده در مورد مشتق از مرتبه‌ی صحیح تابع e^{ax} شروع کرد.

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax},$$

و مشتق از مرتبه‌ی دلخواه تابع e^{ax} را به صورت

$$D^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax}, \tag{۲.۱}$$

بیان کرد .سپس مشتق از مرتبه‌ی دلخواه را برای هر تابع $f(x)$ که بتوان آن را به صورت یک سری به شکل

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \qquad Re(a_n) > 0, \tag{۳.۱}$$

بسط داد، به صورت زیر تعریف کرد

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x},$$

[۵] Joseph Liouville

که این فرمول به عنوان اولین فرمول لیوویل برای مشتق کسری شناخته شد. اگر چه این نمایش از مشتق برای مرتبه‌ی دلخواه است اما تنها برای توابعی مفید است که بتوان آن‌ها را به شکل (۳.۱) نوشت. به علت محدودیت این تعریف لیوویل تلاش خود را برای ارائه‌ی تعریف دوم شروع کرد. او ابتدا یک انتگرال به صورت زیر تعریف کرد که بسیار نزدیک به تعریف تابع گاما در (۱.۱) است.

$$I = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu} du, \qquad a > 0, \qquad u > 0, \tag{۴.۱}$$

و با تغییر متغیر $xu = t$ رابطه‌ی زیر را به‌دست آورد

$$I = x^{-a} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = x^{-a} \Gamma(a).$$

رابطه‌ی بالا معادل است با

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I.$$

با توجه به تعریف انتگرال I در (۴.۱) و مشتق مرتبه‌ی ν در (۲.۱) ، لیوویل با گرفتن D^ν از هر دو طرف معادله‌ی بالا فرمول زیر را به‌دست آورد

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a+\nu-1} e^{-xu} du. \tag{۵.۱}$$

از طرفی دوباره به کمک تغییر متغیر $xu = t$ انتگرال موجود در رابطه‌ی بالا را به شکل زیر نوشت

$$\int_0^\infty u^{a+\nu-1} e^{-xu} du = x^{-(a+\nu)} \Gamma(a+\nu). \tag{۶.۱}$$

سرانجام او با استفاده از روابط (۵.۱) و (۶.۱) دومین تعریف مشتق کسری خود را به صورت

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}, \qquad a > 0,$$

ارائه کرد که باز هم این تعریف محدود به توابعی به شکل $a > 0$ ، $f(x) = x^{-a}$ بود. به احتمال زیاد مفیدترین پیشرفت در توسعه‌ی حساب کسری از مقاله‌های برنارد ریمان[۶] که در سال ۱۸۹۲ منتشر شدند، به‌دست آمد. ریمان با تعمیم سری تیلور فرمول زیر را برای مشتق از مرتبه‌ی دلخواه به‌دست آورد

$$D^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \Psi(x).$$

[۶] Bernhard Riemman

به علت ابهام در حد پایین انتگرال c ، ریمان به تعریفش تابع متمم Ψ رااضافه کرد. امروزه تعریف مشتق کسری ریمان را بدون تابع Ψ به کار می‌برند.
در سال (۱۸۶۷-۱۸۶۸) گرانوالد [۷] و لتنیکف [۸] برای تعریف مشتق کسری از تفاضل متناهی استفاده کردند و وقتی ویژگی‌های مشتق کسری تفسیر شد، اثبات شد که این تعریف با تعریف مشتق کسری ریمان- لیوویل همارز است.
در سال ۱۹۶۷ کاپاتو [۹] یک نوع دیگری از مشتق کسری را مشابه با نوع ریمان- لیوویل تعریف کرد.
در بخش بعدی به تعریف انواع مشتق و انتگرال کسری می‌پردازیم.

۲.۲.۱ تعریف مشتق و انتگرال کسری

۱)مشتق و انتگرال کسری ریمان- لیوویل

فرض کنید $-\infty < a < b < +\infty$ و $[a,b]$ یک بازه‌ی کراندار روی محور اعداد حقیقی R باشد. انتگرال‌های کسری چپ و راست $I^{\alpha}_{a+}f$ و $I^{\alpha}_{b-}f$ از مرتبه‌ی $\alpha \in C$ که $Re(\alpha) > ۰$ (قسمت حقیقی α) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{۱-\alpha}}dt, \qquad x > a, \tag{۷.۱}$$

$$(I^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{۱-\alpha}}dt, \qquad x < b. \tag{۸.۱}$$

برای $\alpha = n \in N$ داریم

$$(I^{n}_{a+}f)(x) = \int_a^x dt_۱ \int_a^{t_۱} dt_۲ ... \int_a^{t_{n-۱}} f(t_n)dt_n = \frac{۱}{(n-۱)!}\int_a^x (x-t)^{n-۱}f(t)dt,$$

$$(I^{n}_{b-}f)(x) = \int_x^b dt_۱ \int_{t_۱}^b dt_۲ ... \int_{t_{n-۱}}^b f(t_n)dt_n = \frac{۱}{(n-۱)!}\int_x^b (t-x)^{n-۱}f(t)dt.$$

اکنون با توجه به تعاریف (۷.۱) و (۸.۱) به تعریف مشتق‌های کسری چپ و راست ریمان- لیوویل از مرتبه‌ی $\alpha \in C (Re(\alpha) \geqslant ۰)$ می‌پردازیم که به ترتیب با نمادهای $D^{\alpha}_{a+}f$ و $D^{\alpha}_{b-}f$ نمایش داده می‌شوند.

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) := (\frac{d}{dx})^n (I^{n-\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dx})^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+۱}}dt, x > a, \tag{۹.۱}$$

---
[۷] Grundwald
[۸] Letnikov
[۹] Caputo

$$(D_{b^-}^{\alpha}f)(x) := (\frac{-d}{dx})^n(I_{b^-}^{n-\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(-\frac{d}{dx})^n\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt, x<b, \quad (۱۰.۱)$$

که $n=[Re(\alpha)]+1$. $Re(\alpha)$ به معنی قسمت حقیقی α و $[Re(\alpha)]$ به معنی قسمت صحیح $Re(\alpha)$ است. وقتی $\alpha=n\in Z^+$ تعاریف بالا به صورت زیر خواهند شد

$$(D_{a^+}^{0}f)(x) = (D_{b^-}^{0}f)(x) = f(x), (D_{a^+}^{n}f)(x) = f^{(n)}(x), \quad (۱۱.۱)$$

$$(D_{b^-}^{n}f)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x)(n\in N). \quad (۱۲.۱)$$

۲)مشتق و انتگرال کسری لیوویل

مشتق و انتگرال کسری لیوویل در واقع همان مشتق و انتگرال کسری ریمان - لیوویل است که برای تمام اعداد حقیقی R تعریف می‌شود. یعنی برای تعریف مشتق و انتگرال کسری لیوویل در تعریف مشتق و انتگرال کسری ریمان - لیوویل قرار می‌دهیم $a=-\infty$ و $b=+\infty$. انتگرال کسری چپ و راست لیوویل از مرتبه‌ی $\alpha\in C$ $(Re(\alpha)>0)$ را به ترتیب با نماد $I_+^{\alpha}f$ و $I_-^{\alpha}f$ و مشتق کسری چپ و راست لیوویل را به ترتیب با نماد $D_+^{\alpha}f$ و $D_-^{\alpha}f$ نمایش می‌دهیم.

۳)مشتق کسری کاپاتو

فرض کنید $[a,b]$ یک بازه‌ی کراندار روی R باشد و

$$D_{a^+}^{\alpha}[f(t)](x) \equiv (D_{a^+}^{\alpha}f)(x)$$

$$D_{b^-}^{\alpha}[f(t)](x) \equiv (D_{b^-}^{\alpha}f)(x)$$

به ترتیب مشتق‌های کسری چپ و راست ریمان- لیوویل از مرتبه‌ی $\alpha\in C$ $(Re(\alpha)\geqslant 0)$ باشند. حال مشتق‌های کسری چپ و راست کاپاتو $({}^CD_{a^+}^{\alpha}f)(x)$ و $({}^CD_{b^-}^{\alpha}f)(x)$ از مرتبه‌ی $\alpha\in C$ $(Re(\alpha)\geq 0)$ را روی بازه‌ی $[a,b]$ به کمک مشتق‌های کسری چپ و راست ریمان - لیوویل به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$({}^CD_{a^+}^{\alpha}f)(x) = (D_{a^+}^{\alpha}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k])(x), \quad (۱۳.۱)$$

$$({}^CD_{b^-}^{\alpha}f)(x) = (D_{b^-}^{\alpha}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k])(x), \quad (۱۴.۱)$$

به طوری که برای $\alpha\notin Z^+$، $n=[Re(\alpha)]+1$ و برای $n=\alpha\in Z^+$ مشتق‌های کسری چپ و راست کاپاتو از مرتبه‌ی α را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$({}^{C}D_{a^+}^{\alpha}f)(x)=(D_{a^+}^{\alpha}f)(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-a}, \qquad (۱۵.۱)$$

$$({}^{C}D_{b^-}^{\alpha}f)(x)=(D_{b^-}^{\alpha}f)(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-a}, \qquad (۱۶.۱)$$

و برای $\alpha=n\in Z^{+}$ داریم

$$({}^{C}D_{a^+}^{0}f)(x)=({}^{C}D_{b^-}^{0}f)(x)=f(x),$$

$$({}^{C}D_{a^+}^{n}f)(x)=f^{(n)}(x), \qquad ({}^{C}D_{b^-}^{n}f)(x)=(-1)^{n}f^{(n)}(x)(n\in N). \qquad (۱۷.۱)$$

بنابراین طبق آنچه گفته شد، مشتق‌های کسری کاپاتو برای توابعی که مشتق‌های کسری چپ و راست ریمان - لیوویل دارند تعریف می‌شوند. در قضیه‌ی زیر مشتق‌های کاپاتو را برای توابع $f(x)\in AC^{n}[a,b]$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۱. اگر $Re(\alpha)\geqslant 0$ و $f(x)\in AC^{n}[a,b]$. آن‌گاه مشتق‌های کسری کاپاتوی $({}^{C}D_{a^+}^{\alpha}f)(x)$ و $({}^{C}D_{b^-}^{\alpha}f)(x)$ تقریباً همه‌جا روی بازه‌ی $[a,b]$ وجود دارند.
الف) اگر $\alpha\notin Z^{+}$ ، $({}^{c}D_{a^+}^{\alpha}f)(x)$ و $({}^{c}D_{b^-}^{\alpha}f)(x)$ به صورت زیرتعریف می‌شوند

$$({}^{c}D_{a^+}^{\alpha}f)(x):=(I_{a^+}^{n-\alpha}D^{n}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt, \qquad (۱۸.۱)$$

$$({}^{c}D_{b^-}^{\alpha}f)(x):=(-1)^{n}(I_{b^-}^{n-\alpha}D^{n}f)(x)=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{x}^{b}\frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt, \qquad (۱۹.۱)$$

که $n=[Re(\alpha)]+1$ و $D=\frac{d}{dx}$.

ب) اگر $\alpha=n\in Z^{+}$ آنگاه $({}^{c}D_{a^+}^{\alpha}f)(x)$ و $({}^{c}D_{b^-}^{\alpha}f)(x)$ طبق رابطه (۱۷.۱) تعریف می‌شوند.

۴)مشتق کسری گرانوالد-لتینکف

می‌دانیم مشتق معمولی تابع $f(x)$ از مرتبه n ام به شکل زیر است

$$f^{(n)}(x)=lim_{h\to 0}\frac{(\Delta_{h}^{n}f)(x)}{h^{n}}, \qquad (۲۰.۱)$$

که در آن $(\Delta_h^n f)(x)$ تفاضل متناهی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x با طول گام h می‌باشد و $(\Delta_h f)(x) = f(x) - f(x-h)$. اگر $\alpha > 0$ را جایگزین n و h^α را جایگزین h^n و تفاضل $(\Delta_h^\alpha f)(x)$ از مرتبه α که در زیر آمده است و به صورت یک سری نامتناهی است را جایگزین $(\Delta_h^n f)(x)$ کنیم، مشتق کسری گرانوالد-لتینکف با تعمیم رابطه‌ی (۲۰.۱) به دست می‌آید

$$(\Delta_h^n f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh), \quad x, h \in R, \quad \alpha > 0, \tag{۲۱.۱}$$

که در آن $\binom{\alpha}{k}$ ضرایب دو جمله‌ای هستند. اگر $\alpha \in C$ داریم

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)},$$

واگر $\alpha = n$ ، داریم

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & , n \geq k \\ 0 & , 0 \leq n < k \end{cases}.$$

اگر $h > 0$ تفاضل (۲۱.۱) را تفاضل سمت چپ و اگر $h < 0$ تفاضل سمت راست می‌نامیم. سری (۲۱.۱) یک سری به طور مطلق و یکنواخت همگراست. مشتق‌های کسری گرانوالد-لتینکف به شکل زیرند

$$f_+^\alpha(x) = lim_{h \to +0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}, \alpha > 0. \tag{۲۲.۱}$$

$$f_-^\alpha(x) = lim_{h \to +0} \frac{(\Delta_{-h}^\alpha f)(x)}{h^\alpha}, \alpha > 0. \tag{۲۳.۱}$$

حال فرض کنیم تابع $f(x)$ روی یک بازه متناهی $[a, b]$ تعریف شود، تفاضل (۲۱.۱) را می‌توان به این صورت نوشت

$$(\Delta_h^\alpha f)(x) = (\Delta_h^\alpha f^*)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f^*(x-kh), x, h \in R, \alpha > 0. \tag{۲۴.۱}$$

که

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [a, b] \\ 0 & , x[a, b]. \end{cases}$$

تفاضل کسری تعریف شده در (۲۴.۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$(\Delta_{h,a^+}^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{x-a}{h}]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh), \quad x \in R, h > 0, \alpha > 0. \tag{۲۵.۱}$$

$$(\Delta_{h,b^-}^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{b-x}{h}]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x+kh), \quad x \in R, h > 0, \alpha > 0. \tag{۲۶.۱}$$

در نتیجه مشتق کسری چپ و راست گرانوالد-لتینکف از مرتبه‌ی α به ترتیب برابرند با

$$f^{\alpha}_{a^+}(x) = lim_{h\to+\circ}\frac{(\Delta^{\alpha}_{h},_{a^+} f)(x)}{h^{\alpha}}, \quad \alpha > \circ, \tag{۲۷.۱}$$

$$f^{\alpha}_{b^-}(x) = lim_{h\to+\circ}\frac{(\Delta^{\alpha}_{h},_{b^-} f)(x)}{h^{\alpha}}, \quad \alpha > \circ, \tag{۲۸.۱}$$

نکته۱.۲.۱. فرض کنیم $n-۱<\alpha<n$ و $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ ، $n-۱$ بار مشتق پیوسته داشته باشد. همچنین $f^n(x)$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد آن‌گاه مشتقات ریمان-لیوول f از مرتبه‌ی α موجود و مطابق با مشتقات گرانوالد-لتینکف آن از مرتبه‌ی α هستند. اساس روش تفاضل متناهی ارائه تقریب‌های عددی برای مشتقات است. به کمک قضیه زیر یک تقریب مهم و کاربردی برای مشتقات لیوول و ریمان-لیوول ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنید $m-۱<\alpha<m$ و $f\in C^{n+[\alpha]+۲}(R)$ به طوری که همه مشتق‌های f تا مرتبه‌ی $n+[\alpha]+۲$ متعلق به $L^{۱}(R)$ و $C_{\circ}(R)$ باشند. برای هر عدد صحیح $p\geq\circ$ عملگر تفاضلی گرانوالد انتقال یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Delta^{\alpha}_{h,p}f(x) = \sum_{j=\circ}^{\infty}(-۱)^j\binom{\alpha}{j}f(x-(j-p)h). \tag{۲۹.۱}$$

در اینصورت ضرایب a_l مستقل از x,f,h وجود دارند به طوری که برای هر $x\in R,$

$$h^{-\alpha}\Delta^{\alpha}_{h,p}f(x) = (D^{\alpha}_{+}f)(x) + \sum_{l=۱}^{n-۱}(a_l(D^{\alpha+l}_{+}f)(x))h^l + O(h^n). \tag{۳۰.۱}$$

برهان. با توجه به فرض قضیه و بنابر نکته (۷.۱.۱) ثابت $c_۱$ وجود دارد که

$$\forall k\in R, \quad |\widehat{f}(k)| \leq c_۱(۱+|k|)^{-n-[\alpha]-۲}, \tag{۳۱.۱}$$

که $\widehat{f}(k)=\mathbf{F}(f)(k)$ نشان دهنده تبدیل فوریه f است و $\mathbf{F}((D^{\alpha}_{+}f)(x))(k)=(-ik)^{\alpha}\widehat{f}(k)$ تعمیم فرمول تبدیل فوریه برای مشتق از مرتبه صحیح است. به علاوه برای هر $a\in R$ رابطه‌ی $\mathbf{F}[f(x-a)](k)=e^{iak}\widehat{f}(k)$ را داریم و همچنین می‌دانیم

$$(۱+z)^{\alpha} = \sum_{j=\circ}^{\infty}\binom{\alpha}{j}z^j, \tag{۳۲.۱}$$

که سری فوق برای $|z|<۱$ مطلقا همگراست. از این‌رو $\Delta^{\alpha}_{h,p}f\in L^{۱}(R)$ و در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(h^{-\alpha}\Delta^{\alpha}_{h,p}f)(k) &= h^{-\alpha}e^{-ikph}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{j}e^{ijkh}\widehat{f}(k)\\ &= h^{-\alpha}e^{-ikph}(1-e^{ikh})^{\alpha}\widehat{f}(k) = (-ik)^{\alpha}\Big(\frac{1-e^{ikh}}{-ikh}\Big)^{\alpha}e^{-ikhp}\widehat{f}(k)\\ &= (-ik)^{\alpha}\omega_{\alpha,p}\widehat{f}(k), e\end{aligned} \tag{۳۳.۱}$$

که $\omega_{\alpha,p}(z) = \Big(\frac{1-e^{-z}}{z}\Big)^{\alpha}e^{pz}$. چون $\omega_{\alpha,p}(z)$ در همسایگی مبدا تحلیلی است پس $r>0$ وجود دارد به طوری که برای هر $|z|\le r$ سری توانی $\omega_{\alpha,p}(z)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lz^l$ همگراست. توجه کنید که $a_0=1, a_1=-\frac{\alpha}{2}+p$. اکنون نشان می‌دهیم ثابت c_2 وجود دارد به طوری که نامساوی زیر برای هر $x\in R$ برقرار است

$$\Big|\omega_{\alpha,p}(-ix)-\sum_{l=0}^{n-1}a_l(-ix)^l\Big| \le c_2|x|^n. \tag{۳۴.۱}$$

برای $|x|\le r$ داریم

$$\Big|\omega_{\alpha,p}(-ix)-\sum_{l=0}^{n-1}a_l(-ix)^l\Big| = \Big|\sum_{l=n}^{\infty}a_l(-ix)^l\Big| \le |x|^n\sum_{l=n}^{\infty}|a_l||x|^{l-n}\le c_3|x|^n,$$

که $c_3=r^{-n}\sum_{l=0}^{\infty}|a_l|r^l<\infty$. حال اگر $|x|>r$ ، نتایج زیر را داریم

$$\begin{aligned}|\omega_{\alpha,p}(-ix)| &= \Big|\Big(\frac{1-e^{ix}}{-ix}\Big)^{\alpha}e^{-ipx}\Big| = \frac{|1-e^{ix}|^{\alpha}|e^{-ipx}|}{|ix|^{\alpha}} = \frac{|1-e^{ix}|^{\alpha}}{|x^{\alpha}|}\\ &< \frac{2^{\alpha}}{|x^{\alpha}|} < \frac{2^{\alpha}}{r^{\alpha}} = \frac{2^{\alpha}r^n}{r^{\alpha+n}} \le c_4|x^n|,\end{aligned}$$

که $c_4=\frac{2^{\alpha}}{r^{\alpha+n}}<\infty$ و

$$\Big|\sum_{l=0}^{n-1}a_l(-ix)^l\Big| \le |x|^n\sum_{l=0}^{n-1}|a_l||x|^{l-n}\le c_5|x|^n,$$

که $c_5=\sum_{l=0}^{n-1}|a_l||r^{l-n}|<\infty$. حال قرار می‌دهیم $c_2=max\{c_3,c_4+c_5\}$. به راحتی مشاهده می‌کنیم (۳۴.۱) برقرار است و از (۳۳.۱) داریم

$$\mathbf{F}(h^{-\alpha}\Delta^{\alpha}_{h,p}f)(k) = (-ik)^{\alpha}\omega_{\alpha,p}(-ikh)\widehat{f}(k) = \sum_{l=0}^{n-1}a_l(-ik)^{\alpha+l}h^l\widehat{f}(k)+\widehat{\phi}(k,h), \tag{۳۵.۱}$$

که

$$\widehat{\phi}(k,h) = (-ik)^{\alpha}\Big(\omega_{\alpha,p}(-ikh)-\sum_{l=0}^{n-1}a_l(-ikh)^l\Big)\widehat{f}(k).$$