بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

عدد نظم ایده‌آل‌های یالی

استاد راهنما:
دکتر احد رحیمی

نگارش:
رویا لعلی

اسفند ۱۳۹۱

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

نام دانشجو:
رویا لعلی

تحت عنوان :

عدد نظم ایده‌آل‌های یالی

در تاریخ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر احد رحیمی با مرتبه‌ی علمی امضاء:

استاد داور داخل گروه دکتر فرزاد شاویسی با مرتبه‌ی علمی امضاء:

استاد داور خارج گروه دکتر سمیه مرادی با مرتبه‌ی علمی امضاء:

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احد رحیمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

رویا لعلی

اسفند ۱۳۹۱

تقدیم به پدر و مادر و خواهرمهربانم

چکیده

فرض کنید $R=\mathbb{K}[x_1,...,x_n]$ یک حلقه‌ی چندجمله‌ای روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{C}$ یک پادزنجیر و $I(\mathcal{C})$ ایده‌آل یالی متناظر با آن باشد. هدف ما در این پایان نامه مطالعه‌ی خواص جبری $\dfrac{R}{I(\mathcal{C})}$ و خواص ترکیبیاتی $\mathcal{C}$ می‌باشد. با ارائه‌ی معیاری مناسب، کرانی برای عدد نظم $\dfrac{R}{I(\mathcal{C})}$ می‌یابیم و با به‌کار بردن این معیار اثبات‌های جدیدی برای برخی فرمول‌های عدد نظم به‌دست می‌آوریم. به عنوان مثال اگر $\dfrac{R}{I(\mathcal{C})}$ کوهن-مکالی دنباله‌ای باشد، یک فرمول برای عدد نظم ایده‌آل پوشش راسی $\mathcal{C}$ و همچنین یک فرمول برای بعد تصویری $\dfrac{R}{I(\mathcal{C})}$ ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی:

ایده‌آل یالی ، عدد نظم ، کوهن-مکالی دنباله‌ای ، پادزنجیر

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

پیشگفتار

موضوع عدد نظم یکی از مفاهیم اساسی در جبر جابجایی و هندسه جبری تصویری است که اولین بار توسط دیوید مامفورد[۱] در سال ۱۹۶۶ تحت عنوان عدد نظم کاستلنیوو[۲] نامگذاری شد. دلیل این نامگذاری به نتایج کلاسیکی که کاستلنیوو در سال ۱۸۹۳ بر روی خم‌های تصویری به دست آورد، برمی‌گردد. مامفورد عدد نظم را برحسب کوهمولوژی بافه[۳] مطرح کرد و در سال ۱۹۸۲ اویشی[۴] تعریفی از عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد را بر حسب کوهمولوژی موضعی ارائه کرد و آیزنباد و گوتو در سال ۱۹۸۴ این ناوردا[۵] را بر حسب تحلیل‌های آزاد مینیمال بیان کردند.

با معرفی این ناوردا، مسئله یافتن کرانی برای عدد نظم به موضوع جذابی تبدیل گردید و افراد زیادی توانستند کران‌هایی برای این ناوردا پیدا کنند.

حال به معرفی پادزنجیر که یک مفهوم اساسی در این پایان نامه است، می‌پردازیم و پیرو آن اهداف هر فصل را بیان می‌کنیم.

پادزنجیر $\mathcal{C}$ عبارت است از یک مجموعه‌ی ناتهی و متناهی مانند X و یک خانواده از زیرمجموعه‌های X مانند E به‌قسمی که اگر $f_1, f_2 \in E$ باشند، آن‌گاه $f_1 \nsubseteq f_2$. مجموعه‌ی متناهی X را مجموعه‌ی راسی و E را مجموعه‌ی یالی پادزنجیر $\mathcal{C}$ می‌نامیم که آن‌ها را به‌ترتیب با $V(\mathcal{C})$ و $E(\mathcal{C})$ نمایش می‌دهیم. اگر $\mathcal{C}$ یک پادزنجیر و $X = \{x_1, .., x_n\}$ مجموعه‌ی راسی آن باشد، بدون کم شدن از کلیت مطلب می‌توان x_i را i-امین متغیر از حلقه‌ی چندجمله‌ای $R = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ در نظر گرفت. همچنین ایده‌آل یالی متناظر با پادزنجیر $\mathcal{C}$ را با $I(\mathcal{C})$ نمایش می دهیم که توسط همه‌ی x_eهایی به شکل $x_e = \prod_{x_i \in e} x_i$ ، $e \in E(\mathcal{C})$، تولید می‌شود. واضح است که $I(\mathcal{C})$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R است. لازم به ذکر است که همواره تناظر یک به یک میان پادزنجیرها و ایده‌آل‌های تک جمله‌ای خالی از مربع وجود دارد.

فصل اول این تحقیق شامل مطالبی از جبر جابه‌جایی و جبر ترکیبیاتی (شامل تعاریف گراف، مجتمع سادکی، پادزنجیر) است که در فصول بعد از آن‌ها استفاده می‌کنیم. در فصل دوم، در ابتدا مفهوم کوهن-مکالی دنباله‌ای را برای R-مدول دلخواه M تعریف و در قضیه‌ی ۲-۱-۳۷ ، برخی از انواع پادزنجیرهای کوهن-مکالی دنباله‌ای را معرفی می‌کنیم و در بخش بعدی این فصل به معرفی مجموعه‌های مستقل راسی و پوشش راسی پرداخته و مثال‌ها و تعریفی از انواع مختلف آن‌ها ارائه داده و در قضیه‌ی آخر این بخش یعنی قضیه‌ی ۲-۲-۱۸ ، برای B-گراف‌ها، کوچکترین مجموعه‌ی پوشش راسی را با بزگترین مجموعه‌ی مستقل راسی مقایسه می‌کنیم. در ادامه و در بخش سوم به معرفی دوگان الکساندر پادزنجیر $\mathcal{C}$ و ایده‌آل یالی متناظر با آن می‌پردازیم و قضیه‌ی۳-۱-۸ ، که در سراسر پایان‌نامه

---

[۱]Mamford [۲]Castelnuovo regularity [۳]Sheaf cohomology [۴]Ooishi [۵]Invariant

کاربرد دارد را بیان می‌کنیم. در بخش بعدی این فصل عدد نظم و بعد تصویری $\frac{R}{I_c(\mathcal{C})}$ و $\frac{R}{I(\mathcal{C})}$ را تخمین می‌زنیم، در فصل چهارم این تحقیق که در واقع مهم‌ترین فصل این پایان‌نامه است، عدد نظم و بعد تصویری ایده‌آل‌های یالی را به‌طور کامل بررسی و قضایای کلی در مورد آن را مطرح می‌کنیم. در فصل پنجم به معرفی دسته‌ای خاص از پادزنجیرها تحت عنوان تطابق‌ها پرداخته و روند فصل چهارم را در مورد آن تکرار می‌کنیم.

در واقع هدف اصلی ما در این پایان‌نامه پیدا کردن معیاری برای تخمین عدد نظم ایده‌آل‌های یالی است.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\mathrm{Ann}_R(M)$	پوچساز R- مدول M
$\deg(x)$	درجه‌ی عنصر همگن x
$E(\mathcal{C})$	مجوعه‌ی یالی پادزنجیر $\mathcal{C}$
$\mathrm{depth}_R(M)$	عمق M
$\dim R$	بعد حلقه R
$\dim_R(M)$	بعد کرول R- مدول M
$\mathrm{grade}_R(I, M)$	طول M- رشته منظم ماکسیمال در I
$\mathrm{ht}(-)$	ارتفاع
$im(G)$	تعدا یال‌ها در بزرگترین تطابق القا شده‌ی متناظر با گراف G
$I(\mathcal{C})$	ایده‌آل یالی متناظر با پادزنجیر $\mathcal{C}$
$I_c(\mathcal{C})$	ایده‌آل پوشش یالی متناظر با پادزنجیر $\mathcal{C}$
$\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$	ایده‌ال همگن ماکسیمال حلقه چندجمله‌ای S
$\mathrm{Mon}(R)$	مجموعه‌ی تمام تک‌جمله‌ای‌های R
$\mathrm{pd}_R(M)$	بعد پروژکتیو R- مدول M
$R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$	حلقه چندجمله‌ای روی میدان K
$\mathrm{reg}(M)$	عدد نظم R- مدول M
$\mathrm{Spec}(R)$	مجموعه ایده‌ال‌های اول حلقه R
$\mathrm{Supp}_R(M)$	تکیه‌گاه R- مدول M
$V(I)$	مجموعه ایده‌ال‌های اول شامل I
$Z_R(M)$	مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R- مدول M
$\alpha_0(\mathcal{C})$	مینیمم اندازه‌ی مجموعه‌ی پوشش راسی مینیمال متناظر با $\mathcal{C}$
$\alpha'_0(\mathcal{C})$	ماکسیمم اندازه‌ی مجموعه‌ی پوشش راسی مینیمال متناظر با $\mathcal{C}$
$\beta_0(\mathcal{C})$	ماکسیمم اندازه‌ی مجموعه‌ی مستقل راسی ماکسیمال متناظر با $\mathcal{C}$
$\beta'_0(\mathcal{C})$	مینیمم اندازه‌ی مجموعه‌ی مستقل راسی ماکسیمال متناظر با $\mathcal{C}$
$\beta'(G)$	اندازه‌ی کوچکترین مجموعه‌ی تطابق ماکسیمال متناظر با G

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل تعاریف و قضایایی را که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند، یادآور می‌شویم. فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم جبر پیشرفته آشنایی دارد. در سرتاسر این پایان نامه، منظور از حلقه‌ی R حلقه‌ی جابجایی و یکدار است.

۱-۱ مفاهیم و قضایایی از جبر جابجایی

تعریف ۱-۱-۱ (واریته[۱]). فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقه‌ی R باشد. $V(I)$ نشان دهنده‌ی واریته‌ی ایده‌آل I است و به صورت زیر تعریف می شود.

$$V(I)=\{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}(R):\quad I\subseteq \mathfrak{p}\}.$$

تعریف ۱-۱-۲ (تکیه‌گاه[۲]). فرض کنید M یک R- مدول باشد. نماد $\operatorname{Supp}(M)$ (برای تاکید روی حلقه $\operatorname{Supp}_R(M)$) نشان دهنده‌ی تکیه‌گاه M است و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\operatorname{Supp}(M)=\{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}(R):\quad M_{\mathfrak{p}}\neq ۰\}.$$

لم ۱-۱-۳. *فرض کنید M یک R- مدول باشد. آن‌گاه داریم*

۱. $\operatorname{Supp}(M)=\{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}(R):\ \exists x\in M,\ \operatorname{Ann}_R(x)\subseteq \mathfrak{p}\}$،

۲. $M\neq ۰$ *اگر و تنها اگر* $\operatorname{Supp}_R(M)\neq\emptyset$،

۳. *اگر R نوتری و M با تولید متناهی باشد، آن‌گاه* $\operatorname{Supp}(M)=V\big(\operatorname{Ann}_R(M)\big)$،

برهان. رجوع شود به لم ۲۰ از فصل ۹ در [۳۲] و تمرین ۱۹ از فصل ۳ در [۱]. □

تعریف ۱-۱-۴ (بعدحلقه [۳]). بعد حلقه‌ی R را با $\dim(R)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\dim(R)=\sup\{n:\ \mathfrak{p}_۰\subsetneq\mathfrak{p}_۱\subsetneq\ldots\subsetneq\mathfrak{p}_n\ ,\ \mathfrak{p}_i\in\operatorname{Spec}(R)\ ;\ i=۰,\ldots,n\}.$$

[۱] Variety

[۲] Support

[۳] Dimension

تعریف ۱-۱-۵. فرض کنید I یک ایده‌آل حلقه‌ی R باشد، بعد I که با $\dim(I)$ نمایش می‌دهیم را همان $\dim(R/I)$ تعریف می‌کنیم. یعنی

$$\dim(I) = \dim(R/I) = \sup\left\{n:\ \frac{\mathfrak{p}_0}{I} \subsetneq \frac{\mathfrak{p}_1}{I} \subsetneq .... \subsetneq \frac{\mathfrak{p}_n}{I},\ \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R);\ i=0,\dots,n\right\}$$
$$= \sup\left\{n:\ I \subseteq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq .... \subsetneq \mathfrak{p}_n\right\}.$$

تعریف ۱-۱-۶ (بعد کرول مدول[۱]). فرض کنید M یک R- مدول باشد، بعد کرول مدول M رابا $\dim_R M$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\dim_R(M) = \sup\left\{\dim(R/\mathfrak{p}):\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)\right\}.$$

با توجه به این تعریف و قسمت ۴ لم ۱.۱.۳ داریم $\dim(R/I) = \dim_R(R/I)$.

تعریف ۱-۱-۷. فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R باشد، در این صورت ارتفاع[۲] $\mathfrak{p}$ را با $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \sup\left\{n \in \mathbb{N}_0:\ \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq .... \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p},\ \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R),\ i=0,\cdots,n\right\}.$$

و برای یک ایده‌آل دلخواه I از R تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{ht}(I) = \inf\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}):\ \mathfrak{p} \in V(I)\}.$$

نکته ۱-۱-۸. *برای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ داریم $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(\mathfrak{p}) \leqslant \dim(R)$ و در حالت خاص برای حلقه‌ی چندجمله‌ای $R = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ حالت تساوی برقرار است. یعنی داریم*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(\mathfrak{p}) = \dim(R).$$

همچنین برای ایده‌آل I از حلقه‌ی چندجمله‌ای R نیز داریم $\mathrm{ht}(I) + \dim(I) = \dim(R)$.

برهان. رجوع شود به تذکر ۱۸ و نتیجه ۳۲ از فصل ۱۴ در [۳۲] صفحه ی ۲۲۶ از فصل ۹ در [۹]. □

تعریف ۱-۱-۹. فرض کنید M یک R-مدول باشد. مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر R نسبت به M را با نماد $Z(M)$ (برای تاکید روی حلقه با $Z_R(M)$) نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Z(M) = \{x \in R:\ xm = 0 \quad \text{به‌ازای عنصر ناصفری مانند}\ m \in M\}.$$

---
[۱] Krull dimension of module

[۲] Height

تعریف ۱-۱-۱۰ (رشته ی منظم[1]). فرض کنید R حلقه‌ای نوتری، I ایده‌آلی از آن و M یک R-مدول متناهی مولد باشد. دنباله‌ی $x_1, \cdots, x_n$ از عناصر I یک M-رشته ی منظم در I نامیده می شود، هرگاه

۱. $M \neq (x_1, \ldots, x_n)M$،

۲. به ازای هر $i = 1, \ldots, n$ داشته باشیم $x_i \notin Z_R(\frac{M}{(x_1, \ldots, x_{i-1})M})$.

همچنین یک M-رشته منظم مانند $x_1, \ldots, x_n$ در I ماکسیمال نامیده می شود، هرگاه نتوان عنصری چون $x_{n+1} \in I$ پیدا کرد که $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$، یک M-رشته ی منظم باشد. به عبارت دیگر، M-رشته $x_1, \ldots, x_n$ ماکسیمال در I است، اگر و تنها اگر $I \subseteq Z_R(\frac{M}{(x_1, \ldots, x_n)M})$.

قضیه ۱-۱-۱۱ (نورسکات-ریس[2]). *فرض کنید R حلقه ای نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد ناصفر باشد و I ایده آلی از R باشد که $IM \neq M$، در این صورت طول هر دو M-رشته‌ی ماکسیمال در I، یکسان است.*

برهان. رجوع شود به قضیه ی ۵ در بخش ۲ از فصل۱ در مرجع [۴] .

□

تعریف ۱-۱-۱۲. با مفروضات قضیه فوق، طول یکسان M-رشته‌های ماکسیمال در I را درجه M نسبت به I می نامیم و آن را با نماد $\mathrm{grade}(I, M)$ نمایش می دهیم و طول R-رشته‌ی منظم ماکسیمال در I را با نماد $\mathrm{grade}_R(I)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۳ (عمق). فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی و نوتری، و M یک R-مدول متناهی مولد باشد. در این صورت $\mathrm{grade}(\mathfrak{m}, M)$ را عمق M نامیم و با نماد $\mathrm{depth}_R(M)$ نمایش می دهیم. بنابراین $\mathrm{depth}_R(M)$ برابر با طول همه‌ی M-رشته‌های ماکسیمال در $\mathfrak{m}$ است.

قضیه ۱-۱-۱۴. *فرض کنید R حلقه‌ای موضعی و نوتری و همچنین M، R- مدولی متناهی مولد و ناصفر باشد. در این‌صورت همواره $\mathrm{depth}\, M \leq \dim M$ است.*

برهان. رجوع شود به گزاره‌ی ۱۳-۲-۱ در مرجع [۳۲]. □

[1] Regular sequence

[2] Northcott ries

تعریف ۱-۱-۱۵ (مدول کوهن-مکالی[۱]). فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی و M، R-مدولی متناهی مولد باشد. گوییم R-مدول M کوهن-مکالی است، هرگاه $\operatorname{depth}_R(M) = \dim_R(M)$ باشد.

نکته ۱-۱-۱۶. *حلقه‌ی R را کوهن-مکالی گوییم، هرگاه به‌عنوان R-مدول کوهن-مکالی باشد.*

مثال ۱-۱-۱۷. حلقه‌ی چندجمله‌ای $R = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ که $\mathbb{K}$ یک میدان است، به‌عنوان R-مدول، کوهن-مکالی است.

تعریف ۱-۱-۱۸. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی از حلقه‌ها باشد. $\psi : A \times B \longrightarrow B$ را با ضابطه‌ی $\psi(a, b) = f(a)b$ تعریف می‌کنیم. بنابراین B دارای ساختار A-مدولی است. در این‌صورت B را یک A-جبر گوییم.

تعریف ۱-۱-۱۹. همریختی $f : A \longrightarrow B$ را متناهی و B را یک A-جبر متناهی نامیم اگر B به‌عنوان A-مدول، متناهی مولد باشد. یعنی همریختی $f : A[t_1, ..., t_n] \longrightarrow B$ از A-جبرها موجود باشد.درنتیجه B را یک A-جبر نامیم، هرگاه ایده‌آل I از حلقه‌ی چندجمله‌ای $A[t_1, ..., t_n]$ وجود داشته باشد که $B \simeq \dfrac{A[t_1, ..., t_n]}{I}$.
در این تعریف اگر $A = \mathbb{K}$ میدان باشد، در این‌صورت B را یک $\mathbb{K}$-جبر نامیم.

قضیه ۱-۱-۲۰. *اگر A و B دو جبر استاندارد روی میدان $\mathbb{K}$ باشند، آن‌گاه*

۱. $\operatorname{depth}(A \bigotimes B) = \operatorname{depth}(A) + \operatorname{depth}(B)$،

۲. $\dim(A \bigotimes B) = \dim(A) + \dim(B)$.

برهان. رجوع شود به قضیه ۲-۲-۱۲ درمرجع [۳۷] .

□

قضیه ۱-۱-۲۱. *فرض کنید M یک R-مدول و $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی موضعی R باشد. در این‌صورت اگر $f = f_1, ..., f_r$ یک R-دنباله‌ی مشمول در $\mathfrak{m}$ باشد، آن‌گاه داریم*

$$\operatorname{depth} \frac{M}{(f)M} = \operatorname{depth} M - r.$$

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی $A.۱۴.۱$ در مرجع [۲۲] . □

---

[۱] Cohen-Macaulay

تعریف ۱-۱-۲۲. فرض کنید R یک حلقه و $\mathfrak{q}$ ایده‌آلی از R باشد. $\mathfrak{q}$ را اولیه[۱] نامیم، هرگاه دارای خواص زیر باشد.

۱. $\mathfrak{q} \subsetneq R$،

۲. اگر $a,b \in R$ دو عنصر دلخواه باشند، به طوری که $a.b \in \mathfrak{q}$ و $a \notin \mathfrak{q}$ آن‌گاه $b \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ باشد.

اگر $\mathfrak{q}$ اولیه باشد، $\sqrt{\mathfrak{q}}$ کوچکترین ایده آل اول است که شامل $\mathfrak{q}$ است. قرار دهید $\sqrt{\mathfrak{q}}=\mathfrak{p}$، آن‌گاه اگر $\mathfrak{q}$ اولیه باشد، آن را $\mathfrak{p}$-اولیه می‌نامیم.

لم ۱-۱-۲۳. *فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آل حلقه‌ی R و $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n$ که $(n \geq 1)$ ایده‌آل‌های $\mathfrak{p}$-اولیه R باشند، در این صورت $\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ نیز $\mathfrak{p}$-اولیه است.*

برهان. رجوع شود به لم ۱۳ از فصل ۴ در [۳۲] . □

تعریف ۱-۱-۲۴. فرض کنید I ایده‌آل سره‌ی حلقه‌ی R باشد،$(I \subsetneq R)$، یک تجزیه‌ی اولیه[۲] از I عبارت است از نمایش این ایده‌آل به صورت $I=\mathfrak{q}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_n$ که ایده‌آل $\mathfrak{q}_i$ ، برای $i=1,\ldots,n$ به شکل $\mathfrak{p}_i$- اولیه است.

تعریف ۱-۱-۲۵. فرض کنید I ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌ی R باشد. تجزیه‌ی اولیه مینیمال I عبارت است از اشتراک تعداد متناهی از ایده‌آل‌های اولیه R که برابر I باشد،

$$I=\mathfrak{q}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_n \text{ که به‌ازای } i=1,\ldots,n \quad \sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{p}_i$$

(هرگاه چنین عبارتی را به‌کار بریم منظور این است که به‌ازای هر i ، $\mathfrak{q}_i$ ایده‌آل $\mathfrak{p}_i$-اولیه است)

۱. $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n$، ایده‌آل اول متمایز R باشند،

۲. به‌ازای هر $j=1,\ldots,n$ داشته باشیم $\mathfrak{q}_j \not\supseteq \bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\mathfrak{q}_i$.

مثال ۱-۱-۲۶. فرض کنید $R=\mathbb{K}[x,y]$ یک حلقه‌ی چندجمله‌ای و $I=(x^3,xy)$ ایده‌آلی از آن باشد. در این‌صورت ایده‌آل $(x)\cap(x^3,y)$ یک تجزیه‌ی اولیه‌ی مینیمال برای I است.

ملاحظه ۱-۱-۲۷. *فرض کنید I ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌ی R باشد و تجزیه‌ی*

$$I=\mathfrak{q}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_n \text{ که به‌ازای } i=1,\ldots,n \quad \sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{p}_i$$

تجزیه‌ی اولیه‌ی I باشد.در این صورت هر ایده‌آل تجزیه‌پذیر R در واقع تجزیه‌ی اولیه‌ی مینیمال دارد.

[۱] Primary

[۲] Primary decomposition