دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

تحلیلی بودن عملگر مارکف روی بعضی فضاهای تابعی روی یک گروه موضعاً فشرده

نگارش:

فاطمه شاه نباتی

استاد راهنما:

دکتر حبیب امیری

استاد مشاور:

دکتر سعید مقصودی

آذر ۱۳۹۰

فهرست مطالب

سپاس گزاری...

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر حبیب امیری که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کار ساز و سازنده بارور ساختند؛ تقدیر و تشکر نمایم.

(و یزکیهم و یعلمهم الکتاب و الحکمه).

معلا مقامت ز عرش برتر باد　　همیشه توسن اندیشه‌ات مظفر باد

به نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند　　صحیفه‌های سخن از تو علم پرور باد

همچنین از جناب دکتر فرض‌اله میرزاپور، دکتر هادی خطیب‌زاده و دکتر سعید مقصودی که زحمت مطالعهٔ این رساله را تقبل فرمودند و با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود این رساله شدند، کمال امتنان را دارم.

فاطمه شاه‌نباتی
۱۳۹۰

چکیده

فرض کنید G یک گروه به‌طور فشرده تولید شده و موضعاً فشرده باشد و T_μ عملگر پیچش با یک اندازهٔ احتمال μ روی G و T_K عملگر پیچش با یک چگالی احتمال K باشد. هدف اصلی این پایان‌نامه ارائهٔ شرایط کافی روی μ و K است برای این‌که عملگرهای T_μ و T_K روی $L^p(G)$ که $1 < p < \infty$، تحلیلی باشند.

رده‌بندی موضوعی: $60B15$، $22D05$، $60G50$.

واژه‌های کلیدی: *تحلیلی بودن، عملگر مارکف، گروه موضعاً فشرده.*

پیشگفتار

یک کلاس ویژه از عملگرها و C_0-نیم‌گروه‌ها را در آنالیز عملگرها و C_0-نیم‌گروه‌های تحلیلی تشکیل می‌دهند. هدف اصلی در این پایان‌نامه بررسی تحلیلی بودن نوع خاصی از عملگرها است، C_0-نیم‌گروه‌ها ابزاری برای رسیدن به این هدف می‌باشد.

در فصل اول مقدمات مورد نیاز را یادآوری می‌کنیم.

در فصل دوم ابتدا تحلیلی بودن یک عملگر را از طریق درون‌یابی استاین روی فضاهای L^p بررسی می‌کنیم، سپس به برهان و بحثی در مورد تحلیلی بودن عملگر مارکف T_K که با چگالی K مرتبط است، روی گروه موضعاً فشرده و به‌طورفشرده تولید شدهٔ G می‌پردازیم، برای این منظور ابتدا روی گروه‌های لی بحث خواهیم کرد و سپس مباحث را روی گروه‌های موضاً فشرده و به‌طور فشرده تولید شده توسعه خواهیم داد.

در فصل سوم قصد داریم روی یک اندازهٔ احتمال شرایطی را اعمال کنیم که تحت آن‌ها عملگر مارکف T_μ که به‌صورت پیچش با یک اندازهٔ احتمال است روی گروه موضعاً فشرده و به‌طور فشرده تولید شدهٔ G تحلیلی شود. در پایان فصل بحث کوتاهی در زمینهٔ تحلیلی بودن عملگر مارکف T_μ روی گروه‌های میانگین‌پذیر خواهیم داشت.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

هدف این فصل ارائه تعاریف و قضیه‌های مورد نیاز برای فصل‌های بعد است.

۱.۱ نظریهٔ مقدماتی فضای باناخ، فضای هیلبرت و جبر باناخ

تعریف ۱.۱. هر فضای خطی نرم‌دار مانند X را که نسبت به متر القایی به وسیلهٔ نرم، فضایی کامل باشد یک فضای باناخ می‌نامیم. به عبارت دیگر X یک فضای باناخ است هرگاه به‌ازای هر دنبالهٔ کوشی مانند $\{x_n\}$ در X، عنصری مانند $x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\lim \|x_n - x\| = ۰$.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای خطی نرم‌دار و $\Lambda : X \longrightarrow Y$ خطی باشد. تبدیل خطی Λ را کران‌دار می‌گویند در صورتی که

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|x\| \leq ۱} \|\Lambda(x)\| < \infty$$

تعریف ۳.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با $\mathcal{L}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و برای هر $T \in \mathcal{L}(X,Y)$، نرم T را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = \sup \Big\{ \|T(x)\| : x \in B_X \Big\}$$

که در این‌جا B_X گوی یکه فضای نرم‌دار X است.

هرگاه X یک فضای باناخ باشد، فضای تمام عملگرهای خطی کران‌دار روی X را با $\mathcal{L}(X)$ نمایش می‌دهیم که با نرم بالا یک فضای باناخ است.

$\mathcal{L}(X)$ با توپولوژی عملگری قوی را با $\mathcal{L}_s(X)$ نشان می‌دهیم. تور $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \mathcal{L}(X)$ همگرا به $T \in \mathcal{L}(X)$ با توپولوژی عملگری قوی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in X$، $\|T_\alpha x - Tx\| \to ۰$.

تعریف ۴.۱. عملگر کران‌دار $\Lambda : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای نرم‌دار X و Y انقباض نامیده می‌شود اگر $\|\Lambda\| \leq ۱$.

تعریف ۵.۱. طیف $\sigma(T)$ عملگر $T \in \mathcal{L}(X)$ مجموعهٔ تمام اسکالرهای λ است به‌طوری‌که $T - \lambda I$ معکوس‌پذیر نیست.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم H یک فضای برداری مختلط باشد و فرض کنیم به هر زوج مانند (x, y) از $H \times H$ عنصری از $\mathbb{C}$ مانند $\langle x, y\rangle$ منسوب شده باشد به‌طوری‌که:

۱) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.

۲) اگر $x_۱, x_۲, y \in H$ ، $\langle x_۱ + x_۲, y\rangle = \langle x_۱, y\rangle + \langle x_۲, y\rangle$.

۳) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ که $x, y \in H$ و α یک عدد مختلط است.

۴) $\langle x, x\rangle \geq ۰$ که $x \in H$.

۵) $\langle x, x\rangle = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$.

آن‌گاه H را یک فضای ضرب داخلی می‌گویند.

قضیه ۷.۱. *فرض کنیم H یک فضای ضرب داخلی باشد و تعریف کنیم $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{\frac{۱}{۲}}$، آن‌گاه به‌ازای هر $x, y \in H$ داریم*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\| \quad (\text{نامساوی شوارتز}) \quad , \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{نامساوی مثلثی})$$

فضای ضرب داخلی که تحت نرم $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{\frac{۱}{۲}}$ یک فضای باناخ باشد، فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

مثال ۸.۱. اگر μ یک اندازهٔ مثبت باشد، آن‌گاه $L^۲(\mu)$با ضرب داخلی $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\, \mathrm{d}\mu$یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۹.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد، هرگاه $T \in \mathcal{L}(H)$، آن‌گاه $\langle Tx, y\rangle$ نسبت به x خطی، نسبت به y خطی مزدوج و کران‌دار است. لذا بنابر قضیهٔ ۸.۱۲ از [۲۵]، $T^* \in \mathcal{L}(H)$ی منحصر به فرد وجود دارد که

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad (x \in H, y \in H)$$

و نیز
$$\|T^*\| = \|T\|$$

T^* را الحاقی عملگر T می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱. گوییم عملگر $T \in \mathcal{L}(H)$ خودالحاق (یا هرمیتی) است اگر $T^* = T$.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنیم $T \in \mathcal{L}(H)$. اگر به‌ازای هر $x \in H$، $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ آن‌گاه T را یک عملگر مثبت نامیده و می‌نویسیم $T \geq 0$.

قضیه ۱۲.۱. *فرض کنیم* $T \in \mathcal{L}(H)$*. در این‌صورت به‌ازای هر* $x \in H$، $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ *اگر و فقط اگر* $T = T^*$ *و* $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

برهان. به قضیهٔ ۳۲.۱۲ از [۲۵] رجوع کنید. □

تعریف ۱۳.۱. هر جبر مختلط یک فضای برداری مانند $\mathcal{A}$ روی میدان مختلط است که در آن یک ضرب شرکت‌پذیر و پخش‌پذیر تعریف شده است؛ یعنی به‌ازای هر x و y و z در $\mathcal{A}$،

$$x(y+z) = xy + xz\ ,\ (x+y)z = xz + yz\ ,\ x(yz) = (xy)z \tag{۱}$$

و با ضرب اسکالر چنان مربوط شده است که به‌ازای $y, x \in \mathcal{A}$ و αی اسکالر،

$$\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y. \tag{۲}$$

هرگاه یک نرم در $\mathcal{A}$ موجود باشد که $\mathcal{A}$ را به یک فضای خطی نرم‌دار بدل کرده و در نامساوی ضربی

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|\ \ (x, y \in \mathcal{A}) \tag{۳}$$

صدق کند، آن‌گاه $\mathcal{A}$ یک جبر مختلط نرم‌دار می‌باشد. هرگاه علاوه بر این، $\mathcal{A}$ یک فضای متری کامل نسبت به این نرم باشد، یعنی $\mathcal{A}$ یک فضای باناخ باشد، آن‌گاه $\mathcal{A}$ را یک جبر باناخ می‌نامیم. توجه کنید که تعویض‌پذیری $\mathcal{A}$ (یعنی به‌ازای هر x و y در $\mathcal{A}$، $xy = yx$) شرط نشده است، و ما نیز شرط نمی‌کنیم مگر وقتی صریحاً آن را بپذیریم.

جبر $\mathcal{A}$ را یکدار خوانیم هرگاه عنصری مانند e باشد به‌طوری‌که

$$xe = ex = x\ \ (x \in \mathcal{A})$$

به آسانی معلوم می‌شود که، بنابر (۳)، حداکثر یک چنین e وجود دارد ($e' = e'e = e$) و $\|e\| \geq 1$. ما فرض اضافی $\|e\| = 1$ را نیز می‌پذیریم.

عنصر $x \in \mathcal{A}$ را معکوس‌پذیر نامیم اگر x در $\mathcal{A}$ دارای معکوس باشد؛ یعنی عنصری مانند $x^{-1} \in \mathcal{A}$ موجود باشد به‌طوری‌که $x^{-1}x = xx^{-1} = e$. به آسانی معلوم می‌شود که هیچ $x \in \mathcal{A}$ی بیش از یک معکوس ندارد.

اگر x و y در $\mathcal{A}$ معکوس‌پذیر باشند، x^{-1} و xy نیز چنین‌اند زیرا $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. لذا عناصر معکوس‌پذیر یک گروه نسبت به ضرب تشکیل می‌دهند.

تعریف ۱.۱۴. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر روی $\mathbb{C}$باشد. منظور از یک برگشت روی $\mathcal{A}$ عبارت است از یک نگاشت از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ که با $a \longmapsto a^*$ نمایش داده می‌شود به‌طوری‌که برای هر $a, b, c \in \mathcal{A}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داریم

$$(a+b)^* = a^* + b^*\,,\ (ab)^* = b^*a^*\,,\ (\lambda a)^* = \overline{\lambda}a^*\,,\ (a^*)^* = a.$$

تعریف ۱.۱۵. فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ و دو جبر باناخ باشند. یک همریختی جبری از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ نگاشت خطی و کران‌دار $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ است به‌طوری‌که برای هر $x, y \in \mathcal{A}$، $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$.

تعریف ۱.۱۶. طیف عنصر $x \in \mathcal{A}$ مجموعهٔ تمام اعداد مختلط λ است که $x - \lambda e$ معکوس‌پذیر نیست. ما طیف x را با $\sigma(x)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۱۷. *$\sigma(x)$ برای هر $x \in \mathcal{A}$ ناتهی است.*

برهان. به گزارهٔ ۱.۶ از [۱۶] رجوع کنید. □

تعریف ۱.۱۸. به‌ازای هر $x \in \mathcal{A}$، شعاع طیفی $\rho(x)$ از x به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(x) = \sup\{\,|\lambda|\ :\ \lambda \in \sigma(x)\}\,.$$

قضیه ۱.۱۹. *(فرمول شعاع طیفی) به‌ازای هر $x \in \mathcal{A}$،*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \rho(x).$$

(وجود حد بخشی از نتیجه می‌باشد.)

برهان. به قضیهٔ ۹.۱۸ از [۲۶] رجوع کنید. □

۱.۲ نظریهٔ مقدماتی گروه توپولوژیک، اندازهٔ هار و پیچش‌ها

گروه توپولوژیک

تعریف ۱.۲۰. یک گروه توپولوژیک گروهی است مانند G که توپولوژی تعریف شده در آن اعمال گروه را پیوسته می‌سازد؛ یعنی $xy \longrightarrow (x,y)$ از $G \times G$ به G و $x^{-1} \longrightarrow x$ از G به G پیوسته‌اند. پیوسته

بودن ضرب به این مفهوم است که، برای هر همسایگی W حول xy، همسایگی U حول x و V حول y وجود دارند که

$$UV \subseteq W.$$

به همین نحو، فرض پیوسته بودن نگاشت وارون یعنی برای هر همسایگی U حول x^{-1} همسایگی V حول x موجود است که،

$$V^{-1} \subseteq U.$$

اگر G یک گروه توپولوژیک باشد، عنصر همانی G را با e نشان خواهیم داد. اگر $A \subset G$ و $x \in G$، تعریف می‌کنیم

$$Ax = \{yx : y \in A\}\ ,\ xA = \{xy : y \in A\}\ ,\ A^{-1} = \left\{y^{-1} : y \in A\right\}$$

و اگر $B \subset G$، تعریف می‌کنیم

$$AB = \{xy : x \in A, y \in B\}\,.$$

گروه توپولوژیک G را گسسته خوانیم هرگاه توپولوژی آن توپولوژی گسسته باشد، یعنی هر زیر مجموعهٔ آن باز باشد.

تعریف ۲۱.۱. گروه توپولوژیک G را فشرده گوییم هرگاه به‌عنوان یک فضای توپولوژیکی فشرده باشد.

تعریف ۲۲.۱. گروه توپولوژیک G را موضعاً فشرده گوییم هرگاه هاسدورف بوده و هر نقطهٔ آن دارای یک همسایگی با بستار فشرده باشد.

تعریف ۲۳.۱. گروه توپولوژیک G به‌طور فشرده تولید شده نامیده می‌شود اگر شامل یک زیر مجموعهٔ فشرده چون F باشد که زیرگروه تولید شده توسط F همان G شود؛ یعنی،

$$G = \{e\} \bigcup \left(\cup_{n=1}^{\infty} \left(F \cup F^{-1}\right)^n\right).$$

تعریف ۲۴.۱. زیرفضای یا زیرمجموعهٔ فشردهٔ نسبی Y از یک فضای توپولوژیک X زیرمجموعه‌ای است که بستارش فشرده باشد.

گزاره ۲۵.۱. *فرض کنید H یک زیرگروه از گروه توپولوژیک G باشد. در این‌صورت:*

۱) *اگر H بسته باشد، G/H هاسدورف است.*

۲) *اگر G موضعاً فشرده باشد، G/H نیز موضعاً فشرده است.*

۳) *اگر H نرمال باشد، G/H گروه توپولوژیک است.*

برهان. به گزارهٔ ۲.۲ از [۱۶] رجوع کنید. $\square$

گزاره ۲۶.۱. *اگر H یک زیر نیم‌گروه، زیر گروه یا زیرگروه نرمال از گروه توپولوژیک G، باشد آن‌گاه $\overline{H}$ نیز به ترتیب یک زیر نیم‌گروه، زیر گروه یا زیر گروه نرمال از G است.*

برهان. به گزارهٔ ۵.۳ از [۱۹] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۲۷.۱. *فرض کنیم G گروه موضعاً فشرده باشد. فرض کنیم $[G,G]$ گروه تولید شده توسط تمام عناصر به فرم $aba^{-1}b^{-1}$ باشد که $a,b \in G$؛ $[G,G]$ زیرگروه نرمال G است. ($[G,G]$ زیرگروه جابه‌جاگر G نامیده می‌شود.)*

برهان. اگر $x \in G$ و $x_0 \in [G,G]$، آن‌گاه

$$xx_0x^{-1} = \left(xx_0x^{-1}x_0^{-1}\right)x_0 \in [G,G]\,[G,G] = [G,G]$$

بنابراین $[G,G]$ یک زیرگروه نرمال از G است. با استفاده از گزارهٔ ۲۶.۱، $G_0 = \overline{[G,G]}$ نیز زیرگروه نرمال بسته از G است. $\square$

قضیه ۲۸.۱. *گروه خارج قسمتی G/Q وقتی Q زیرگروه جابه‌جاگر G است آبلی است. به‌علاوه، Q کوچک‌ترین زیرگروه نرمال G با این خاصیت است یعنی اگر G/N آبلی باشد آن‌گاه $Q \subset N$.*

برهان. به صفحهٔ ۱۴ از [۲۴] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۲۹.۱. یک فضای توپولوژیک X همبند است اگر و تنها اگر به‌صورت اجتماع مجزا از دو مجموعهٔ ناتهی که هردو هم باز و هم بسته‌اند نباشد. یک فضای توپولوژیک X موضعاً همبند است اگر زیرمجموعه‌های همبند تشکیل یک پایهٔ باز برای توپولوژی X را دهند. یک مؤلفه از یک فضای توپولوژیک یک زیرمجموعهٔ همبند است که کاملاً در هیچ زیرمجموعهٔ همبند دیگری نباشد. یک فضای توپولوژیک کلاً ناهمبند است اگر تمام مؤلفه‌های آن نقاط باشند.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد، فرض کنیم θ یک همریختی پیوسته از $\mathbb{R}$ به G باشد. آن‌گاه $\theta(\mathbb{R})$ یک زیرگروه یک پارامتری از G نامیده می‌شود.

قضیه ۳۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک و H یک زیرگروه از G باشد. آن‌گاه G/H فضای گسسته است اگر و تنها اگر H در G باز باشد.*

برهان. به قضیهٔ ۵.۲۱ از [۱۹] رجوع کنید. □

قضیه ۳۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد و فرض کنیم C مؤلفهٔ همبندی شامل همانی e باشد. آن‌گاه C زیرگروه نرمال بسته از G است.*

برهان. به قضیهٔ ۷.۱ از [۱۹] رجوع کنید. □

قضیه ۳۳.۱. *فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک و C مؤلفه همبندی شامل همانی در G باشد. آن‌گاه G/C گروه هاسدورف کلاً ناهمبند است.*

برهان. به قضیهٔ ۷.۳ از [۱۹] رجوع کنید. □

تعریف ۳۴.۱. فضای توپولوژیک X را یک T_0-فضا می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر دو نقطهٔ مجزای $x, y \in X$ مجموعهٔ بازی موجود باشد که شامل یکی باشد ولی شامل دیگری نباشد.

قضیه ۳۵.۱. *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده و C مؤلفهٔ همبندی همانی e در G باشد. فرض کنیم f یک همریختی باز پیوسته از G روی T_0 گروه $\tilde{G}$ باشد و فرض کنیم $\tilde{C}$ مؤلفهٔ همبندی همانی $\tilde{e}$ در $\tilde{G}$ باشد. آن‌گاه $\tilde{C} = \overline{f(C)}$.*

برهان. به قضیهٔ ۷.۱۲ از [۱۹] رجوع کنید. □

قضیه ۳۶.۱. *هر گروه آبلی موضعاً فشرده و به‌طور فشرده تولید شدهٔ G به‌طور توپولوژیک یکریخت با $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times F$ برای اعداد صحیح نامنفی a, b و گروه آبلی فشرده F است.*

برهان. به قضیهٔ ۹.۸ از [۱۹] رجوع کنید. □

در این پژوهش به جز مواردی که ذکر شود بعضی مفاهیم را ثابت خواهیم گرفت، به عنوان مثال π, G_1, G_0, π_0 و ρ که در ادامه تعریف می‌شوند ازجمله مواردی هستند که ثابت گرفته می‌شوند و به‌ویژه در فصل ۳ به آن‌ها رجوع خواهیم کرد.

فرض کنیم G، یک گروه موضعاً فشرده و به‌طور فشرده تولید شده باشد. چون G به‌طور فشرده تولید شده است، همسایگی باز و فشردهٔ نسبی U از همانی $e \in G$ که متقارن است ($U = U^{-1}$) و G را تولید می‌کند ثابت می‌گیریم. آن‌گاه $\rho = \rho_U : G \longrightarrow \mathbb{N}$ به‌وسیلهٔ

$$\rho(g) = \inf\{n \in \mathbb{N} : g \in U^n\}, \ \ g \in G,$$

تعریف می‌شود که $U^n = \{g_1 \cdots g_n : g_1, \ldots, g_n \in U\}$. فرض کنیم $\pi_0 : G \longrightarrow G/G_0$ همریختی کانونی باشد که $G_0 = \overline{[G,G]}$ بستار زیرگروه جابه‌جاگر $[G,G]$ در G است. بنابر قضیهٔ ۲۷.۱، G_0 زیر گروه نرمال از G است. حال بنابر گزارهٔ ۲۵.۱، G/G_0 گروه توپولوژیک موضعاً فشرده است.

G/G_0 آبلی است زیرا فرض کنیم $aG_0, bG_0 \in G/G_0$ داریم:

$$aG_0 bG_0 = abG_0 = ba\underbrace{\left(a^{-1}b^{-1}ab\right)}_{\in G_0}G_0 = baG_0 = bG_0 aG_0$$

G/G_0 به‌طور فشرده تولید شده است، زیرا G به‌طور فشرده تولید شده است پس $A \subseteq G$، فشرده موجود است به‌طوری‌که G را تولید می‌کند. از طرفی $AG_0 = \{xG_0 : x \in A\}$ فشرده است زیرا π_0 پیوسته است و $\pi_0(A) = AG_0$. به‌وضوح AG_0، G/G_0 را تولید می‌کند پس G/G_0 به‌طور فشرده تولید شده است لذا بنابه قضیهٔ ۳۶.۱، به‌ازای $q_1, q_2 \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ و گروه آبلی فشرده M با $\mathbb{Z}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2} \times M$ یکریخت است.

زیرگروه G_1 از G را به‌این‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$G_1 = \pi_0^{-1}\left(\{0\} \times M\right).$$

G_1 زیر گروه بستهٔ G است، زیرا M فشرده است درنتیجه $\{0\} \times M$ فشرده است لذا بسته است و چون π_0 پیوسته است پس $\pi_0^{-1}\left(\{0\} \times M\right)$ بسته است.

$\pi : G \longrightarrow G/G_1 \cong \mathbb{Z}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2}$ را همریختی استاندارد با مؤلفه‌های $\pi^{(i)} : G \longrightarrow \mathbb{R}$ که $i \in \{1, \ldots, q_1 + q_2\}$ در نظر می‌گیریم. اگر $p : \mathbb{Z}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2} \times M \to \mathbb{Z}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2}$ نگاشت تصویر باشد آن‌گاه چون $\ker p \circ \pi_0 = \pi_0^{-1}(\{0\} \times M)$ لذا از قضیهٔ اول یکریختی $G/G_1 \cong \mathbb{Z}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2}$. از طرفی هستهٔ هر همریختی زیرگروه نرمال می‌باشد پس G_1 زیرگروه نرمال از G است.

اندازهٔ هار

تعریف ۳۷.۱. الف) گردایهٔ $\mathfrak{M}$ از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ X را یك σ-جبر در X گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد.

۱) $X \in \mathfrak{M}$؛

۲) هرگاه $A \in \mathfrak{M}$، آن‌گاه $A^c \in \mathfrak{M}$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است؛

۳) هرگاه $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به‌ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $A_n \in \mathfrak{M}$، آن‌گاه $A \in \mathfrak{M}$.

در این‌صورت $(X, \mathfrak{M})$ (یا به اختصار X) را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر

در X می‌نامیم.

ب) هرگاه X یك فضای اندازه‌پذیر و Y یک فضای توپولوژیک باشد، نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را اندازه‌پذیر گوییم، هرگاه برای هر مجموعهٔ باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد.

هرگاه E یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد، تابع با تعریف

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

تابعی اندازه‌پذیر است، تابع χ_E را تابع مشخصهٔ مجموعهٔ E می‌نامیم

پ) یك اندازهٔ مثبت، تابعی نامنفی مانند μ است که روی σ-جبری مانند $\mathfrak{M}$ تعریف شده است به‌طوری‌که $\mu(\emptyset) = 0$ و μ شمارا جمعی است، یعنی برای هر دنبالهٔ (A_i) از عناصر دوبه‌دو مجزای $\mathfrak{M}$ داریم

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

اگر μ یک اندازه روی $(X, \mathfrak{M})$ باشد آن‌گاه $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه نامیده می‌شود.

اگر $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ که $A_i \in \mathfrak{M}$ و برای هر i، $\mu(A_i) < \infty$ مجموعهٔ A σ-متناهی نامیده می‌شود.

چنانچه به‌ازای هر $A \in \mathfrak{M}$ که $\mu(A) = \infty$ مجموعه‌ای چون $B \in \mathfrak{M}$ موجود باشد که $B \subset A$ و $\infty > \mu(B) > 0$، μ نیمه متناهی نامیده می‌شود.

ت) هرگاه $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد، مجموعه‌ای چون $E \in \mathfrak{M}$ به‌طوری‌که $\mu(E) = 0$ یک مجموعهٔ پوچ نامیده می‌شود.

مجموعه‌ای چون $E \in \mathfrak{M}$ موضعاً پوچ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $F \in \mathfrak{M}$ با شرط $\mu(F) < \infty$، $\mu(E \cap F) = 0$. چنانچه گزاره‌ای در مورد نقاط $x \in X$ به‌جز xهای واقع در یک مجموعهٔ پوچ درست باشد می‌گوییم که این گزاره تقریباً همه جا (به‌طور خلاصه ت.ه) درست است یا به‌ازای تقریباً هر x درست است. (اگر دقت بیشتری لازم باشد خواهیم گفت که مجموعه μ-پوچ یا μ-تقریباً همه جا پوچ است.)

فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک σ-جبر در مجموعهٔ X باشد. گردایهٔ شمارش‌پذیر $\{E_i\}$ از اعضای $\mathfrak{M}$ را یک افراز E گوییم اگر هروقت $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ و $E = \cup E_i$. در این‌صورت اندازهٔ مختلط μ بر $\mathfrak{M}$ یک تابع مختلط بر $\mathfrak{M}$ است که به‌ازای هر افراز $\{E_i\}$ از E،

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \ \ (E \in \mathfrak{M}) \qquad (1)$$

ملاحظه کنید که در اینجا همگرایی سری (۱) (بر خلاف اندازه‌های مثبت که سری ممکن است همگرا یا واگرا به ∞ باشد) بخشی از ملزومات است. چون اجتماع مجموعه‌های E_i در صورت جابه‌جایی زیر

نویس‌ها تغییر نمی‌کند، هر آرایش مجدد سری (۱) نیز باید همگرا باشد. لذا سری عملاً به‌طور مطلق همگراست.

تعریف ۳۸.۱. تابع مجموعه‌ای $|\mu|$ را بر $\mathfrak{M}$ با
$$|\mu|\,(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \; (E \in \mathfrak{M})$$
تعریف می‌کنیم، سوپرمم روی تمام افرازهای $\{E_i\}$ از E گرفته شده است. تابع مجموعه‌ای $|\mu|$ را تغییر کل μ یا گاهی، برای پرهیز از ابهام، اندازهٔ تغییر کل می‌نامند.

تعریف ۳۹.۱. اندازهٔ دیراك (یا اندازهٔ جرم نقطه‌ای) δ_x روی X، برای هر زیرمجموعهٔ بورل E از X به‌صورت زیر تعریف می‌شود
$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

تعریف ۴۰.۱. اندازهٔ شمارای جمعی μ روی σ-جبر زیر مجموعه‌های فضای X اندازهٔ احتمال نامیده می‌شود اگر $\mu \geq 0$ و $\mu(X) = 1$.

قضیه ۴۱.۱. *اگر $\mathscr{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، کوچک‌ترین σ-جبر در X مانند $\mathfrak{M}^*$ موجود است به‌طوری‌که $\mathscr{F} \subset \mathfrak{M}^*$.*

برهان. به قضیهٔ ۱۰.۱ از [۲۶] رجوع کنید. □

گاهی این $\mathfrak{M}^*$ را σ-جبر تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathscr{F}$ می‌نامند.

تعریف ۴۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. بنابر قضیهٔ ۴۱.۱، کوچک‌ترین σ-جبر مانند $\mathscr{B}$ در X هست به‌طوری‌که هر مجموعهٔ باز در X متعلق به $\mathscr{B}$ است. اعضای $\mathscr{B}$ را مجموعه‌های بورل X می‌نامند.

تعریف ۴۳.۱. اندازه μ تعریف شده بر σ-جبر تمام مجموعه‌های بورل در فضای هاسدورف موضعاً فشردهٔ X اندازهٔ بورل X نام دارد. مجموعهٔ بورل $E \subset X$ را منظم بیرونی گوییم هرگاه
$$\mu(E) = \inf \left\{ \mu(V) : \text{باز } V,\ E \subset V \right\}$$
به‌طور مشابه مجموعهٔ بورل $E \subset X$ را منظم درونی گوییم هرگاه
$$\mu(E) = \sup \left\{ \mu(K) : \text{فشرده } K,\ K \subset E \right\}$$

اگر هر مجموعهٔ بورل در X هم منظم بیرونی و هم منظم درونی باشد، در این صورت μ منظم نامیده می‌شود.

تعریف ۴۴.۱. اندازهٔ بورل μ را رادون می‌نامیم اگر روی مجموعه‌های فشرده متناهی، روی مجموعه‌های بورل منظم بیرونی و روی مجموعه‌های باز منظم درونی باشد.

تعریف ۴۵.۱. فرض کنیم μ اندازهٔ رادون روی فضای موضعاً فشردهٔ X باشد اگر $\mathcal{U}$ خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های باز μ-پوچ X باشد اجتماع این خانواده بزرگترین مجموعهٔ باز μ-پوچ است متمم مجموعهٔ فوق را محمل μ می‌نامیم و با $\operatorname{supp}(\mu)$ نشان می‌دهیم، بنابراین محمل μ کوچک‌ترین مجموعهٔ بسته است که متمم آن μ-پوچ است لذا همواره

$$\mu\left(X \setminus \operatorname{supp}(\mu)\right) = ۰.$$

تعریف ۴۶.۱. فرض کنیم X یك فضای توپولوژیك باشد.

الف) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط-مقدار روی X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. $C(X)$ همراه با اعمال نقطه‌ای توابع و ضرب اسکالر یك فضای برداری است. به‌علاوه، برای $f \in C(X)$ محمل f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq ۰\}}$$

مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط-مقدار روی X با محمل فشرده را با $C_c(X)$ یا $C_{۰۰}(X)$ نشان می‌دهیم که یك زیرفضای $C(X)$ است.

ب) گوییم تابع f در بی‌نهایت صفر می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از X موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X - K$ داشته باشیم $|f(x)| < \varepsilon$. مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط-مقدار f روی X که در بی‌نهایت صفر می‌شود را با $C_۰(X)$ نشان می‌دهیم، همچنین $C_{۰۰}(X)$ در $C_۰(X)$ چگال است.

قضیه ۴۷.۱. *(نمایش ریس). فرض کنیم X یك فضای موضعاً فشردهٔ هاسدورف و I یك تابعك خطی مثبت روی $C_c(X)$ باشد. در این‌صورت اندازهٔ یکتای بورل منظم مانند μ روی X وجود دارد به‌طوری‌که*

$$I(f) = \int_X f d\mu \qquad (f \in C_c(X)).$$

به‌علاوه داریم $\|I\| = \|\mu\|$.

برهان. به قضیهٔ ۱۴.۲ از [۲۶] رجوع کنید. □

تعریف ۴۸.۱. فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد اندازهٔ هار چپ (راست) روی G اندازهٔ رادون غیر صفر μ روی G است که در $\mu(xE) = \mu(E)$، $(\mu(Ex) = \mu(E))$ برای هر مجموعهٔ بورل $E \subset G$ و هر $x \in G$ صدق می‌کند.

قضیه ۴۹.۱. *فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده با اندازهٔ هار چپ μ باشد. آن‌گاه $\mu(G)$ متناهی است اگر و تنها اگر G فشرده باشد.*

برهان. به قضیهٔ ۱۵.۹ از [۱۹] رجوع کنید. □

تعریف ۵۰.۱. اگر G گروهی فشرده و λ اندازهٔ هار چپ بر G باشد از قضیهٔ قبل داریم $\lambda(G) < \infty$ حال می‌توانیم تعریف کنیم

$$\mu = \frac{\lambda}{\lambda(G)},$$

لذا داریم $\mu(G) = ۱$، که μ را اندازهٔ هار نرمال شده می‌گوییم. بنابراین اگر G فشرده باشد می‌توانیم اندازهٔ هار را نرمال در نظر بگیریم یعنی $\lambda(G) = ۱$.

قضیه ۵۱.۱. *اگر λ و μ اندازه‌های هار چپ روی G باشند، آن‌گاه $c \in (۰, \infty)$ هست به‌طوری‌که $\mu = c\lambda$.*

برهان. به قضیهٔ ۲.۲۰ از [۱۶] رجوع کنید. □

تعریف ۵۲.۱. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده با اندازهٔ هار چپ λ باشد اگر برای $x \in G$ تعریف کنیم $\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$، آن‌گاه با استفاده از قانون انجمنی: $y(Ex) = (yE)x$، λ_x دوباره یک اندازهٔ هار چپ است. بنابر قضیهٔ یکتایی ۵۱.۱، عدد $۰ < \Delta(x)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$، و $\Delta(x)$ مستقل از انتخاب اصلی λ است. تابع $\Delta : G \longrightarrow (۰, \infty)$ که بدین‌گونه تعریف شد تابع مدولار G نامیده می‌شود. G مدولار یکه نامیده می‌شود اگر $\Delta \equiv ۱$. به عنوان مثال گروه‌های آبلی و گروه‌های فشرده مدولار یکه می‌باشند. برای جزئیات بیشتر به بخش ۲.۴ از [۱۶] رجوع کنید.

به هر اندازهٔ هار چپ λ اندازهٔ هار راست μ مربوط می‌شود که توسط $\mu(E) = \lambda(E^{-۱})$ تعریف می‌شود.

گزاره ۵۳.۱. *λ و μ معادل‌اند و*

$$d\mu(x) = \Delta(x^{-۱})\, d\lambda(x).$$

برهان. به گزارهٔ ۲.۳۱ از [۱۶] رجوع کنید. □

تعریف ۵۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یك فضای اندازه باشد.

الف) عدد حقیقی M یك کران اساسی برای تابع مختلط-مقدار f روی مجموعهٔ X نامیده می‌شود، هرگاه برای تقریباً هر $x \in X$ داشته باشیم $|f(x)| \leq M$.

تابع f اساساً کراندار نامیده می‌شود اگر یك کران اساسی داشته باشد. سوپریموم اساسی f به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\operatorname{ess\,sup} f = \|f\|_\infty := \inf \left\{ M : \ |f(x)| \leq M \ , x \text{ برای تقریباً هر } \right\}$$

$L^\infty(X, \mu)$ یا $L^\infty(\mu)$ را فضای توابع اندازه‌پذیر f تعریف می‌کنیم که $\|f\|_\infty < \infty$.

دو تابع $f, g \in L^\infty(X, \mu)$ را یکسان می‌گیریم اگر $\|f - g\|_\infty = ۰$؛ یعنی f و g تقریباً همه‌جا برابر باشند و می‌نویسیم $f \equiv g$. در این‌صورت $L^\infty(X, \mu)$ همراه با اعمال نقطه‌ای توابع و نرم $\|.\|_\infty$ فضای باناخ است.

ب) برای $۱ \leq p < \infty$، خانوادهٔ تمام توابع مختلط-مقدار f روی X با شرط

$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{۱/p} < \infty$$

را با $L^p(X, \mu)$ یا $L^p(\mu)$ نشان می‌دهیم. $L^p(X, \mu)$ با اعمال نقطه‌ای توابع و نرم بالا فضای باناخ تشکیل می‌دهد.

قضیه ۵۵.۱. *فرض کنیم $۱ \leq p \leq \infty$، آن‌گاه $L^p(X)$ یک فضای باناخ است.* [۲۶]

پیچش‌ها

در این قسمت فرض می‌کنیم که هر گروه موضعاً فشردهٔ G مجهز به یک اندازهٔ هار چپ λ است. عموماً به‌جای $d\lambda(x)$، $\int f d\lambda$، $\lambda(E)$ و $L^p(\lambda)$ به‌ترتیب dx، $\int f$، $|E|$، L^p یا $L^p(G)$ می‌نویسیم. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده، و $M(G)$ فضای اندازه‌های رادون مختلط روی G باشد. پیچش دو اندازهٔ $\mu, \nu \in M(G)$ را به شرح زیر تعریف می‌کنیم، نگاشت $I(\phi) = \iint \phi(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$ بوضوح یک تابعک خطی روی $C_\circ(G)$ است که در $\|I(\phi)\| \leq \|\phi\|_{\sup}\|\mu\|\|\nu\|$ صدق می‌کند. طبق قضیهٔ نمایش ریس به آن یک اندازهٔ $\mu * \nu \in M(G)$ با $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\|\nu\|$ نسبت داده می‌شود که پیچش μ و ν نامیده می‌شود:

$$\int \phi\, d(\mu * \nu) = \iint \phi(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \qquad (۱)$$

پیچش شرکت‌پذیر است: اگر $\mu,\nu,\sigma\in M(G)$ و $\phi\in C_c(G)$،

$$\begin{aligned}\int \phi\, d[\mu*(\nu*\sigma)] &= \iint \phi(xy)\, d\mu(x)\, d(\nu*\sigma)(y)\\ &= \iiint \phi(xyz)\, d\mu(x)\, d\nu(y)\, d\sigma(z)\\ &= \iint \phi(yz)\, d(\mu*\nu)(y)\, d\sigma(z)\\ &= \int \phi\, d[(\mu*\nu)*\sigma].\end{aligned}$$

پیچش جابه‌جایی است اگر و تنها اگر G آبلی باشد. اگر G آبلی باشد داریم $\phi(xy)=\phi(yx)$، لذا از (۱) نتیجه می‌شود که $\mu*\nu=\nu*\mu$. به بیان دیگر اگر $\delta_x\in M(G)$ اندازهٔ جرم نقطه‌ای در $x\in G$ باشد داریم

$$\int \phi\, d(\delta_x*\delta_y) = \iint \phi(uv)\, d\delta_x(u) d\delta_y(v) = \phi(xy) = \int \phi\, d\delta_{xy},$$

به عبارت دیگر، $\delta_x*\delta_y=\delta_{xy}$. بنابراین $\delta_x*\delta_y=\delta_y*\delta_x$ اگر و تنها اگر $xy=yx$. نامساوی $\|\mu*\nu\|\le\|\mu\|\|\nu\|$ اشاره می‌کند به این‌که پیچش، $M(G)$ را به یک جبر باناخ تبدیل می‌کند، که جبر اندازه روی G نامیده می‌شود. همانی ضربی $M(G)$، $\delta=\delta_۱$، به نام جرم نقطه در ۱ است:

$$\int \phi\, d(\delta*\mu) = \iint \phi(xy)\, d\delta(x)\, d\mu(y) = \int \phi(y)\, d\mu(y) = \int \phi d\mu$$

و به‌طور مشابه $\mu*\delta=\mu$. همچنین $M(G)$ یک برگشت $\mu^*\longrightarrow\mu$ که به‌وسیلهٔ $\mu^*(E)=\overline{\mu(E^{-۱})}$، یا $\int\phi\, d\mu^*=\int\phi(x^{-۱})\, d\overline{\mu}(x)$ تعریف می‌شود دارد. $\mu^*\longrightarrow\mu$ واقعاً یک برگشت است زیرا

$$\begin{aligned}\int \phi\, d(\mu*\nu)^* &= \int \phi(z^{-۱})\, d\overline{(\mu*\nu)}(z)\\ &= \iint \phi((xy)^{-۱})\, d\overline{\mu}(x)\, d\overline{\nu}(y)\\ &= \iint \phi(y^{-۱}x^{-۱})\, d\overline{\mu}(x)\, d\overline{\nu}(y)\\ &= \iint \phi(yx)\, d\mu^*(x)\, d\nu^*(y)\\ &= \int \phi\, d(\nu^**\mu^*),\end{aligned}$$

بنابراین $(\mu*\nu)^*=\nu^**\mu^*$.

قضیه ۱.۵۶. *فرض کنیم μ و ν، اندازه‌های مختلط باشند. فرض کنیم τ نگاشت $xy\longrightarrow(x,y)$ از $G\times G$ به G باشد. اگر f تابعی روی G باشد که $|\mu|*|\nu|$-ت.ه. صفر شود، آن‌گاه $f\circ\tau$ روی $G\times G$،*

$|\mu \times \nu|$-ت.ه. صفر می‌شود. بنابراین اگر $f \in L^1(G, |\mu| * |\nu|)$، تابع $f \circ \tau$، $|\mu \times \nu|$-ت.ه. روی $G \times G$ تعریف می‌شود. به‌علاوه $f \circ \tau \in L^1(G \times G, |\mu \times \nu|)$، و

$$\int_G f\,d\mu * \nu = \int_{G\times G} (f \circ \tau)\,d\mu \times \nu = \int_G \int_G f(xy)\,d\nu(y)\,d\mu(x)$$
$$= \int_G \int_G f(xy) d\mu(x)\,d\nu(y).$$

برهان. به قضیهٔ ۱۹.۱۰ از [۱۹] رجوع کنید. □

قضیه ۵۷.۱. *فرض کنیم μ, ν و τ همانند قضیهٔ ۵۶.۱ باشند. آن‌گاه برای هر مجموعهٔ $|\mu| * |\nu|$-اندازه پذیر A، $\tau^{-1}(A)$، $|\mu \times \nu|$-اندازه‌پذیر است، و*

$$\mu * \nu(A) = \mu \times \nu(\tau^{-1}(A)) = \int_G \nu(x^{-1}A)\,d\mu(x) = \int_G \mu(Ay^{-1})\,d\nu(y).$$

برهان. به قضیهٔ ۱۹.۱۱ از [۱۹] رجوع کنید. □

تعریف ۵۸.۱. اندازهٔ μ پیوسته نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in G$، $\mu(\{x\}) = 0$. اندازهٔ پیوسته μ منفرد نامیده می‌شود اگر μ نسبت به اندازهٔ هار چپ λ منفرد باشد یعنی مجموعهٔ بورل $B \subset X$ موجود باشد که $\lambda(B) = 0$ و $|\mu|(B^c) = 0$.

تعریف ۵۹.۱. اگر $f, g \in L^1$، پیچش f و g تابعی است که به‌وسیلهٔ
$$f * g(x) = \int f(y)g(y^{-1}x)\,dy$$
تعریف می‌شود.

$f * g(x)$ در چندین فرم مختلف می‌توان بیان کرد:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int f(y)g(y^{-1}x)\,dy \\ &= \int f(xy)g(y^{-1})\,dy \\ &= \int f(y^{-1})g(yx)\Delta(y^{-1})\,dy \\ &= \int f(xy^{-1})g(y)\Delta(y^{-1})\,dy \end{aligned} \quad (5)$$

که $\Delta : G \longrightarrow (0, \infty)$ تابع مدولار G است.