دانشکده علوم پایه

مرکز تبریز

پایان نامه
برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی
گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

نوعی از مسئله فروشنده دوره گرد با بازه زمانی

رسول شرقی

استاد راهنما:
دکتر جواد مهری تکمه

استاد مشاور:
آقای یوسف علیپورفخری

اردیبهشت ماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

خدایا...

در آغاز هیچ نبود، کلمه بود، آن کلمه خدا بود. پس خدایم به من قدرت بده تا زبانم را آنگونه بگشایم که شایستهٔ بندگی توست و مرا سرنوشتی خیر بنویس که آغاز خود را به پایانی که تو می‌خواهی پیوند دهم و عقل و اندیشه‌ام را در راهی به کار گیرم که تو خواهان آنی.

به من قدرتی بده تا لیاقت داشته باشم در اوج قدرت انسان باشم و باور کنم که انسان را در راه رسیدن به اوج هیچ مانعی نیست و تو، آن را که مسیر کمال را با عشق طی کند به مقصد خواهی رساند.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهای در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

تشکر و قدردانی

سپاس پرورگار یکتایی که به انسان قدرت تفکر و تعقل عنایت فرمود و وجود انسان را به زیور علم و معرفت بیاراست. حکیمی که به قلم سوگند خورد و به چراغ دل انسان را به نور علم و معرفت روشن نمود. درود بی پایان بر مربیان الهی بشر، معلمان تزکیه و تعلیم یعنی انبیای الهی و با تشکر فراوان از اساتید گرانقدری که در انجام این پروژه بنده را راهنمایی نمودند.
از اساتید فرزانه و گرانمایه خود، آقای دکتر جواد مهری تکمه که با سعه و صدر و فضیلت علمی و اخلاقیشان همواره مرا از راهنمایی‌های ارزشمند و تجارب علمی خویش بهره‌مند ساختند، آقای یوسف علیپورفخری که نهایت لطف خویش را در مراحل مختلف این پژوهش از اینجانب دریغ نفرمودند و زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل نمودند، سپاسگذارم. علاوه بر این از استاد محترم آقای دکتر بهروز علیزاده که داوری این پایان‌نامه را با نهایت دقّت و صرف وقت ارزشمندشان انجام دادند، تشکر می‌نمایم.
از خانواده که در تمام مراحل تحصیل حامی و مشوق من بودند، کمال تشکر را دارم و در پایان آرزوی توفیق و سلامتی همه این عزیزان را از خداوند متعال خواهانم.

رسول شرقی
اردیبهشت ۱۳۹۰
تبریز، ایران

تقدیم به:

روح پدرم

و

دعای مادرم

بزرگوارانی که ترانه زندگی را با موسیقی زیبای محبت به من آموختند.

نام خانوادگی دانشجو: شرقی نام: رسول

عنوان: نوعی از مسئله فروشنده دوره گرد با بازه زمانی

استاد راهنما : دکترجواد مهری تکمه

استاد مشاور: آقای یوسف علیپور فخری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه پیام نور تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: فروردین ماه ۱۳۹۰ تعداد صفحه: ۵۳

کلید واژه‌ها: مسئله مرد عرضه کننده، مسئله فروشنده دوره گرد، بازه‌های زمانی، تحلیل چند وجهی، برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته.

چکیده

موضوع مطرح شده در این پایاننامه، نوعی از مسئله فروشنده دوره گرد با بازه زمانی می‌باشد که شامل کمترین مجموع مدت زمان سفر بین انبار و مکان‌های برخی از مشتری‌ها است. دو نوع مدل‌بندی برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته را برای نوعی از مسئله فروشنده دوره گرد با بازه زمانی ارائه می‌کنیم، اوّلی مدل‌بندی جریان یالی کلاسیک و دوّمی مدل‌بندی تخصیص متوالی است. برخی از نتایج چند وجهی‌ها را برای مدل‌بندی نوع دوّم ارائه می‌گردد. حالت خاص موقعی رخ می‌دهد که فقط بازه زمانی انبار بسته بوده و بازه‌های زمانی دیگر مکان‌ها باز باشد. الگوریتم‌های دقیق و ابتکاری را برای نوعی از مسئله فروشنده دوره گرد با بازه زمانی ارائه می‌کنیم. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد مثال‌های با اندازه متوسط را می‌توان دقیقاً با هر دو روش حل کرد. در صورتی که الگوریتم ابتکاری راه حل خیلی خوبی را برای مثال‌های با اندازه‌های بزرگ و متوسط فراهم می‌کند.

فهرست مطالب

لیست جداول

مقدمه

مسئله مرد عرضه کننده با بازه‌های زمانی (DMPTW[1])، نوعی از مسئله فروشنده دوره گرد با بازه زمانی (TSPTW[2]) است که شامل کمترین مجموع مدت زمان سفر بین انبار و مکان‌های برخی از مشتری‌ها است. مسئله مرد عرضه کننده با بازه‌های زمانی، شامل تعیین مسیر هامیلتونی در گراف G است که در آن $G=(N\cup\{0\},A)$ گراف نامتقارنِ کامل و جهتدار بوده و $N=\{1,...,n\}$ $(N\geq 4)$ مجموعه گره‌های عرضه کننده و 0 گره انبار است. شروع مسیر از گره انبار است و دارای کمترین مدت زمان سفر به همه گره‌ها $i\in N$ نسبت به بازه‌های زمانی است. مدل‌بندی‌های برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته را برای مسئله مرد عرضه کننده با بازه‌های زمانی ارائه می‌کنیم.

این پایان‌نامه از چهار فصل تشکیل شده است. در فصل اوّل، تعاریف مقدماتی و پیشینه پژوهش که برای مطالعه‌ی فصل‌های بعدی مورد نیاز هستند، ارائه شده است. در فصل دوم، دو نوع مدل‌بندی برای نوعی از مسئله فروشنده دوره گرد با بازه زمانی ارائه می‌کنیم، ابتدا مدل‌بندی کلاسیک و سپس مدل‌بندی تخصیص متوالی را ارائه می‌کنیم و نامعادله‌های صحیح و نتایج چندوجهی‌ها را برای مدل‌بندی تخصیص متوالی ارائه می‌کنیم. در فصل سوم، الگوریتم‌های

[1] Delivery Man Problem with Time Windows

[2] Travelling Salesman Problem with Time Windows

ابتکاری و دقیق را ارائه می‌کنیم. در فصل چهارم، آزمایش‌های محاسباتی و نتایج را ارائه می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف مقدماتی و پیشینه پژوهش

در این فصل برخی تعاریف مقدماتی و پیشینه پژوهش ارائه می‌شوند که دانستن آنها برای مطالعه فصل‌های آتی مفید می‌باشد.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

گراف: گراف G یک سه تایی مرتّب $(V(G), E(G), \psi_G)$، متشکّل از مجموعهٔ ناتهی V(G) به عنوان مجموعه رأس‌ها، مجموعهٔ $E(G)$ به عنوان مجموعه یال‌ها (مجزا از$V(G)$) است و تابع وقوع ψ_G می‌باشد که به هر یال G، یک جفت نامرتّب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های G را همراه می‌کند. اگر e یک یال و u و v رأس‌هایی از $V(G)$ باشند بطوریکه $\psi_G(e) = uv$، آن‌گاه می‌گویند e رأس u را به v وصل می‌کند. رأس‌های u و v را دو انتهای یال e می‌نامند.

زیر گراف: گراف H زیرگراف G است اگر و تنها اگر $V(H) \subseteq V(G)$، $E(H) \subseteq E(G)$.

گشت: گشت در G دنبالهٔ $W = v_۰e_۱v_۱e_۲ \dots e_kv_k$ است که جمله‌های آن متناوباً رأس‌ها و یال‌ها هستند به قسمی که برای $۱ \leq i \leq k$، دو انتهای e_i، $v_i, v_{i-۱}$ هستند. در این صورت W

گشتی از v_0 به v_k است وبه صورت (v_0, v_k) نشان می‌دهیم.

گذر: اگر یال‌های $e_1, e_2, \ldots, e_k$ در گشت W، مجزا باشند، W را گذر می‌نامند.

مسیر: اگر در گذری علاوه بر یال‌ها، رأس‌های $v_0, v_1, \ldots, v_k$ مجزا باشند، W را مسیر می‌نامند.

مسیر هامیلتونی: مسیری را که شامل تمام رأس‌های G باشد، مسیر هامیلتونی از G می‌نامند.

دو رأس همبند: دو رأس مانند u و v از گراف G را همبند خوانند اگر مسیری بین رأس‌های u و v در گراف G موجود باشد.

مؤلفه‌های یک گراف: همبندی، یک رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعه رأس‌های V است. بنابراین افرازی از V به زیر مجموعه‌های ناتهی $V_1, V_2, \ldots, V_\omega$ وجود دارد به طوری که دو رأس u و v مرتبطند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعهٔ V_i باشند. زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_\omega]$ را مؤلفه‌های G می‌نامند.

گراف همبند: اگر گراف G دارای دقیقاً یک مؤلفه باشد، آنگاه گویند G همبند است؛ در غیر اینصورت G ناهمبند است. به عبارت ساده‌تر، گرافی که از هر رأس آن به هر رأس دیگر حداقل یک مسیری وجود داشته باشد، یگ گراف همبند گویند.

ترکیب خطی: بردار $y \in R^n$ را ترکیب خطی بردارهای $x_1, \ldots, x_m \in R^n$ گوییم اگر $a_1, \ldots, a_m \in R$ وجود داشته باشند به طوری که $y = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$.

ترکیب محدب: اگر بردار y ترکیب خطی از بردارهای $x_1, \ldots, x_m \in R^n$ باشد(یعنی $(y = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$ و $a_1, \ldots, a_m$ در معادله $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$ و $a_i \geq 0 \; (i = 1, \ldots, m)$ صدق کنند، در این صورت y را ترکیب محدب بردارهای $x_1, \ldots, x_m \in R^n$ می‌نامیم.

پوسته محدب: تمام ترکیب‌های محدب اعضای یک مجموعه مانند S را پوسته محدب S گویند. به عبارت دیگر

$$conv(S) = \{y \in R^n | \exists m \in N, a_1, \ldots, a_m \in R, x_1, \ldots, x_m \in S, y = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 1, a_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m\}$$

مستقل آفینی: فرض کنید S یک زیر مجموعه ناتهی از R^n باشد. مجموعه‌ی S را مستقل آفینی گویند اگر برای هر زیر مجموعه $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq S$، از معادله‌های $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0$ و $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$ نتیجه شود $(i = 1, \ldots, k)$ $a_i = 0$.

ماشین تورینگ[1]: یک ماشین محاسباتی نظری است که توسط آلن تورینگ در سال ۱۹۳۷ برای ارائه خدمت به عنوان یک مدل ایده‌ال جهت محاسبات ریاضی اختراع شده است.[۳۵] این ماشین شامل یک خط از خانه‌ها با نام نوار است که می‌تواند به عقب و جلو حرکت کند. یک بخش فعّال که به نام هد(head) شناخته می‌شود دارای ویژگیی به نام حالت است که می‌توان این ویژگی را به رنگ خانه فعّال پایینی آن تغییر داد و یک مجموعه از دستورالعمل‌ها، برای تعیین اینکه هد چگونه باید خانه‌ها را تصحیح کند و چگونه نوار حرکت کند. در هر گام ممکن است ماشین رنگ خانه فعّال را تصحیح کند، حالت هد را تغییر دهد و سپس نوار را یک واحد به چپ یا راست حرکت دهد و ... .

مسئله NP: یک مسئله به دسته (NP[2])(زمان چند جمله‌ای غیر قطعی) تخصیص داده می‌شود هر گاه در یک زمان چند جمله‌ای غیر قطعی توسط ماشین تورینگ قابل حل باشد.

NP− **سخت:** دسته پیچیدگی مسائل تصمیم که به صورت ذاتی سخت‌تر از این است که

[1] Touring machine
[2] Nondeterministic Polynomial time

بتوان توسط ماشین تورینگ در زمان چند جمله‌ای غیر قطعی حل کرد.

مسئله فروشنده دوره گرد(TSP[۳]): مسئله‌ای مشهور است که ابتدا در سده ۱۸ مسائل مربوط به آن توسط ویلیام هامیلتون و توماس کرکمن مطرح شد و سپس در دههٔ ۱۹۳۰ شکل عمومی آن به وسیله ریاضیدانانی مثل کارل منگر از دانشگاه هاروارد و هاسلر ویتنی از دانشگاه پرینستون مورد مطالعه قرار گرفت. شرح مسئله بدین شکل است: تعدادی شهر داریم و هزینه رفتن مستقیم از یکی به دیگری را می‌دانیم. مطلوب است کم هزینه‌ترین مسیری که از یک شهر شروع شود و از تمامی شهرها دقیقاً یک بار عبور کند و به شهر شروع باز گردد. مسئله فروشنده دوره گرد جزء مسائل NP سخت است [۲۶].

مسئله فروشنده دوره گرد با بازه‌های زمانی: تعدادی شهر داریم و زمان رفتن مستقیم از یکی به دیگری را می‌دانیم. مطلوب است کمترین زمان مسیری که از یک شهر شروع شود و از تمامی شهرها در بازه‌های زمانی داده شده، دقیقاً یک بار عبور کند و به شهر شروع باز گردد. مسئله فروشنده دوره گرد با بازه‌های زمانی نیز جزء مسائل NP سخت است [۱۸].

راه‌های معمول مواجه با چنین مسائلی عبارتنداز:

۱) طراحی الگوریتم‌هایی برای پیدا کردن جواب‌های دقیق که استفاده از آنها فقط برای مسائل با اندازه‌های کوچک صورت می‌گیرد.

۲) استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری که جواب‌هایی به دست می‌دهند که احتمالاً درست باشند.

۳) پیدا کردن زیرمسئله‌هایی از مسئله، یعنی تقسیم مسئله به مسئله‌های کوچکتر، تا بتوان الگوریتم‌های ابتکاری بهتر و دقیق‌تری ارائه کرد.

[۳] Travelling Salesman Problem

۲.۱ پیشینه پژوهش

مسئله مرد عرضه کننده با بازه‌های زمانی، نوعی از مسئله فروشنده دوره گرد با بازه‌های زمانی (TSPTW) است. فرض کنید $G = (N \cup \{۰\}, A)$ گراف نامتقارن، کامل جهتداربوده و $N = \{۱, ..., n\}$ $(N \geq ۴)$ مجموعه گره‌های عرضه کننده و ۰ گره انبار باشد و c_{ij} زمان سفر اختصاص یافته به یال $(i, j) \in A$ باشد. برای شروع سرویس از گره‌های G بازه‌های زمانی را اعمال می‌کنیم و زودترین و دیرترین زمان‌ها را با پارامترهای e_i وl_i برای هر $i \in N \cup \{۰\}$ توصیف می‌کنیم. اگر به گره i زودتر از زمان e_i برسیم زمان منتظر ماندن برای شروع سرویس در این گره رخ می‌دهد و مدت زمان سفر در گره i، اختلاف زمان بین شروع سرویس در گره i و شروع سرویس در گره انبار تعریف می‌کنیم. (DMPTW) شامل تعیین مسیر هامیلتونی در گراف G با شروع مسیر از گره انبار (گره ۰) با کمترین مدت زمان سفر همه گره‌های $i \in N$ نسبت به بازه‌های زمانی است. تابع هدف تجمعی (DMPTW) کاربردهایی در کالاهای سودمند فاسدشدنی، زمانبندی و مسیر یابی اتوبوس مدرسه، حمل و نقل و توزیع پستی دارد. به علاوه، زمان‌های نیاز برگشتن به انبار شامل تابع هدف نیست به این معنی است ما فقط به مدت زمان سفر مسافر یا کالاهای سودمند فاسد شدنی توجه می‌کنیم. بدون برگشتن به انبار اشاره به مسائل مسیریابی وسیله نقلیه باز است (برای نمونه مراجع [۲۲]، [۲۱] یا [۳۲] را مطالعه کنید).

ادبیات تحقیقی سرمایه گذاریهای محدودی را روی مسائل (DMPTW) نشان می‌دهد.در [۲۳] مدل‌بندی غیر خطی صحیح برای مسئله مرد عرضه کننده (DMP[۴]) ارائه می‌گردد. نویسنده کران‌های پایین را با رهاسازی لاگرانژی نتیجه می‌گیرد. مثال‌ها را با حدود ۳۰ گره

---
[۴] Delivery Man Problem

در نظر گرفته و با استفاده از الگوریتم شمارشی حل می‌کند.[۱۲]، [۳۶] و [۲۵] مدل‌بندی‌های برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته و نامعادله‌های درستی را برای (DMP) ارائه می‌کنند و مثال‌ها را حل می‌کنند که در آن تعداد گره‌ها بین ۱۵ تا ۶۰ است.

مطالعه (DMPTW) خیلی وسیع است. [۲۰] مدل‌بندی خطی صحیح آمیخته بر پایه شبکه گردش دو کالا ارائه می‌کند و مثال‌های تا حدود ۶۰ گره را حل می‌کند. امّا مدل‌بندی تقاضای خوبی شامل تابع هدف تجمعی نیست. در [۲] نامعادله‌های صحیحی برای (TSPTW) ارائه می‌شود و برخی از نتایج چند وجهی‌ها را فراهم می‌گردد. [۳] برای (TSPTW) سه مدل‌بندی برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته را مقایسه می‌کند. الگوریتم برش و انشعاب را برای بهترین مدل‌بندی که توانایی حل مثال‌های تا حدود ۷۰ گره را دارا می‌باشد، توسعه می‌دهد.

فصل ۲

مدل‌بندی‌های مسئله مرد عرضه کننده با بازه زمانی

در این فصل دو نوع مدل‌بندی برای مسئله مرد عرضه کننده با بازه زمانی ارائه می‌کنیم، ابتدا مدل‌بندی کلاسیک و سپس مدل‌بندی تخصیص متوالی را ارائه می‌کنیم و نامعادله‌های با ارزش و نتایج چندوجهی را برای مدل‌بندی تخصیص متوالی ارائه می‌کنیم.

۱.۲ مدل‌بندی جریان یالی کلاسیک

مدل‌بندی برطبق مدل‌بندی ارائه شده در[۱۷] است. فرض کنید $i, j \in N \cup \{0\} (i \neq j)$، x_{ij} نشان دهنده متغیرهای جریان یالی بوده و بازای $i, j \in N (i \neq j)$، v_{ij} و بازای $i, k \in N, j \in N \cup \{0\} (i \neq j)$، f_{ij}^{k} بیانگر متغیرهای پیشین بوده و بصورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر در مسیر هامیلتونی گره } i \text{ قبل از گره } j \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱.۲)$$

$$f_{ij}^k = \begin{cases} ۱ & \text{اگر یال } (i,j) \text{ پس از گره } k \text{ در مسیر هامیلتونی ظاهر شود} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۲.۲)$$

بالاخره، فرض کنید متغیرهای t_i ،$(i \in N \cup \{۰\})$ زمان شروع سرویس در گره‌ها را نشان دهد. با این نمادها مسئله DMPTW را به صورت ذیل مدل‌بندی می‌کنیم:

$$\text{(AF-DMP)} \qquad \min \quad \sum_{i=۱}^{n}(t_i - t_۰) \quad (۳.۲)$$

subject to:

$$t_i + c_{ij} \leq t_j + M_{ij}(۱ - x_{ij}) \qquad i \in N \cup \{۰\}, \; j \in N(i \neq j) \quad (۴.۲)$$

$$t_۰ \leq t_j \qquad j \in N \quad (۵.۲)$$

$$e_j \leq t_j \leq l_j \qquad j \in N \quad (۶.۲)$$

$$e_۰ \leq t_۰ \leq l_۰ \quad (۷.۲)$$

$$\sum_{i \in N \cup \{۰\}, i \neq j} x_{ij} = ۱ \qquad j \in N \cup \{۰\} \quad (۸.۲)$$

$$\sum_{j \in N \cup \{۰\}, i \neq j} x_{ij} = ۱ \qquad i \in N \cup \{۰\} \quad (۹.۲)$$

$$\sum_{i \in N \cup \{۰\}, i \neq j} f_{ji}^k - \sum_{i \in N, i \neq j} f_{ij}^k = ۰ \qquad j,k \in N(j \neq k) \quad (۱۰.۲)$$

$$\sum_{i \in N \cup \{۰\}, i \neq j} f_{ji}^j = ۱ \qquad j \in N \quad (۱۱.۲)$$

$$f_{ij}^k \leq x_{ij} \qquad i,j,k \in N(i \neq j) \quad (۱۲.۲)$$

$$\sum_{j \in N \cup \{۰\}, i \neq j} f_{ij}^k = v_{ki} \qquad i,k \in N(i \neq k) \quad (۱۳.۲)$$

$$\sum_{p,q\in S} x_{pq} + v_{ki} - v_{kj} \leq | S | - ۱ \quad i,j,k \in N(i \neq j \neq k),$$

$$S \subseteq N, | S | \geq ۲ : i,j \in S, k \notin S \qquad (۱۴.۲)$$

$$f_{ij}^k \geq ۰ \qquad i,k \in N, j \in N \cup \{۰\}(i \neq j) \qquad (۱۵.۲)$$

$$x_{ij} \in \{۰,۱\} \qquad i,j \in N \cup \{۰\}(i \neq j) \qquad (۱۶.۲)$$

در اینجا $M_{ij} : i \in N \cup \{۰\}, j \in N(i \neq j)$ ثابت دلخواه بزرگی است.

محدودیت‌های (۴.۲) و (۵.۲) نامعادله‌های سازگاری زمان‌بندی هستند، اگر از یال (i,j) استفاده شده باشد زمان سرویس در گره j حدّاقل برابر با کمترین زمان سرویس در گره i به اضافه مدت زمان سفر از i به j است. و همچنین محدودیت (۵.۲) تضمین می‌کند که گره ۰ قبل از هر گره از N ملاقات می‌شود. محدودیت‌های (۶.۲) و(۷.۲) نامعادله‌های بازه‌های زمانی برای گره‌های $N \cup \{۰\}$ هستند. محدودیت‌های (۸.۲) و (۹.۲) نامعادله‌های جریان یال هستند. محدودیت‌های (۱۰.۲) و (۱۱.۲) نامعادله‌های اولویت جریان بوده و تضمین کننده حفظ جریان متغیرهای f هستند. محدودیت‌های (۱۲.۲) و (۱۳.۲) ارتباط بین متغیرهای x ، f و v هستند. بالاخره محدودیت‌های (۱۴.۲)، نامعادله‌های حذف زیرمسیرهای عمومی بوده و مانع زیرمسیرها در G و ارتباط آنها با اولویت متغیرهای v است. اگر گره k پیش از گره i و بعد از گره j باشد در این صورت مسیری بین گره‌های i و j وجود ندارد و خواهیم داشت $\sum_{p,q\in S} x_{pq} \leq |S| - ۲$ و اگر گره k قبل از گره‌های i و j یا گره‌های i و j قبل ازگره k باشند خواهیم داشت $\sum_{p,q\in S} x_{pq} \leq |S| - ۱$.

متأسفانه، نامعادله سازگار زمان‌بندی (۴.۲) شامل ثابت M—بزرگ است و در نتیجه بررسی چند وجهی برای مدل کلاسیک قابل اجرا نیست. این محدودیت‌ها قسمت مهمی از