به نام خداوند یزدان پاک

دانشکده علوم

گروه رياضي محض

هم‌متناهي بودن مدول‌هاي کوهمولوژي موضعي

استاد راهنما

دکتر ناصر زماني

اساتيد مشاور

دکتر محمدباقر مقيمي

دکتر جعفر اعظمي

توسط

مينا بيگدلي

دانشگاه محقق اردبيلي

پاييز ۱۳۸۹

دانشکده علوم

گروه ریاضی

هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی

پژوهشگر :

مینا بیگدلی

پایان‌نامه برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

از

دانشگاه محقق اردبیلی

اردبیل- ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه : عالی

دکتر ناصر زمانی (استاد راهنما و رئیس کمیته داوران) : .... استادیار

دکتر محمد باقر مقیمی (استاد مشاور) : .... استادیار

دکترجعفر اعظمی (استاد مشاور) : ....استادیار

دکتر سید احمد موسوی (داورخارجی) : ....دانشیار

دکتر احمد خوجالی (داور داخلی) : ....استادیار

مهر ۱۳۸۹

پاسداشت صبوری‌ها

تقدیم به مظهر ایثار، پدرم

پاسداشت مهربانی‌ها

تقدیم به مظهر عشق، مادرم

و

تقدیم به پستی‌های سرفراز و بلندی‌های پرغرور وطنم

قدرداني

من قدرت خواستم، خدا مشكلات بر سر راهم قرار داد تا قوي شوم. من دانايي خواستم، خدا به من مساله داد تا حل كنم. من سعادت خواستم، خدا به من قدرت تفكر و قدرت تفهيم داد. من جرات خواستم، خدا موانعي سر راهم قرار داد تا بر آنها غلبه كنم. من عشق خواستم، او افرادي را به من نشان داد كه نيازمند كمک بودند. من محبت خواستم، خدا به من فرصت‌هايي براي محبت كردن داد. من به هرچه خواستم نرسيدم اما به هرچه نياز داشتم رسيدم، زيرا كه خداوند من حكيم بود.

سپاس يكتاي مهربان را كه فرصتي ارزاني‌ام داشت تا از عزيزاني كه با ازخود گذشتگي، مسير زندگي‌ام را هموار كردند، سپاس‌گزاري كنم. همواره وامدار ايثار دو عزيز زندگي‌ام، پدر و مادرم هستم. به رسم ادب بوسه‌اي نثار دستان پرمحبتشان مي‌كنم و در برابر بزرگواري بي‌حدشان پيشاني بر خاک مي‌سايم. از برادر مهربان و خواهر خوبم، امير و رعناي عزيز، كه همواره مشوق و پشتيبانم بودند، كمال سپاس و تشكر را دارم. بي‌شک پيشبرد اين پايان‌نامه بدون تشويق‌ها و راهنمايي‌هاي ارزنده استاد بزرگوار جناب آقاي دكتر ناصر زماني، ميسر نبود. از خداوند منان براي ايشان سلامتي و طول عمر خواهانم. از اساتيد مشاورم جناب آقاي دكتر مقيمي و جناب آقاي دكتر اعظمي، كه فراتر از يک استاد مشاور مرا مورد لطف خود قرار دادند، تشكر مي‌كنم. همچنين از استاد بزرگوار جناب آقاي دكتر موسوي، دانشيار دانشگاه تربيت‌مدرس و جناب آقاي دكتر خوجالي، كه زحمت داوري اين پايان‌نامه را بر عهده داشتند، و نيز از جناب آقاي دكتر اسدي، نماينده محترم تحصيلات تكميلي، قدرداني مي‌نمايم و در نهايت از تمام معلمان و دوستان دوره تحصيلم، كه خاطراتشان هيچ‌گاه از ضمير ذهنم محو نمي‌شود، سپاس-گزاري مي‌كنم.

مينا بيگدلي

مهر ۱۳۸۹

نام خانوادگي دانشجو: بيگدلي نام: مينا

عنوان پايان‌نامه: هم‌متناهي بودن مدول‌هاي كوهمولوژي موضعي

استاد راهنما: دكتر ناصر زماني

اساتيد مشاور: دكتر محمدباقر مقيمي، دكتر جعفر اعظمي

مقطع تحصيلي: كارشناسي ارشد رشته: رياضي محض گرايش: جبر

دانشگاه: محقق اردبيلي دانشكده: علوم پايه

تاريخ فارغ التحصيلي: ۱۳۸۹/۷/۳ تعداد صفحه: ۷۷

كليد واژه‌ها: ايده‌آل اول وابسته؛ بعد كرول؛ بعد كوهمولوژيكي؛ بعد متناهي؛ كوهمولوژي موضعي؛ مدول لاسكري ضعيف؛ مدول مينيماكس؛ مدول هم‌متناهي؛ مدول هم‌مينيماكس.

چكيده: فرض كنيم R حلقه‌اي نوتري و M يک R ـ مدول غير صفر مولدمتناهي باشد. همچنين فرض كنيم I ايده‌آلي از R و t يک عدد صحيح نامنفي باشد. در اين پايان‌نامه ثابت مي‌شود هرگاه R ـ مدول‌هاي $H_I^0(M)$، $H_I^1(M), \ldots, H_I^{t-1}(M)$ مينيماكس باشند آنگاه به ازاي هر زيرمدول مينيماكس N نظير $H_I^t(M)$، R ـ مدول $Hom_R(R/I, H_I^t(M)/N)$ مولدمتناهي بوده و درنتيجه مجموعه ايده‌آل‌هاي اول وابسته $H_I^t(M)/N$ متناهي است. در حالتي كه به ازاي هر $i<t$، $\dim \mathrm{Supp}_R H_I^i(M) \le 1$، نشان داده مي‌شود كه R ـ مدول‌هاي $H_I^0(M)$، $H_I^1(M), \ldots, H_I^{t-1}(M)$، I ـ هم‌متناهي هستند و $Hom_R(R/I, H_I^t(M)/N)$ مولدمتناهي است. درنتيجه اگر $\dim R/I=1$، آنگاه $H_I^i(M)$ به ازاي هر $i\ge 0$، I ـ هم‌متناهي است. همچنين ثابت مي‌شود كه اگر R حلقه‌اي موضعي باشد و به ازاي هر $i<t$، $\dim \mathrm{Supp}_R H_I^i(M) \le 2$، آنگاه $Hom_R(R/I, H_I^t(M))$ و $Ext_R^j(R/I, H_I^i(M))$ به ازاي هر $i<t$ و هر $j \ge 0$ لاسكري ضعيف هستند. به عنوان يک نتيجه هرگاه $\dim R/I < 2$، آنگاه مجموعه ايده‌آل‌هاي اول وابسته $H_I^i(M)$ به ازاي هر $i \ge 0$ متناهي است.

فهرست مندرجات

مقدمه

فرض کنيم R حلقه‌اي نوتري، I ايده‌آلي از R و M يک R ـ مدول مولدمتناهي باشد. مدول‌هاي کوهمولوژي موضعي $H_I^i(M)$ ($i \geq 0$) همواره مولد متناهي نيستند. از طرفي در حالتي که $(R,\boldsymbol{m})$ حلقه‌اي موضعي با ميدان مانده‌اي $k = R/\boldsymbol{m}$ باشد، مدول‌هاي کوهمولوژي موضعي $H_{\boldsymbol{m}}^i(M)$ آرتيني هستند و لذا $Hom_R(k,\ H_{\boldsymbol{m}}^i(M))$ مولد متناهي است. با توجه به اين نکته، گروتنديک[1] در [۱۲] حدس زير را مطرح کرد:

« اگر R حلقه‌اي نوتري باشد، آنگاه براي هر ايده‌آل I از R و هر R ـ مدول مولدمتناهي M ، R ـ مدول $Hom_R(R/I,\ H_I^i(M))$ مولد متناهي است. »

اما هارتشورن[2] در [۱۳] مثال نقض زير را براي حدس گروتنديک ارائه کرد:

« فرض کنيم k يک ميدان باشد و $R = k[x,y,z,u]/< xy - zu >$. قرار مي‌دهيم $I =< x,u >$. . در اينصورت $Hom_R(R/I,\ H_I^2(M))$ مولد متناهي نيست. »

هارتشورن در اين مقاله با تعريف مدول‌هاي I ـ هم‌متناهي، سوال زير را مطرح کرد:

« به ازاي کدام حلقه R و کدام ايده‌آل I از R ، R ـ مدول‌هاي $H_I^i(M)$ به ازاي هر i و هر R ـ مدول مولد متناهي M ، I ـ هم‌متناهي هستند؟ »

هارتشورن در [۱۳] و بعد از او چيرياسسکو[3]در [۸] نشان دادند که اگر R حلقه منظم موضعي کامل و I ايده‌آل اولي از آن باشد بطوريکه $\dim\ R/I$=۱، آنگاه R ـ مدول $H_I^i(M)$ به ازاي هر R ـ مدول مولد متناهي M ، I ـ هم‌متناهي است.

---

۱ *Grothendieck*　۲ *Hartshorne*　۳ *Chiriacescu*　۴ *Huneke*
۵ *Koh*　۶ *Gorenstein*

هونکه[4] و گُه[5] در [۱۵] ثابت کردند در حالتي که حلقه (R,m) يک حوزه صحيح گورنشتاين[6] کامل و I ايده‌آلي از R باشد بطوريکه $\dim \ R/I$=۱ ، آنگاه به ازاي هر دو R ـ مدول مولد متناهي M و N که $\mathrm{Supp}_R N \subseteq V(I)$ ، $Ext^j_R(N,H^i_I(M))$ به ازاي هر i و هر j مولد متناهي است. متعاقباً دلفينو[1] در[۹] ثابت کرد که اگر R يک حوزه صحيح موضعي کامل حاوي چند شرط مختصر باشد آنگاه نتيجه فوق برقرار است. همچنين دلفينو و مارلي[2] در [۱۰] و يوشيدا[3] در [۳۵] فرض کامل بودن و حوزه صحيح بودن حلقه را حذف کردند. در واقع آنها ثابت کردند که اگر M يک R ـ مدول مولد متناهي روي حلقه موضعي R و I ايده‌آلي از آن باشد که $\dim \ R/I$=۱ ، آنگاه مدول‌هاي کوهمولوژي موضعي $H^i_I(M)$ به ازاي هر i ، I ـ هم‌متناهي هستند. ليوبزنيک[4] در [۲۳] برخي از نتايج اخير در مورد ويژگي‌هاي متناهي بودن مدول‌هاي کوهمولوژي موضعي را جمع‌بندي کرده است.

يکي ديگر از مسائل اساسي در رابطه با مدول‌هاي کوهمولوژي موضعي، اين است که تحت چه شرايطي مجموعه ايده‌آل‌هاي اول وابسته $H^i_I(M)$ متناهي است (مساله ۴ از [۱۴]). اين مطلب در حالت کلي صحيح نيست. سينگ[5] در [۳۳] و کاتزمن[6] در [۱۸] به ترتيب مثال‌هاي نقضي در حالاتي که R غير موضعي و موضعي است، ارائه کردند. اما هونکه و شارپ[7] در [۱۶] در حالتي که R حلقه منظم موضعي با مشخصه $p > ۰$ و ليوبزنيک در [۲۲] در حالتي که R حلقه منظم موضعي هم‌مشخصه[8] است، نشان دادند که مطلب فوق صحيح است.

در اين پايان‌نامه نتايج جديدي از دو مساله مطرح شده فوق و بعضاً تعميمي از نتايج قبل ارائه شده است. در فصل اول به بيان مفاهيم و مقدماتي که در فصل‌هاي بعد مورد نياز هستند، مي‌پردازيم. در بخش اول اين فصل براي سهولت در دسترسي، مقدماتي از جبر جابجايي و جبر همولوژي را بيان مي‌کنيم و در بخش دوم به بررسي برخي از شرايط آرتيني بودن مدول‌هاي کوهمولوژي موضعي و همچنين معرفي مدول‌هاي ثانويه و مدول‌هاي قابل نمايش مي‌پردازيم. مطالب اين بخش در فصل سوم مورد استفاده قرار مي‌گيرند.

---

[1] Delfino [2] Marley [3] Yoshida [4] Lyubeznik
[5] Singh [6] Katzman [7] Sharp [8] Equicharacteristic

در فصل دوم که شامل دو بخش است، مدول‌هاي I ـ هم‌متناهي و مينيماکس را معرفي مي‌کنيم. در بخش اول اين فصل، به بررسي برخي معيارهاي I ـ هم‌متناهي بودن R ـ مدول‌ها مي‌پردازيم. ملکرسون[1] در [۲۸] نشان داد که R ـ مدول آرتيني M که محمل[2] در $V(I)$ است، I ـ هم‌متناهي است اگر و تنها اگر $(\cdot:_M I)$ با طول متناهي باشد. در گزاره ۱۰.۲.۱ اين مطلب را به کلاس R ـ مدول‌هاي مينيماکس تعميم مي‌دهيم. در بخش دوم پس از ذکر برخي مقدمات، قضيه اصلي اين فصل، قضيه ۲.۷.۲، را بيان و ثابت مي‌کنيم.

نتايج اصلي اين پايان‌نامه در فصل سوم بيان مي‌شود. در بخش اول اين فصل به بررسي شرايطي که در آن حدس گروتنديک صحيح است، مي‌پردازيم. يکي از مهم‌ترين قضاياي اين بخش، قضيه ۷.۱.۳ است. نتايج اين قضيه تعميم نتايج اصلي مقالات [۵] ، [۱۰] ، [۱۹] ، [۲۰] ، [۲۶] ، [۳۰] و [۳۵] هستند. در بخش دوم برخي شرايط متناهي بودن مجموعه ايده‌آل‌هاي اول وابسته مدول‌هاي کوهمولوژي موضعي $H_I^i(M)$ را بررسي مي‌کنيم. قضيه اصلي اين بخش، قضيه ۵.۲.۳ است که در اثبات مطالب بعدي به کار مي‌رود.

---

1 Melkerson

2 Support

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مفاهیم اولیه

در سراسر این فصل R حلقه جابجایی، یکدار و نوتری، I ایده‌آلی از R و M یک R ـ مدول است. نماد $(R, \mathbf{m})$ نشان‌دهنده حلقه موضعی R با ایده‌آل ماکسیمال $\mathbf{m}$ است.

در این پایان‌نامه مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول R را با $\mathrm{Spec}(R)$ نشان می‌دهیم. $V(I)$ نشان‌دهنده مجموعه تمام ایده‌آل‌های اولی از R است که شامل I هستند. همچنین پوچساز M با $\mathrm{Ann}_R(M)$ نشان داده می‌شود.

$\mathrm{Min}(I)$ نشانگر مجموعه تمام عناصر مینیمال در $V(I)$ است و $\mathrm{Max}(R)$ مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال R است.

محمل M، مجموعه $\{p \in \mathrm{Spec}(R) | M_p \neq \circ\}$ است که این مجموعه را با $\mathrm{Supp}_R M$ نشان می‌دهیم. اگر M مولد متناهی باشد آنگاه $\mathrm{Supp}_R M = V(\mathrm{Ann}_R(M))$. همچنین اگر p ایده‌آل اولی از R، I ایده‌آل دلخواهی از R و M یک R ـ مدول باشد آنگاه $(M/IM)_p = M_p/(IR_pM_p)$. چون R_p یک حلقه موضعی است، اگر M مولد متناهی باشد بنا به لم ناکایاما[۱] $M_p/(IR_pM_p) = \circ$ اگر و فقط اگر $M_p = \circ$ یا $IR_p = R_p$. بنابراین $\mathrm{Supp}_R M/IM = \mathrm{Supp}_R M \cap V(I)$.

برای یک رشته دقیق کوتاه از R ـ مدول‌ها مانند

$$\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \circ \qquad (*)$$

داریم

$$\mathrm{Supp}_R M = \mathrm{Supp}_R M' \cup \mathrm{Supp}_R M''.$$

ایده‌آل اول p از R را *ایده‌آل اول وابسته*[۲] M گوییم هرگاه $\circ \neq x \in M$ موجود باشد بطوریکه $p = (\circ :_R x)$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول وابسته M را با نماد $\mathrm{Ass}_R M$ نشان

[۱] *Nakayama's lemma*

[۲] *Associated prime ideal*

می‌دهیم. با توجه به رشته دقیق کوتاه $(*)$ داریم

$$\mathrm{Ass}_R M' \subseteq \mathrm{Ass}_R M \subseteq \mathrm{Ass}_R M'' \cup \mathrm{Ass}_R M'.$$

مجموعه تمام مقسوم‌علیه‌های صفر M را با نماد $\mathrm{Zdv}(M)$ نشان می‌دهیم که عبارتست از

$$\mathrm{Zdv}(M) = \bigcup_{p \in \mathrm{Ass}_R M} p.$$

ارتفاع[۱] ایده‌آل اول p، سوپریمم طول زنجیرهایی از ایده‌آل‌های اول از بالا مختوم به p است. این مقدار را با $ht_R p$ (یا htp) نشان می‌دهیم. اگر این سوپریمم موجود نباشد، گوییم ارتفاع p، ∞ است. ارتفاع ایده‌آل دلخواه I، برابر $min\{ht_R p | p \in V(I)\}$ است.

بعد *(کرول*[۲]*)* حلقه R، عبارت است از $sup\{ht_R p | p \in \mathrm{Spec}(R)\}$. این مقدار را با $\dim R$ نشان می‌دهیم. اگر این سوپریمم موجود نباشد، گوییم بعد R نامتناهی است و قرار می‌دهیم $\dim R = \infty$. در حالت کلی بعد R ـ مدول M، سوپریمم طول زنجیرهایی از عناصر $\mathrm{Supp}_R M$ است و این مقدار را با $\dim M$ (یا برای تاکید بیشتر روی حلقه، با $\dim_R M$) نشان می‌دهیم. اگر M، R ـ مدولی مولد متناهی باشد داریم $\dim M = \dim R/(0 :_R M)$.

بنا به تعمیم قضیه ایده‌آل اصلی کرول[۳]، اگر I ایده‌آلی از R باشد که با n عضو تولید می‌شود آنگاه به ازای هر ایده‌آل اول مینیمال روی I مانند p، $htp \leq n$. بنابراین اگر $(R, \mathbf{m})$ حلقه‌ای موضعی و تعداد مولدهای $\mathbf{m}$ برابر n باشد آنگاه $\dim R \leq n$.

نتیجه ۱.۱.۱. فرض کنیم p و q ایده‌آل‌های اولی از R باشند که $p \subset q$ و ایده‌آل اولی از R موجود باشد که بین p و q (نسبت به رابطه شمول) قرار گیرد. در اینصورت تعداد نامتناهی ایده‌آل اول از R وجود دارد که بین p و q قرار می‌گیرند.

اثبات: رجوع شود به قضیه (۱۴۴) از [۱۷]. ■

---

[۱] *Height*

[۲] *Krull*

[۳] *Krull's Generalized Principal Ideal Theorem*

یک *سری ترکیبی*[1] از R ـ مدول G، زنجیری صعودی از زیرمدول‌های G به صورت $0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$ است که به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، G_i/G_{i-1} ـ R ـ مدولی ساده است. ثابت می‌شود یک سری ترکیبی از G زنجیری ماکسیمال از زیرمدول‌های G است که با 0 شروع و به G ختم می‌شود. گوییم G دارای طول متناهی[2] است هرگاه G دارای سری ترکیبی باشد. ثابت می‌شود که طول سری‌های ترکیبی G یکسان است. این طول مشترک با $l(G)$ نشان داده می‌شود. اگر G سری ترکیبی نداشته باشد، قرار می‌دهیم $l(G) = \infty$.
R ـ مدول G طول متناهی دارد اگر و فقط اگر G نوتری و آرتینی باشد. همچنین اگر G یک R ـ مدول مولد متناهی بوده و $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_n$ ایده‌آل‌های ماکسیمال R و نه لزوماً متمایز باشند بطوریکه $\mathbf{m}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{m}_n G = 0$، آنگاه G با طول متناهی است. بعلاوه R ـ مدول مولد متناهی G طول متناهی دارد اگر و فقط اگر $\mathrm{Ass}_R G \subseteq \mathrm{Max}(R)$.

منظور از یک M ـ *رشته منظم*[3] دنباله‌ای از اعضای حلقه R مانند $a_1, \ldots, a_n$ است که $M \neq \langle a_1, \ldots, a_n \rangle M$ و به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، $a_i \notin \mathrm{Zdv}(M/\langle a_1, \ldots, a_{i-1}\rangle M)$. طول بزرگترین M ـ رشته واقع در I را با نماد $grade_M I$ نشان می‌دهیم. در حلقه موضعی $(R, \mathbf{m})$ طول بزرگترین M ـ رشته در $\mathbf{m}$ را با $\mathrm{depth}\ M$ نیز نشان می‌دهند. ثابت می‌شود $grade_R I \leq ht_R I$.

فرض کنیم $(R, \mathbf{m})$ حلقه‌ای موضعی با بعد r باشد. دنباله $a_1, \ldots, a_r$ از اعضای $\mathbf{m}$ را یک *دستگاه پارامتری*[4] برای R گوییم هرگاه $\dim\ R/\langle a_1, \ldots, a_r \rangle = 0$ و به ازای هر s که $s < r$ و هر دنباله از $\mathbf{m}$ مانند $x_1, \ldots, x_s$، $\dim\ R/\langle x_1, \ldots, x_s \rangle \neq 0$. ثابت می‌شود که اگر $a_1, \ldots, a_r$ یک دستگاه پارامتری R باشد آنگاه به ازای هر i، $1 \leq i \leq r$، $\dim\ R/\langle a_1, \ldots, a_i \rangle = r - i$.

[1] *Composition Series*
[2] *Finite lenght*
[3] *M − Regular sequence*
[4] *System of parameters*

حلقه موضعی $(R,\mathbf{m})$ حلقه کوهن ــ مکوئلی[۱] نامیده می‌شود هرگاه $\operatorname{depth}\, R = \dim R$. ثابت شده است که اگر $(R,\mathbf{m})$ حلقه موضعی کوهن ـ مکوئلی باشد آنگاه به ازای هر ایده‌آل سره I از R، $grade_R I = ht_R I$. همچنین هر حلقه منظم موضعی یک حلقه کوهن ـ مکوئلی است. بعلاوه در حلقه‌های کوهن ـ مکوئلی هر دستگاه پارامتری یک R ـ رشته است.

۲.۱ مدول‌های کوهمولوژی موضعی

در این بخش به بررسی مفاهیم و قضایایی از مدول‌های کوهمولوژی موضعی که در فصول بعدی مورد نیاز می‌باشند، می‌پردازیم.
ابتدا به معرفی فانکتور دقیق چپ $\Gamma_I(\ .\ )$ می‌پردازیم.

فرض کنیم I ایده‌آلی از R و M یک R ـ مدول دلخواه باشد. R ـ مدول $\Gamma_I(M)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Gamma_I(M) = \{m \in M | \exists n \in \mathbb{N};\ I^n m = 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_M I^n).$$

اگر $f : M \longrightarrow N$ همریختی R ـ مدول‌ها باشد، نگاشت $\Gamma_I(f) : \Gamma_I(M) \longrightarrow \Gamma_I(N)$ را تحدید f به $\Gamma_I(M)$ تعریف می‌کنیم. بنابراین $\Gamma_I(\ .\ )$ یک فانکتور روی کاتگوری R ـ مدول‌ها است. ثابت می‌شود این فانکتور خطی و دقیق چپ است و

$$\Gamma_I(\ .\ ) \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R(R/I^n,\ .\ ).$$

R ـ مدول M را I ـ *تابدار*[۲] می‌گوییم هرگاه $\Gamma_I(M) = M$ و I ـ *آزاد از تاب*[۳] می‌گوییم هرگاه $\Gamma_I(M) = 0$. اگر J ایده‌آل دیگری از R باشد داریم $\Gamma_I(\Gamma_J(\ .\ )) = \Gamma_{I+J}(\ .\ )$. همچنین $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ اگر و تنها اگر $\Gamma_I(\ .\ ) = \Gamma_J(\ .\ )$.

[۱] $Cohen - Macaulay$
[۲] $I - Torsian$
[۳] $I - Torsian\ free$

برای R ـ مدول دلخواه M تساوی‌های زیر را داریم

$$\mathrm{Ass}_R\Gamma_I(M) = \{p \in \mathrm{Ass}_R M | I \subseteq p\} \quad , \quad \mathrm{Ass}_R\frac{M}{\Gamma_I(M)} = \{p \in \mathrm{Ass}_R M | I \not\subseteq p\}.$$

فرض کنیم M یک R ـ مدول، $E^{\bullet}(M)$ تحلیل انژکتیو M و I ایده‌آلی از R باشد. فرض کنیم $E^{\bullet}_M$ همبافت حاصل از حذف M از رشته $E^{\bullet}(M)$ باشد. با اثر دادن فانکتور $\Gamma_I(\ .\ )$ روی $E^{\bullet}_M$، همبافتی از R ـ مدول‌های I ـ تابدار حاصل می‌شود. i ـ امین همولوژی مدول این همبافت را با $H^i_I(M)$ نشان می‌دهیم و آنرا i ـ امین مدول *کوهمولوژی موضعی*[1] M نسبت به I می‌گوییم. ثابت می‌شود

$$(H^i_I(\ .\ ))_{i\in\mathbb{N}_0} \cong (\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Ext^i_R(\frac{R}{I^n},\ .\ ))_{i\in\mathbb{N}_0}.$$

از رشته دقیق کوتاه $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ رشته دقیق طولانی زیر بدست می‌آید

$$0 \longrightarrow H^0_I(M') \longrightarrow H^0_I(M) \longrightarrow H^0_I(M'') \xrightarrow{\partial} H^1_I(M) \longrightarrow \cdots$$

که در آن ∂ همریختی رابط است.

اگر I ایده‌آلی از R باشد که توسط n عضو تولید می‌شود آنگاه به ازای هر R ـ مدول M و هر $i > n$، $H^i_I(M) = 0$. همچنین بنا به قضیه *صفرشدن گروتندیک*[2] به ازای هر $i > \dim M$، $H^i_I(M) = 0$. اگر $a_1, \dots, a_n$ یک M ـ رشته در I باشد آنگاه به ازای هر i، $0 \leq i \leq n-1$، $H^i_I(M) = 0$. بنا به قضیه *صفرنشدن گروتندیک*[3] در حالتی که $(R, \mathbf{m})$ حلقه‌ای موضعی و M یک R ـ مدول غیر صفر مولد متناهی با بعد n باشد، $H^n_{\mathbf{m}}(M) \neq 0$. همچنین در حلقه دلخواه R به ازای هر R ـ مدول مولد متناهی M و هر ایده‌آل I از R که در شرط $M \neq IM$ صدق می‌کنند، $grade_M I$ کوچکترین i ای است که $H^i_I(M) \neq 0$. در نتیجه در حلقه موضعی $(R, \mathbf{m})$ برای یک R ـ مدول غیر صفر و مولد متناهی M، تنها به ازای مقادیری از i که

[1] *Local Cohomology*

[2] *Grothendieck's Vanishing Theorem*

[3] *Grothendieck's Nonvanishing Theorem*

$\operatorname{depth} M \leq i \leq \dim M$، $H^i_{\mathbf{m}}(M) \neq \circ$. بعلاوه اگر $a_1, \dots, a_n$ عناصری از R باشند که $M \neq \langle a_1, \dots, a_n \rangle M$، آنگاه $a_1, \dots, a_n$ یک M ـ رشته است اگر و فقط اگر به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، $H^{i-1}_{\langle a_1, \dots, a_i \rangle}(M) = \circ$.

مدول‌های آرتینی

در ادامه نشان خواهیم داد که اگر $(R, \mathbf{m})$ حلقه‌ای موضعی و M یک R ـ مدول مولد متناهی با بعد n باشد، $H^n_I(M)$ به ازای هر ایده‌آل I از R و $H^i_{\mathbf{m}}(M)$ به ازای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، آرتینی است.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنیم M، R ـ مدولی I ـ تابدار و $(\circ :_M I)$ آرتینی باشد. در اینصورت M آرتینی است.

اثبات: رجوع شود به قضیه (۲.۱.۷) از [۶]. ■

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنیم $(R, \mathbf{m})$ حلقه‌ای موضعی و M یک R ـ مدول مولد متناهی باشد. در اینصورت R ـ مدول $H^i_{\mathbf{m}}(M)$ به ازای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$ آرتینی است.

اثبات: رجوع شود به قضیه (۳.۱.۷) از [۶]. ■

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنیم $(R, \mathbf{m})$ حلقه‌ای موضعی و M، R ـ مدول غیر صفر مولد متناهی با بعد n باشد. در اینصورت $H^n_I(M)$ آرتینی است.

اثبات: رجوع شود به قضیه (٦.۱.۷) از [٦]. ■

نمایش ثانویه

زیرمدول‌های ثانویه[1] اولین بار توسط مک‌دونالد[2] در [۲۴] به عنوان دوگان زیرمدول‌های اولیه معرفی شد.

---

[1] Secondary
[2] Macdonald

در این قسمت به بیان مقدماتی در مورد این نوع از مدول‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم S یک R ـ مدول غیر صفر باشد. گوییم S *ثانویه* است هرگاه به ازای هر $r \in R$، $rS = S$ یا n ای موجود باشد که $r^nS = 0$.
به راحتی ثابت می‌شود اگر S، R ـ مدولی ثانویه باشد، $p := \sqrt{(0 :_R S)}$ ایده‌آل اولی از R است. در اینصورت گوییم S، p ـ ثانویه است.

نشان می‌دهیم هر تصویر هومرفیک غیر صفر از یک R ـ مدول p ـ ثانویه نیز p ـ ثانویه است. فرض کنیم M یک R ـ مدول p ـ ثانویه و M/N تصویر هومرفیک غیر صفری از M باشد. فرض کنیم $r \in R$. اگر $rM = M$، آنگاه $r(M/N) = (rM + N)/N = M/N$ و اگر $rM \neq M$، n ای موجود است که $r^nM = 0$. در اینصورت $r^n(M/N) = (r^nM + N)/N = 0$. پس M/N ثانویه است. همچنین اگر $x \in p = \sqrt{(0 :_R M)}$، آنگاه $t \in \mathbb{N}$ موجود است که $x^tM = 0$ و لذا $x^t(M/N) = 0$. در نتیجه $x \in \sqrt{(0 :_R M/N)}$. برعکس، اگر $x \in \sqrt{(0 :_R M/N)}$ آنگاه به ازای یک s در $\mathbb{N}$، $x^s(M/N) = 0$. پس $x(M/N) \neq M/N$ و در نتیجه $xM + N \neq M$. پس $xM \neq M$. لذا $t \in \mathbb{N}$ موجود است که $x^tM = 0$. بنابراین $x \in \sqrt{(0 :_R M)} = p$. در نهایت $p = \sqrt{(0 :_R M/N)}$ و لذا M/N، p ـ ثانویه است.

همچنین اگر $S_1, \ldots, S_n$، $n \in \mathbb{N}$، زیرمدول‌هایی p ـ ثانویه از M باشند، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} S_i$ نیز p ـ ثانویه است. زیرا برای $r \in R$ دلخواه، اگر به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، $rS_i = S_i$، آنگاه $r\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} rS_i = \sum_{i=1}^{n} S_i$ و اگر jای، $1 \leq j \leq n$، موجود باشد که $rS_j \neq S_j$، آنگاه $t_j \in \mathbb{N}$ موجود است که $r^{t_j}S_j = 0$ یا $r \in p$ و در نتیجه به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، $t_i \in \mathbb{N}$ موجود است که $r^{t_i}S_i = 0$. قرار می‌دهیم $k = \mathrm{Max}\{t_1, \ldots, t_n\}$. داریم $r^k\sum_{i=1}^{n} S_i = r^kS_1 + \ldots + r^kS_n = 0$. همچنین واضح است که $p = \sqrt{(0 :_R \sum_{i=1}^{n} S_i)}$.
بنابراین $(0 :_R \sum_{i=1}^{n} S_i)$، p ـ ثانویه است.

تعریف ۵.۲.۱. یک *نمایش ثانویه*[1] از R ـ مدول M، نمایش M به شکل مجموع تعدادی متناهی از زیرمدول‌های ثانویه M است.

$$M = S_1 + \ldots + S_n \; ; \qquad S_i \leq M \; , \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

چنین نمایشی که در آن S_i ها p_i ـ ثانویه‌اند، مینیمال نامیده می‌شود هرگاه

۱) $p_1, \ldots, p_n$، n ایده‌آل اول متفات باشند؛

۲) به ازای هر j، $1 \leq j \leq n$، $S_j \not\subseteq \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} S_i$.

گوییم M *قابل نمایش*[2] است هرگاه M دارای نمایش ثانویه باشد.

چون جمع خانواده‌ای تهی از زیرمدول‌های یک R ـ مدول صفر است، لذا R ـ مدول صفر قابل نمایش است.

هر R ـ مدول قابل نمایش دارای نمایش مینیمال است. زیرا فرض کنیم $M = S_1 + \ldots + S_n$ نمایش ثانویه‌ای از M باشد که به ازای هر i، $1 \leq i \leq$، S_i ها p_i ـ ثانویه‌اند. اگر i و j، $1 \leq i, j \leq n$، موجود باشند که $p := p_i = p_j$، آنگاه قرار می‌دهیم $S' := S_i + S_j$. حال در نمایش M به جای $S_i + S_j$، S' را قرار می‌دهیم. این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که تمام p_i ها به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، متمایز شوند. اگر زای، $1 \leq j \leq n$، موجود باشد که $S_j \subseteq \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} S_i$، در اینصورت S_j را از نمایش حذف می‌کنیم و به این صورت نمایش مینیمالی برای M بدست می‌آید.

قضیه ۶.۲.۱. (اولین قضیه یکتایی) فرض کنیم M یک R ـ مدول قابل نمایش باشد. فرض کنیم $M = S_1 + \ldots + S_n$ که S_i ها p_i ـ ثانویه‌اند و همچنین $M = S'_1 + \ldots + S'_{n'}$ که S'_i ها p'_i ـ ثانویه‌اند دو نمایش ثانویه مینیمال M باشند. در اینصورت $n = n'$ و $\{p_1, \ldots, p_n\} = \{p'_1, \ldots, p'_{n'}\}$.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $p \in \operatorname{Spec}(R)$، آنگاه $p \in \{p_1, \ldots, p_n\}$ اگر و فقط اگر M

[1] Secondary representation

[2] Representable

دارای تصویر هومرفیکی باشد که p ـ ثانویه است.

فرض کنیم iای، $1 \leq i \leq n$، موجود است که $p = p_i$. قرار می‌دهیم $T_i := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} S_j$. چون $M = S_1 + \ldots + S_n$ نمایش مینیمال M است، پس $M \neq T_i$ و لذا

$$0 \neq \frac{M}{T_i} = \frac{T_i + S_i}{T_i} \cong \frac{S_i}{S_i \cap T_i}.$$

پس M/T_i، p_i ـ ثانویه است. فرض کنیم $M/L \neq 0$ تصویر هومرفیک p ـ ثانویه‌ای از M باشد. حال با یک اندیس گذاری جدید برای S_i ها، فرض کنیم rای، $1 \leq r \leq n$، موجود است که به ازای هر i، $1 \leq i \leq r$، $S_i \nsubseteq L$ و به ازای هر i، $r + 1 \leq i \leq n$، $S_i \subseteq L$. بنابراین $M/L = \sum_{i=1}^{r}((S_i + L)/L)$. اما $(S_i + L)/L$، p_i ـ ثانویه است و در نتیجه

$$p = \sqrt{(0 :_R \frac{M}{L})} = \sqrt{(0 :_R \sum_{i=1}^{r} \frac{S_i + L}{L})} = \bigcap_{i=1}^{r} \sqrt{(0 :_R \frac{S_i + L}{L})} = \bigcap_{i=1}^{r} p_i.$$

پس iای، $1 \leq i \leq r$، موجود است که $p = p_i$.

حال به اثبات قضیه می‌پردازیم. فرض کنیم $p \in \{p_1, \ldots, p_n\}$. تصویر هومرفیک p ـ ثانویه‌ای از M موجود است و در نتیجه $p \in \{p'_1, \ldots, p'_{n'}\}$؛ یعنی $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq \{p'_1, \ldots, p'_{n'}\}$. به همین ترتیب $\{p'_1, \ldots, p'_{n'}\} \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}$. بنابراین $\{p_1, \cdots, p_n\} = \{p'_1, \ldots, p'_n\}$. ■

تعریف ۱.۲.۷. فرض کنیم M یک R ـ مدول قابل نمایش باشد و $M = S_1 + \ldots + S_n$ یک نمایش مینیمال آن باشد که در آن S_i ها p_i ـ ثانویه‌اند. در اینصورت مجموعه n عضوی $\{p_1, \ldots, p_n\}$ را که مستقل از انتخاب نمایش ثانویه مینیمال M است مجموعه *ایده‌آل‌های اول چسبیده* M[1] می‌گوییم و با $\mathrm{Att}_R M$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۸. فرض کنیم M یک R ـ مدول قابل نمایش باشد و $p \in \mathrm{Spec}(R)$. در اینصورت $p \in \mathrm{Att}_R M$ اگر و فقط اگر تصویر هومرفیکی از M موجود باشد که پوچساز آن برابر p است.

[1] *The set of attached prime ideals of M*