بسم الله الرحمن الرحیم

محاسبه ی عددیِ ظرفیت یک خازن گرد مسطح با برآمدگَیِ نیم کره در مرکز آن

زهرا قناد

۲۸ تیر ۱۳۹۱

تقدیم به ساحت مقدس امام

زمان(عج)

شهدای گرانقدر

و

پدر و مادر عزیزم

ت

قدردانی و تشکر

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد عزیزم "دکتر شریعتی" که با کرامتی چون خورشید ، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی های کار ساز و سازنده بارور ساختند ؛ تقدیر و تشکر نمایم.

شماروشنایی بخش تاریکی جان هستی و ظلمت اندیشه را نور می بخشی. چگونه سپاس گویم مهربانی و لطف شما را که سرشار از عشق و یقین است. چگونه سپاس گویم تأثیر علم آموزی شما را که چراغ روشن هدایت را بر کلبه ی محقر وجودم فروزان ساخته است. آری در مقابل این همه عظمت و شکوه شما، مرا نه توان سپاس است و نه کلام وصف.

همچنین از استادِ مشاورم "دکتر حکیمی پژوه " کمال تشکر را دارم که همواره با رویی گشاده و روحیه ای شاد زمینه ی ارتقاء ذهنی من و تمام دانشجویان را فراهم می آورند.

لازم می دانم از دکتر فتح اللهی به خاطر تمام زحماتی که برای من کشیدند تشکر کنم. استادی متعهد، دلسوز و مهربان که با نیروی ایمان همیشه ره گشای مشکلات دانشجویان می باشند. امید است که خداوند در پناه خویش این عزیزان را حافظ و نگهدار باشد.

چکیده

در این پژوهش، ظرفیتِ یک خازنِ دایره ای با برآمدگیِ نیم کره در مرکز یکی از صفحاتِ آن به روشِ اجزاء محدود محاسبه شده است. در حالت کلی برای محاسبه ی ظرفیتِ یک خازن با استفاده از این روش، ابتدا ناحیه ی بین صفحات، مش بندی شده سپس با کمینه کردنِ تابعیِ مربوط به معادله ی لاپلاس و حلِ معادلات حاصل، پتانسیل را در تمامیِ گره هایِ موجود در مش در فضایِ بین صفحات خازن به دست آورده سپس با استفاده از این پتانسیل و همچنین محاسبه ی ماتریسِ ضرایبِ المان، انرژیِ کلِ خازن محاسبه شده و با داشتنِ این انرژی و اختلاف پتانسیل بین صفحات، ظرفیتِ خازن محاسبه می شود. این مراحل، ابتدا در دو بعد برای یک خطِ انتقال با سطحِ مقطع مربعی به کار گرفته شده است. سپس مسئله ی اصلیِ پژوهش در سه بعد با استفاده از نرم افزار انسیس حل شده است. نرم افزار انسیس نرم افزاری جامع برایِ حلِ انواعِ مسائلِ فیزیک و مهندسی است و اساسِ کار آن روشِ اجزاء محدود می باشد. هندسه ی مسئله ی مورد نظر در این پژوهش، ابتدا در این نرم افزار مدل می شود سپس با انتخاب المان مناسب، مش بندی شده و پس از اعمال شرایطِ مرزی، پتانسیل در تک تکِ گره هایِ بین صفحاتِ خازن محاسبه می شود در انتها برای بررسی صحتِ نتایج، ظرفیتِ این خازن با فرمولِ ظرفیتِ خازنِ دایره ای در فاصله ی صفحاتِ کم، مقایسه و درستیِ آن اثبات می شود.

کلمات کلیدی: روش اجزاء محدود-خازن-نرم افزار انسیس-معادله ی لاپلاس-ظرفیت

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست شکلها

فصل ۱

کلیات پژوهش

۱.۱ طرح مسئله

معادله ی لاپلاس، معادله ای دیفرانسیلی با مشتقات جزئی است که اهمیت و کاربرد فراوانی در ریاضیات، فیزیک و مهندسی دارد. به عنوان مثال به زمینه هایی چون الکترومغناطیس(برای محاسبه ی پتانسیل)، انتقال حرارت(تعیین توزیع دمای جسم) و دینامیک سیالات(تعیین توزیع سرعت سیال)می توان اشاره کرد. یکی از کاربردهای مهم این معادله در حوزه ی الکترومغناطیس، محاسبه ی ظرفیت خازن های واقعی می باشد. خازن المانی الکتریکی است که در مدارهای الکترونیکی به کار می رود و می تواند انرژی الکتریکی را در خود ذخیره کند. خازن هایی که در مسائل فیزیک بررسی می شوند، خازن هایی کاملاً ایده آل هستند، یعنی خازن هایی با صفحات بسیار بزرگ و فاصله ی صفحات کم، طوری که بتوان از فریز شدن خطوط میدان الکتریکی (Fringing) یا همان آثار لبه چشم پوشی کرد. در چنین حالتی، میدان الکتریکی به دور از لبه ها کاملاً یکنواخت است و ظرفیت خازن از فرمول $C = \frac{\epsilon A}{d}$ به دست می آید که در آن A ، مساحت هر یک از صفحات خازن، d فاصله ی صفحات از هم وϵ ضریب گذردهی الکتریکی دی الکتریکِ بین صفحات می باشد. اما خازن هایی که در عمل با آنها رو به رو می شویم خازن هایی هستند با صفحات محدود که آثار لبه در آنها اهمیت می یابد. هنگامی که شکل صفحات، نامسطح و اثرات لبه موثر واقع می شود، فرمول نام برده ظرفیت دقیق را نمی دهد و برای محاسبه ی ظرفیت دقیق، آثار لبه و همچنین تغییر خطوط میدان الکتریکی به علت

نامسطح بودن صفحات، باید منظور شود. از آنجایی که محاسبه ی ظرفیت چنین خازن هایی با شکل های هندسی خاص با استفاده از روش های تحلیلی مشکل و یا در مواردی غیر ممکن است لذا باید به روش های عددی برای محاسبه ی ظرفیت روی آورد.

۲.۱ روش پژوهش

در این پژوهش از روش اجزاء محدود به کمک نرم افزار انسیس استفاده شده است و برنامه های موجود، به زبانِ فرترن۹۰ نوشته شده است.

۳.۱ اهداف پژوهش

هدف اصلی این پژوهش، محاسبه ی ظرفیت یک خازن واقعی هنگامی که شکل صفحه ی آن نامسطح و آثار لبه پدیدار می شود، با استفاده از روش عددی اجزاء محدود می باشد. اهدافی که در پیشبرد این پژوهش به منظور دستیابی به هدف اصلی این پژوهش سهیم بوده به شرح زیر می باشد:

۱-آشنایی با چگونگی راه های حل عددی معادله ی لاپلاس

۲-حل معادله ی لاپلاس برای یک شرط مرزی خاص

۴.۱ پیشینه ی پژوهش

آثار لبه در خازن های واقعی، موضوعی است که از مدت ها پیش مورد توجه پژوهشگران و محققان در عرصه ی فیزیک و مهندسی برق قرار گرفته است. پژوهش های زیادی در این زمینه صورت گرفته است که از میان آنها می توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱-در سال ۱۹۴۹ فردی به نام لاو (E.R.Love) توانست فرمولی برای محاسبه ی پتانسیل در تمام نقاط از فضای بین صفحات خازنی دایره ای، به دست آوَرد.

۲-در سال ۱۹۸۵ کُرل (T.R.Corle) و بارلت (D.F.Bartlett) حلی عددی را با استفاده از روش تکرار برای محاسبه ی پتانسیل در تمام نقاط از فضای بین صفحات خازن دایره ای به

انضمام آثار لبه، پیشنهاد کردند.

۳- در سال ۱۹۸۰ کنگ (J.A.Kong) و چو (W.C.Chew) از مؤسسه ی تکنولوژی ماساچوست با استفاده از رویکرد معادلات انتگرالی، فرمولی مجانبی برای ظرفیت خازن هایی با صفحات دایره ای یکسان و هم محور و هم چنین نوار های موازی نامتناهی که توسط شکاف دی الکتریک از هم جدا شده اند، به دست آوردند.

۵.۱ ضرورت پژوهش

همیشه در مسائل فیزیک، خازن را ایده آل در نظر می گیریم یعنی خازنی با صفحات موازیِ طویل به طوریکه میدان الکتریکی بین صفحات یکنواخت باشد و در نتیجه بتوان از سهم لبه ی صفحات خازن در میدان الکتریکی و ظرفیت خازن، چشم پوشی کرد. اما در دنیای واقعی، خازن ها، صفحاتی با شکل دلخواه و اندازه ای محدود دارند به طوریکه برای داشتن ظرفیتی دقیق به طور قطع نمی توان از سهم لبه ها صرف نظر کرد. همچنین خازن با صفحات دلخواه، کاربردهای صنعتی گوناگونی دارد که عبارتند از: خطوط انتقال مخابرات، بدنه ی فضاپیماها، حسگر های خازنی و ... که در همه ی این کاربردها دانستن ظرفیت درست و دقیق، فوق العاده اهمیت پیدا می کند.

فصل ۲

روش های عددی رایج در مسائل الکترومغناطیس

۱.۲ مقدمه

معادلات موجود در مسائل الکترومغناطیسی، می توانند از نوع دیفرانسیلی، انتگرالی و یا دیفرانسیلی-انتگرالی باشند. این معادلات در حالت کلی به صورت رابطه ی عملگریِ زیر بیان می شوند:

$$L\phi = g \tag{۲.۱}$$

که در آن L یک عملگر دیفرانسیلی، انتگرالی و یا دیفرانسیلی- انتگرالی می باشد. g به چشمه معروف است و Φ تابع مجهولی است که باید تعیین شود. برای مثال معادله ی پواسون (Poisson Equation) را در نظر بگیرید که به شکل زیر است:

$$-\bigtriangledown^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon} \tag{۲.۲}$$

که در آن $L = -\bigtriangledown^2$ عملگر لاپلاسی است و $g = \frac{\rho}{\epsilon}$ چشمه است و ϕ پتانسیل الکتریکی است.

روش های عددی متنوعی برای حل این معادلات وجود دارد که رایج ترین آنها به شرح زیر می باشد:

۱-روش تفاضل محدود (Finite Difference Method)

۲- روش ممان (Method of Moment)

۳-روش اجزاء محدود (Finite Element Method)

حال به اختصار به شرح هر کدام از این روش ها می پردازیم.

۱.۱.۲ روش تفاضل محدود یا به اختصار FDM

این روش، یکی از ساده ترین روش های عددی برای حل مسائل الکترومغناطیسی است و اولین بار توسط تام A.Thom در سال ۱۹۲۰ تحت عنوان روش مربعات برای حل معادلات هیدرودینامیکیِ غیر خطی مطرح شد. اساس این روش مبتنی برتبدیل معادله ی دیفرانسیل به یک معادله ی تفاضلی می باشد. در روش مذکور، ناحیه ی مورد نظر در مسئله به تعدادی زیر ناحیه ی مربعی تقسیم می شود و سپس بسط سری تیلورِ تابع مجهول، حول نقاط مرکزیِ این نواحی مربعی نوشته می شود. بعد از آن از جملات مرتبه ی دوم یا مرتبه ی سوم به بالا(بسته به نوع دقتی که می خواهیم به دست آوریم)صرف نظر می شود و بدین ترتیب تغییرات پیوسته ی تابع بر حسب مکان و زمان تبدیل به نوعی تغییرات گسسته می شود. با نوشتن بسط مذکور برای همه ی نقاط موجود در ناحیه ی مورد نظر، مجموعه ای از معادلات جبری، حاصل شده که به آسانی با استفاده از روش های عددیِ موجود برای حل دستگاه معادلات همزمان(که بعداً در همین فصل بیان می شود)قابل حل می باشد. این روش به طور خلاصه شامل سه مرحله ی اصلی زیر است:

۱-تقسیم بندی ناحیه ی مورد تحلیلِ مسئله به تعدادی زیر ناحیه ی کوچک

۲-تقریب زدن معادلات دیفرانسیلیِ مفروض توسط معادلاتِ تفاضلیِ هم ارز

۳-حلِ معادلاتِ تفاضلیِ به دست آمده با استفاده از شرایطِ مرزیِ تعیین شده و شرایطِ اولیه

۲.۱.۲ روش ممان یا به اختصار MOM

این روش ابتدا توسطِ ریچموند (Richmond) در سال ۱۹۶۵ و هرینگتون (Harrington) در سال ۱۹۶۷ مطرح شد و شامل چهار مرحله ی اصلی زیر است:

۱-به دست آوردنِ معادله ی انتگرالیِ مناسب

یکی از راه های به دست آوردنِ معادله ی انتگرالیِ مناسب از یک معادله ی دیفرانسیلی، ساختن تابع گرین، برای این نوع مسائل است. تابع گرین، ارتباط اصلی بین فرمول بندیِ انتگرالی و دیفرانسیلی را بیان می کند. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به مرجعِ [7] مراجعه کنید.

۲- گسسته سازی این معادله به معادله ی ماتریسی

۳- محاسبه ی عناصر ماتریس

۴- حل معادله ی ماتریسی و به دست آوردنِ پارامتر های مطلوب

۳.۱.۲ روش اجزاء محدود یا به اختصار FEM

این روش که در این پژوهش از آن استفاده شده است یکی از مؤثرترین و پرکاربرد ترین روش های عددی است و بر اساس اصل وردشی که در ادامه به آن خواهیم پرداخت، بیان می شود. این روش شاملِ چهار مرحله ی اصلی است که در فصل سوم به طور کامل به آن پرداخته می شود. در زیر دو جدولِ مقایسه ی روشِ FEM با هر کدام از روش هایِ FDM و MOM آمده است که چند نمونه از مزیت های این روش و همچنین علت استفاده از آن را در این پژوهش روشن می سازد.

روش FDM	روش FEM
تنها از المان مربعی استفاده می کند	هر نوع المان دلخواهی را به کار می بَرد
با تعداد زیادی گره،جواب دقیق می دهد	با تعداد معینی گره، جواب دقیق می دهد
فضای حافظه ی زیادی را اِشغال می کند	فضای حافظه ی کمی را اِشغال می کند
زمان اجرای برنامه، طولانی تر است	زمان اجرای برنامه، کوتاه تر است

جدول ۱.۲: مقایسه ی بین روش های FDM,FEM

توضیح: به زیر نواحیِ کوچک در تقسیم بندیِ ناحیه ی موردِ تحلیلِ مسئله، المان (Element) گفته می شود و نقاط اتصالِ المان ها به یکدیگر، گره (Node) نامیده می شود.

روش MOM	روش FEM
برای معادلات انتگرالی مناسب است	برای معادلات دیفرانسیلی مناسب است
نیاز به ساختنِ تابع گرین دارد	نیاز به ساختنِ تابع گرین ندارد
برای مسائلِ غیر خطی مشکل است	برای تمام مسائلِ غیر خطی آسان است

جدول ۲.۲: مقایسه ی بین روش های MOM,FEM

۲.۲ حسابِ وردش ها

همان طور که در بخش پیش گفته شد، روش FEM بر اساس استفاده از اصل وردشی، مسائل را حل می کند، در این روش باید ابتدا تابعیِ (Functional) مربوط به معادله ی دیفرانسیلی مفروض (در اینجا، معادله ی لاپلاس) به دست آید، سپس این تابعی، اکسترمم شود (در اینجا، کمینه شود) تا از رویِ معادلات جبری به دست آمده، تابع مجهولِ ϕ (در اینجا، پتانسیل) به دست آید. اینکه چگونه از روی معادلات دیفرانسیلی مفروض، تابعیِ مورد نظر به دست می آید، مسئله ای است که به حسابِ وردش ها مربوط می شود و در ادامه به آن می پردازیم.

در حساب وردش ها با مسائلی سر و کار داریم که در آن ها کمیتی که باید کمینه (یا بیشینه) شود، به صورت یک انتگرال ظاهر می شود. به عنوان ساده ترین حالت، انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{۲.۳}$$

که در آن، انتگرالدهِ F(x،y،y') ، تابعِ $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$ است. مسئله ی اصلیِ حساب وردش ها، یافتن تابع y(x) است به طوری که تابعیِ I[y] تحت شرایط مرزی زیر پایا شود.

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \tag{۲.۴}$$

منظور از مقادیر پایای I[y] ، کمینه ها، بیشینه ها و نقاط زینی است اما در اکثر مواردی که در فیزیک با آنها سروکار داریم، این مقدار پایا همان مقدار کمینه است. قبل از حل این مسئله، لازم است که عملگر δ را که نماد وردشی نام دارد، معرفی کنیم. وردش δy از تابع y(x) ، تغییر

بی نهایت کوچک در y ، به ازای یک مقدار ثابت از متغیر مستقل x است. به دلیل تغییر در y تغییری متناظر در F به وجود می آید که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \qquad (۲.۵)$$

عملگر δ مشابه با یک عملگر دیفرانسیلی است، بنابراین اگر $F_1 = F_1(y), F_2 = F_2(y)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\delta(F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2 \qquad (۲.۶)$$

$$\delta(F_1\, F_2) = F_2\, \delta F_1 + F_1\, \delta F_2 \qquad (۲.۷)$$

$$\delta(\frac{F_1}{F_2}) = \frac{F_2\, \delta F_1 - F_1\, \delta F_2}{F_2^2} \qquad (۲.۸)$$

$$\delta(F_1)^n = n\,(F_1)^{n-1}\, \delta F_1 \qquad (۲.۹)$$

$$\frac{d}{dx}(\delta y) = \delta(\frac{dy}{dx}) \qquad (۲.۱۰)$$

$$\delta \int_a^b y(x)\, dx = \int_a^b \delta y(x)\, dx \qquad (۲.۱۱)$$

شرط لازم برای اینکه تابعی I[y] اکسترمم داشته باشد این است که وردش آن مساوی صفر شود یعنی $\delta I = 0$ ، برای این منظور، فرض کنید h(x) یك افزایش در y(x) باشد، برای اینکه معادله ی(۲.۴)، توسط y(x)+h(x) ارضا شود، باید

$$h(a) = h(b) = 0 \qquad (۲.۱۲)$$

افزایش متناظر در I در معادله ی (۲.۳)، به شکل زیر است:

$$\Delta I = I[y+h] - I[y] = \int_a^b \left[F(x, y+h, y'+h') - F(x,y,y')\right]\, dx \qquad (۲.۱۳)$$

با به کار بردن بسط تیلور داریم:

$$\Delta I = \int_a^b \left[F_y(x,y,y')\, h + F_{y'}(x,y,y')\, h'\right]\, dx + \cdots = \delta I + O(h^2) \qquad (۲.۱۴)$$

که در آن، $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$ و $\delta I = \int_a^b \left[F_y(x,y,y')\, h + F_{y'}(x,y,y')\, h'\right]\, dx$ می باشد.

با انتگرال گیری جزء به جزء برای جمله ی دوم در انتگرال داریم:

$$\int_a^b F_{y'}(x,y,y')\,h'\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\,\frac{dh}{dx}\,dx = h(x)\,\frac{\partial F}{\partial y'}|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b h(x)\,\frac{d}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial y'}\,dx \qquad (۲.۱۵)$$

جمله ی اول در عبارت بالا به دلیل شرط $h(a) = h(b) = 0$ در روی مرز، صفر می شود و در نتیجه داریم:

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\,h(x)\,dx \qquad (۲.۱۶)$$

حال برای اینکه $\delta I = 0$ شود، باید انتگرالده مساوی با صفر شود یعنی

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad (۲.۱۷)$$

که این معادله، معادله ی اویلر (Euler Equation) یا اویلر-لاگرانژ (Euler-Lagrange Equation) نام دارد. پس شرط لازم برای اینکه I[y] ، اکسترمم داشته باشد این است که تابع F(y) در معادله ی اویلر صدق کند. ایده ی بالا برای حالتی بود که تنها یک متغیر وابسته ی y و یک متغیر مستقل x داشته باشیم، اما این ایده به راحتی قابل بسط برای مواردی است که بیش از یک متغیر مستقل و وابسته داشته باشیم که به آن نمی پردازیم.

۳.۲ ساختن تابعی از معادلات دیفرانسیلی جزئی (PDE)

در بخش قبل، دیدیم که معادله ی اویلر، یک معادله ی دیفرانسیلی متناظرِ حاکم بر یک تابعیِ مفروض را تولید می کند. در این بخش رویه ی عکس را دنبال می کنیم یعنی ساختنِ تابعی برای یک معادله ی دیفرانسیلی مفروض. دستور العمل برای یافتن تابعی مربوط به یک معادله ی دیفرانسیل، شامل چهار مرحله ی اساسی زیر است:

۱-ضرب معادله ی عملگری $L\phi = g$ در وردشِ $\delta\phi$ از متغیر وابسته ی ϕ و انتگرال گیری روی ناحیه یِ مورد نظر در مسئله

۲-استفاده از قضیه ی دیورژانس یا انتگرال گیریِ جزء به جزء برایِ تبدیل مشتق به وردشِ $\delta\phi$

۳-بیرون آوردنِ عملگروردشِ δ از داخل انتگرال ها.

۴-اعمال شرایط مرزی

این دستورالعمل با یک مثال در زیر، نشان داده می شود.

فرض کنید می خواهیم تابعی مربوط به معادله ی پواسون را به دست آوریم.معادله ی پواسون به صورت زیر است:

$$\nabla^2\phi = -f(x,y)$$

با انجام مرحله ی اول داریم:

$$\delta I = \iint \left[-\nabla^2\phi - f\right]\,\delta\phi\,dx\,dy = -\iint \left(\nabla^2\phi\right)\,\delta\phi\,dx\,dy - \iint f\,\delta\phi\,dx\,dy$$

حال مرحله ی دوم را اعمال می کنیم، برای انتگرال گیری جزء به جزء، تغییر متغیرهای زیر را انجام می دهیم:

$$u = \delta\phi \quad , \quad dv = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx$$

به طوری که

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad , \quad du = \frac{\partial}{\partial x}\,\delta\phi\,dx$$

در نتیجه داریم:

$$-\int\left[\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\,\delta\phi\,dx\right]dy = -\int\left[\delta\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial x} - \int\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\delta\phi\,dx\right]dy$$

بنابراین

$$\delta I = \iint\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\delta\phi + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\delta\phi - \delta f\phi\right]dx\,dy - \int \delta\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,dy - \int \delta\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,dx$$

حالا مرحله ی سوم را اعمال می کنیم:

$$\delta I = \frac{\delta}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - 2f\phi\right]dx\,dy - \delta\int\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,dy - \delta\int\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,dx$$