دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

تجزیه و تحلیلی از دستگاه معادلات شکار-شکارچی هاروست‌شده

توسط:

فرانک حقیقی‌فر

استاد راهنما:

دکتر محمدحسین رحمانی‌دوست

استاد مشاور:

دکتر منصور سراج

بهمن ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

به‌نام خدا

تجزیه و تحلیل دستگاه معادلات شکار-شکارچی هاروست‌شده

توسط:

فرانک حقیقی‌فر

پایان‌نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته:

ریاضی محض

از دانشگاه ایلام

ایلام

جمهوری اسلامی ایران

در تاریخ ۸۹/۱۱/۱۲ توسط هیأت داوران زیر ارزیابی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

دکتر محمدحسین رحمانی‌دوست، استادیار رشته ریاضی(راهنما و رییس هیأت داوران)..

دکتر منصور سراج، استادیار رشته ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز(مشاور)..

دکتر رضا جلیلیان، استادیار رشته ریاضی(داور)..

دکتر علی فرج‌زاده، دانشیار رشته ریاضی دانشگاه رازی کرمانشاه(داور)..

بهمن ۱۳۸۹

عسی ان تکرهوا شیئا و هو خیر لکم و عسی ان تحب شیئا و هو شر لکم و الله ُ یعلم و انتم لاتعلمون(قران کریم).

الهی چه بی صدا و بی منت می بخشی و ما چه حسابگرانه تسبیح می گوییم.

پروردگارا از من بگیر هر آنچه را که تو را از من می گیرد و به مقام قربت خود نزدیکم گردان

و شکر و سپاسگذاریت به من بیاموز.

ای همه هستی من، مرا به قسمت مقدر خود خوشنود ساز و در هر حال متواضع گردان

و نگذار آرزوهای دور و دراز دنیوی و غرور نفس مرا بفریبند و تمام اوقاتم را در شب و روز

به یاد خود تجلی بخش تا کردارم همه یک جهت و خالص برای رضای تو باشد.

پدرم روضه ی رضوان به دو گندم بفروخت   من چرا ملک جهان را به جوی نفروشم

الهم اجعل لی فی قلبی نورا" و بصرا" و فهما" و علما" انک علی کل شی قدیر

این دست نوشته تقدیم به:

پدر با استقامت تر از کوهم که برای مهربانی هایش پاسخی جز دوست داشتن ندارم

دریای محبت مادرم که صدای گرمش همواره نوید بخش امید بود برای قربت ساختن پنج سال و نیم غربت عزیز غریبش

برادران عزیزم مالک، محسن و حجت که خداوند هرگز از من نگیرد تکیه گاه محبتشان را

و پدر بزرگ و مادر بزرگ عزیزم که دعای خیرشان همیشه بدرقه ی راه من است.

سپاس و قدردانی

سپاس و ستایش خداوند بزرگی را که همواره الطاف بی‌کران را به بندگانش نثار می‌کند و سلام بر چهارده دریای علم ومعرفت. اکنون که به یاری خداوند بزرگ نگارش این رساله به پایان رسیده است، پس از حمد وثنای خداوند متعال، که هر چه دارم همه از لطف و رحمت اوست، بر خود فرض می‌دانم که از تمامی کسانی که مرا در انجام این رساله یاری رساندند، تشکر نمایم. مخصوصا″ از راهنمایی‌های بی‌دریغ و متواضعانه‌ی استاد راهنمای ارجمند جناب آقای دکتر رحمانی‌دوست که همواره با سعه‌ی صدر مشکلات اینجانب را رفع نمودند و با اعمال نظرات خود به هر چه بهتر نگاشته شدن این رساله کمک کردند و مزاحمت‌های گاه و بیگاه بنده را تحمل نمودند، صمیمانه قدردانی وتشکر می‌نمایم.

ادب بر من حکم می‌کند از مدیر محترم گروه جناب آقای الماسی، اساتید ارجمندم سرکار خانم دکتر غیاثی و جناب آقای دکتر ساری‌زاده و نیز از آقای غلامی به خاطر مزاحمت‌هایم تشکر و قدردانی می‌کنم و همچنین از کارکنان دفتر نظارت و ارزیابی دانشگاه(همکاران دکتر رحمانی-دوست) به دلیل کمک‌های بی‌شاعبه و مزاحمت‌هایم سپاسگذارم.

در پایان از مشاور محترم جناب آقای دکتر سراج و نیز از اساتید گرامی جناب آقای دکتر جلیلیان و جناب آقای دکتر فرج‌زاده که زحمت داوری پایان نامه را بر عهده گرفتند و با اعمال نظرات به هر چه بهتر شدن رساله کمک کردند، تشکر می‌نمایم.

گمان مبر که به پایان رسیده کار مغان   *هزار باده‌ی نخورده در رگ تاک است*

چکیده:

مطالعه و بررسی دستگاه معادلات دیفرانسیل در تحلیل و پیش‌بینی گذشته و آینده با داشتن اطلاعات و داده-های زمان حال یک سیستم دینامیکی به ویژه در اکولوژی و زیست شناسی کاربرد فراوان دارد. در پایان نامه حاضر به مدل‌های شکار–شکارچی زمانی که عامل هاروست وجود دارد، تمرکز می کنیم.

در فصل اول به بیان مفاهیم و قضایای مورد نیاز فصل‌های بعدی رساله پرداخته می‌شود. چون دستگاه معادلات این رساله خودگردان و در دو بعد در نظر گرفته شده‌اند سعی بر آن بوده که در این فصل دستگاه‌های دو بعدی خودگردان بیشتر مورد مطالعه قرار گیرند. از آنجایی که سراسری پایدار بودن دستگاه‌ها به وفور در فصل‌های بعدی مورد مطالعه قرار می‌گیرد، معرفی تابع لیاپانوف بخشی از این فصل را تشکیل می‌دهد.

فصل دوم به معرفی اکولوژی جمعیتی، آشنایی با انواع نرخ رشد و بیان تاریخچه‌ای از معروف‌ترین مدل‌های مدل‌بندی شده در زمینه‌ی شکار و شکارچی از جمله مدل‌های مشهور گاوس، کلموگروف، روزن وای–مک آرتر و هالینگ اختصاص دارد.

فصل سوم را مدل لوکتا–ولترا، به عنوان پایه و اساس مدل‌های شکار–شکارچی، تشکیل می‌دهد. در این فصل پس از معرفی مدل، به دلیل اهمیت ویژه‌ی آن از دو روش خطی‌سازی و تابع لیاپانوف مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

فصل آخر به نتیجه‌گیری اختصاص دارد. در این فصل به مدل‌بندی مدل‌های شکار–شکارچی هاروست‌شده‌ای از دستگاه معادلات لوکتا–ولترا، دستگاه معادلات لوکتا–ولترا با رقابت درون‌گروهی و نیز دستگاه معادلات لوکتا–ولترا با همزیستی درون‌گروهی برای گونه‌ی شکار و رقابت درون‌گروهی برای گونه‌ی شکارچی و نیز تجزیه و تحلیل این مدل‌ها از لحاظ ریاضی پرداخته می‌شود.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست اصطلاحات اختصاری:

دستگاه= **دستگاه معادلات دیفرانسیل**

معادلات= **معادلات دیفرانسیل معمولی**

رشد= **نرخ رشد**

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱-۱-مقدمه

در این فصل یک سری تعاریف، مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارائه می‌شوند. هرچند که اصطلاحات و تعاریف استاندارد بوده و معمولاً در اکثر کتاب‌های معادلات دیفرانسیل معمولی[۱] یا سیستم‌های دینامیکی[۲] یافت می‌شوند.

ابتدا مفهوم اکولوژی جمعیتی[۳] و پویایی جمعیتی[۴] بیان می‌شود. سپس دستگاه‌های غیر خطی[۵] و مفاهیم مربوطه ارائه می‌گردند و پس از آن مفهوم پایداری بیان و سپس نقاط تعادلی[۶] از لحاظ پایداری[۷] طبقه‌بندی گردیده و تصویری از انواع نقطه تعادلی از لحاظ پایداری در یک شکل واحد، برای آشکار شدن تفاوت‌ها، ارائه می‌گردد. پس از آن نیز مفاهیم خطی سازی[۸] بیان می‌شود و برای واضح‌تر شدن مطلب، خطی‌سازی دستگاه دو بعدی غیر خطی نیز مورد بحث قرار می‌گیرد. سپس مفاهیم تناوب و دور حدی ارائه می‌گردند. در انتها تابع لیاپانوف[۹] و نیز قضایای مورد استفاده‌ی آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

با توجه به اینکه، در این رساله دستگاه‌های خودگردان[۱۰] مورد بررسی قرار می‌گیرند، تمام تعاریف مگر در حالاتی که صریحاً بیان شود، بر این نوع از دستگاه‌ها بنا شده است(مفهوم خودگردان در ادامه بیان می‌شود).

اصطلاحات، تعاریف و قضایای مورد نیاز این رساله از منابع معتبر زیر استخراج گردیده‌اند:

---

۱ Ordinary Differential Equations
۲ Dynamical Systems
۳ Population Ecology
۴ Dynamic Population
۵ Nonlinear Systems
۶ Equilibrium Point
۷ Stability
۸ Linearization
۹ Lyapunov Function
۱۰ Autonomous Systems

برآور-کاستلوچاوز[1][۲۳]، میلر-مایکل[2][۱۱۵]، ادوارد-پنی[3][٥٤]، کودینگتون[4][۳٤]، پرکو[5][۱۲٥]، پرکو[5][۱۲٥]، گلندینینگ[6][٦٨]، موهانارو[7][۱۱۸]، گیزل[8][٦٦] و اس‌زگو-بی‌هاتیا[9][۱۹].

۱-۲-اکولوژی جمعیتی

دانشمندان همواره به مباحث اکولوژیک علاقه‌مند بوده‌اند. آن‌ها درصدد یافتن راه‌هایی برای استفاده بهینه و مداوم منابع هستند، به گونه‌ای که نه تعادل طبیعی محیط از بین برود و نه زندگی انسان‌ها در نبود منابع دشوار گردد.

۱-۲-۱-پویایی جمعیت

مباحث اکولوژیکی در رابطه با روابط بین موجودات زنده و محیط زیست آن‌ها و همچنین شامل روابط بین گونه های متفاوت است، که معمولاً در سه سطح زیر از اکولوژی بررسی می-گردند[٨٤]:

الف) اکولوژی فیزیکی ۱۰

اکولوژی فیزیکی رابطه‌ی بین افراد و محیط زیست آن‌ها را بررسی می‌کند. به عنوان نمونه، تأثیر فاکتوری مانند: دما، یا فراوانی غذا بر متابولیزم[11](دگرگونی) و رفتار موجودات زنده را بررسی می‌کند.

ب) اکولوژی جمعیتی

در اکولوژی جمعیتی اهمیت رشد و روابط داخلی جمعیت مورد مطالعه است.

به عنوان نمونه، ساختار متغیرهایی چون تعداد مقطوع حشرات و گونه‌های پرندگانی که با آن‌ها زندگی می‌کنند، را در زمان و فضایی خاص بررسی می‌کند.

ج) مطالعه‌ی اکوسیستم ۱۲

---

۱ Brauer-Castillo Chaves
۲ Miller-Michel
۳ Edwards-Penny
٤ Codington
٥ Perko
٦ Glendinning
۷ Mohana Roe
۸ Giesl
۹ Bhatia-Szego
۱۰ Metabolism
۱۱ Physiological Ecology
۱۲ The Study of Ecosystem

مباحث جامعه و محیط زیست موجود در مطالعه‌ی اکوسیستم بررسی می‌گردند.

بعنوان نمونه: بیابان‌ها، دریاچه‌ها، تپه‌های مرجانی یا جنگل‌های استوایی در این مطالعه مورد بحث قرار می‌گیرند.

۱-۳-دستگاه غیر خطی

مجموعه‌ای از معادلات غیر خطی[۱] که به فرم: جبری[۲]، تفاضلی[۳]، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی[۴]، معادلات دیفرانسیل انتگرالی[۵] و یا ترکیبی از موارد فوق باشد، را یک دستگاه غیر خطی نامند.

از آنجایی که دستگاه‌های غیر خطی برای توصیف بسیاری از پدیده‌های زندگی از جمله: در علوم فیزیک، زمین شناسی، شیمی، زیست و... به کار رفته‌اند، بسیار مهم می‌باشند. لذا اهمیت دستگاه‌های فوق واضح می‌باشد. در این رساله دستگاه‌های مذکور در اکولوژی تحلیل می‌شوند.

سیستم‌های دینامیکی نیز مترادف با دستگاه‌های غیر خطی به کار می‌روند و سیر تکامل جواب[۶] نسبت به زمان[۷] یا متغیری مانند زمان را ارائه می‌دهند.

۱-۳-۱-دستگاه های غیر خطی از معادلات دیفرانسیل معمولی

دستگاه غیر خطی از معادلات دیفرانسیل معمولی را به صورت

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad (۱-۱)$$

نمایش می‌دهند، که در آن $x(t) = (x_۱(t), x_۲(t), x_۳(t), \dots, x_n(t))$ تابعی یک متغیره و برداری است و $f = (f_۱, f_۲, f_۳, \dots, f_n)$ تابعی چند متغیره و برداری است.

دستگاه(۱-۱) را به شکل زیر هم نمایش می‌دهند و در بعضی منابع به صورت

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (۲-۱)$$

نیز نمایش داده می‌شود:

---
۱ Nonlinear Equations
۲ Algebra
۳ Difference
۴ Partial Differential Equations
۵ Integral Differential Equations
۶ Solution
۷ Time

۱-۳-۲-مسئله مقدار اولیه [۱]

فرض کنید $x(t)$ و f همانند تعریف(۱-۳-۱) تعریف شده باشند و همچنین

دستگاه غیر خطی از معادلات دیفرانسیل معمولی $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ با مقدار اولیه[۲] $x_{\cdot} = x(t_{\cdot})$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(t_{\cdot}) = x_{\cdot} \end{cases} \qquad (۳-۱)$$

و این دستگاه مسئله مقدار اولیه نامیده می‌شود. هر جواب دستگاه غیر خطی از معادلات دیفرانسیل معمولی بر بازه ی $I \subset R$ به شکل یک بردار $x(t)$ است، که بردار $x(t)$ پیوسته[۳] و مشتق پذیر[٤] بوده و در معادله(۱-۲) صدق می‌کند. بنابراین جواب دستگاه(۱-۳) بر بازه ی $I \subset R$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

۱-۳-۳-جواب مسئله مقدار اولیه[٥]

بردار[٦] $x(t)$ یک جواب مسئله مقدار اولیه(۱-۳) نامیده می‌شود، به شرط آن که در شرایط زیر صدق کند:

الف) بردار $x(t)$ بر بازه ی $I = (a,b)$ تعریف شده باشد.

ب) $t_{\cdot} \in (a,b)$

ج) $x(t_{\cdot}) = x_{\cdot}$

---

۱ Initial Value Problem
۲ Initial Value
۳ Continuous
٤ Differentiable
٥ Solution of Initial Value Problem
٦ Vector

د) $x(t)$ بر بازه (a, b) پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

ه) $x(t)$ در دستگاه(۱-۳) صدق کند.

۱-۳-۲-۱-قضیه وجودی پئانو-کشی[۱](در حالت برداری)

فرض کنید $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots x_n(t))$ تابعی یک متغیره برداری است و $f = (f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)$ تابعی چند متغیره برداری است.

و $f(t, x)$ بر

$B =$

پیوسته باشد. همچنین اگر $M = max||f(t, x)||$ که در آن $(t, x) \in B$ و

$\alpha = min(a, {}^{b}/_{M})$ آنگاه مسئله مقدار اولیه(۱-۳) دارای جوابی چون $x(t)$ بر بازه

$t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ می‌باشد[۱۱۸].

۱-۳-٤-دستگاه خودگردان

اگر در دستگاه معادلات(۱-۲) متغیر مستقل[۲] ظاهر نگردد، یعنی دستگاه معادلات به فرم دستگاه(۱-۱) باشد، این دستگاه خودگردان نامیده می‌شود و در غیر این صورت ناخودگردان[۳] نامیده می‌شود.

واضح است که هر دستگاه ناخودگردان را می‌توان با تغییر متغیر $x_{n+1} = t$ به دستگاه جدیدی که خودگردان است، تبدیل کرد. البته باید توجه داشت، که در دستگاه $n + 1$ بعدی جدید، $f, x \in R^{n+1}$ و تمام قضایای مربوط به دستگاه خودگردان برای دستگاه جدید برقرارند.

[۱] Peano - Cauchy Existence Theorem
[۲] Independent Variable
[۳] Non Autonomous

۱-۳-۵-نرم[۱]

برای بردار $x \in R^n$ یک کمیت اسکالر به صورت زیر تعریف می‌گردد، که نرم x نامیده می-شود.

که در آن $|.|$ علامت قدر مطلق و $||.||$ علامت نرم است.

اگر $x, y \in R^n$ و $\lambda \in R$ نرم دارای خواص زیر است:

الف) $||x|| \geq ۰$

ب) $||x|| = ۰ \Leftrightarrow x = (۰, ۰, \dots, ۰)$

ج) $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$

د) $||x|| + ||y|| \geq ||x + y||$

۱-۳-٦-نقطه تعادلی[۲]

فرض کنید $x \in R^n$. نقطه $x^* \in R^n$ از دستگاه معادلات(۱-۱) را نقطه تعادلی این دستگاه نامند، هرگاه $f(x)$ در این نقطه صفر شود.

تذکر:

در برخی منابع نقطه تعادلی را نقطه بحرانی[۳]، سکون[٤] یا ثابت[٥] نیز می‌نامند[٥٤ و ۱۱۸].

۱-۳-۷-جواب تعادلی ثابت[٦]:

اگر برای هر t، $x(t) = c$ نقطه تعادلی دستگاه(۱-۱) $\frac{dx}{dt} = f(x)$ باشد، آنگاه دستگاه مذکور جواب ثابت $x(t) = c$ را داراست و اغلب این جواب، جواب تعادلی ثابت این دستگاه نامیده می‌شود.

[۱] Norm
[۲] Equilibrium Point
[۳] Critical Point
[٤] Stationary Point
[٥] Fixed Point
[٦] Constant Equilibrium Solution

تذکر:

ممکن است تصور شود، که در این حالت جمعیت ثابت باقی می‌ماند، به عبارت دیگر، اگر معادله جواب ثابت داشته باشد، جمعیت ثابت بماند، ولی این گونه نیست. بلکه این حالت بیانگر آن است، که جمعیت نسبت به محیط متعادل باقی می‌ماند.

۱-۳-۸-نقطه تعادلی منزوی[۱]

نقطه تعادلی x^* از دستگاه(۱-۲) را منزوی نامند، هرگاه یک همسایگی[۲] به مرکز x^* موجود باشد، که در آن همسایگی نقطه تعادلی دیگری موجود نباشد.

۱-۳-۹-نقطه تعادلی هذلولوی[۳]

نقطه تعادلی x^*، از دستگاه(۱-۲)، نقطه تعادلی هذلولوی نامیده می‌شود، هرگاه $\frac{df}{dx}\Big|_{x=x^*} \neq ۰$ شود و در سایر نقاط غیر هذلولوی[۴] نامیده می‌شود[۵۴].

در برخی منابع تعریف فوق به صورت زیر بیان شده است.

نقطه تعادلی دستگاه غیر خطی(۱-۲) نقطه تعادلی هذلولوی نامیده می‌شود، هرگاه قسمت حقیقی[۵] مقدار ویژه‌های ماتریس ژاکوبین آن غیر صفر[۶] باشند[۱۲۵].

۱-۳-۹-۱-قضیه:

فرض کنید، زمانی که متغیر t به سمت ∞ میل می‌کند، تمام جواب‌های معادله خطی[۷]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx}(x^*)x$$

---

[۱] Isolated Equilibrium Point
[۲] Neighborhood
[۳] Hyperbolic Equilibrium Point
[۴] Non hyperbolic
[۵] Real Part
[۶] Non zero
[۷] Linear Problem

در نقطه تعادلی x^* به صفر میل کنند، آنگاه زمانی که t به سمت ∞ میل می‌کند، تمام جواب‌های معادله غیر خطی $\frac{dx}{dt} = f(x)$ به نقطه تعادلی x^* میل می‌کنند، با شرط آن که $x(0)$ به اندازه کافی به x^* نزدیک باشد [۲۳].

۱-۳-۹-۲-قضیه[۲۳]:

نقطه تعادلی x^* از دستگاه(۱-۱) $\frac{dx}{dt} = f(x)$ پایدار مجانبی[1] است هر گاه

و ناپایدار است، هر گاه

۱-٤-پایداری

از جمله مهم‌ترین مفاهیمی که همواره دانشمندان را به تلاش و تکاپو وادار می‌کند، مفهوم پایداری است، این مفهوم از آن جهت حائز اهمیت است، که یک دستگاه پایدار یا اکوسیستمی که دستگاه معادل آن پایدار است، متعادل[2] بوده و دچار انقراض نمی‌گردد.

۱-٤-۱-پایداری جواب

اگر $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ جواب اولیه[3] دستگاه(۱-۳) و $\bar{x} = \bar{x}$ $x(t, t_0, \bar{x}_0) = \bar{x}$ جواب دلخواهی[4] از این دستگاه باشد، جواب $x(t, t_0, x_0)$ از دستگاه فوق پایدار نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $0 < \varepsilon$ دلخواه، $0 < \delta$ ی موجود باشد، بطوریکه که برای هر $t > t_0$

به عبارت دیگر

تعریف فوق بدین معناست که اگر در زمان اولیه[1] مقدار جواب اولیه و جواب دلخواهی بسیار به هم نزدیک باشند، مقدار آن‌ها در تمام طول بازه‌ی جواب به هم نزدیک باقی بماند.

---

[1] Asymptotically Stable
[2] Equivalent
[3] Initial Solution
[4] Arbitrary Solution