بسم الله الرحمن الرحیم

معیارهایی برای تک ارزی توابع محدب و ستاره گون

سامان عزیزی

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر سعید شمس

تابستان ۱۳۸۹

ایان نامه آقای : سامان عزیزی به تاریخ ۸۹/۵/۱۱ شماره ۶۶-۱۰۶۶-۲

ورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸٫۲ (به حروف هجده ممیز ۲)

رار گرفت.

- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر سعید شمس

- استاد مشاور:

- داور خارجی: دکتر رسول آقالاری

- داور داخلی: دکتر سعید استادباشی

- نمایند‌ه تحصیلات تکمیلی: دکتر حبیب اذانچیلر

زحمات شما را نمی توان جبران کرد ولی می توان سپاس داشت، با قلبی آکنده از ژرف ترین سپاسها تقدیم به :

مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

از استاد راهنمای بزرگوارم ، جناب آقای دکتر شمس که در تمام مراحل تدوین پایان نامه نهایت همکاری را با بنده داشته و زحمات زیادی را متحمل شدند صمیمانه سپاسگذارم .

همچنین لازم می دانم از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر آقالاری و آقای دکتر استاد باشی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم .

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید $\mathcal{A}$ فضای توابع تحلیلی در دیسک واحد $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$ باشرط نرمالیزه $f(۰) = f'(۰) - ۱ = ۰$ رانمایش دهد.دراین پایان نامه به مسایل زیر می پردازیم :پیداکردن شرایطی روی $\alpha \in \mathbb{C}\ (Re\alpha > -۱)$ و $\mu > ۰$ بطوریکه شرط پیروی

$$zf''(z) + \alpha f'(z) \prec \alpha + \mu z\ , \quad z \in \Delta$$

نتیجه دهد که f در Δ محدب یا ستاره گون است .به ازای برخی $\alpha \in \mathbb{C}$ با $Re\alpha \leq -۱$ تعریف می کنیم :

$$P(\alpha, \delta) = \{f \in \mathcal{A} :\ \exists\gamma; |\gamma| < \frac{\pi}{۲}\ ,\ Re\ e^{i\gamma}(f'(z) + \alpha z f''(z) - \delta) < ۰\}$$

به ازای α ی داده شده شرطی اساسی روی δ پیدامی کنیم به طوری که $f \in P(\alpha, \delta)$ در Δ تک ارز باشد بعلاوه ما در این پایان نامه چندین شرط کافی برای محدب و ستاره گون بودن پیچش $f * g$ زمانیکه f, g هردو(یایکی از آنها) به کلاس

$$\widetilde{\mathcal{R}}(\alpha, \lambda) = \{f \in \mathcal{A} :\ f'(z) + \alpha z f''(z) \prec ۱ + \lambda z\ ,\ z \in \Delta\}$$

که $\alpha \in \mathbb{C} - \{-۱\}$ با $Re\alpha \geq -۱$ متعلق باشند(باشد) را ثابت می نماییم

پیشگفتار

این پایان‌نامه در شش فصل نوشته شده است .

در فصل اول مطالب مورد نیاز برای فصول بعدی آورده شده است،که شامل دو بخش است.دربخش اول تعاریف و قضایای مقدماتی ازجمله لم شوارتز را بیان می کنیم.دربخش دوم ابتدا توابع تک ارز راتعریف کرده سپس به بیان قضایای مهمی دراین زمینه می پردازیم و درادامه ی این بخش توابع محدب،ستاره گون و نزدیک به محدب راتعریف می کنیم و قضایای مهمی رادر این زمینه بیان می کنیم

فصل دوم شامل سه بخش است.دربخش اول ضرب پیچشی راتعریف کرده،خواص مهمی از آن رابیان می کنیم و چند لم و قضیه را در این زمینه بیان و ثابت می کنیم. در بخش دوم دوگان ضرب پیچشی رابیان کرده و لم مهمی از آن راثابت می کنیم.دربخش سوم مفهوم پیروی دیفرانسیلی را تعریف می کنیم سپس قضایای مربوط به این مفهوم رابیان می کنیم

فصل سوم شامل یک بخش است دراین بخش ابتداچند کلاس خاص از توابع تحلیلی را تعریف کرده و سپس با آوردن چند لم مقدماتی ، به بیان و اثبات یک نتیجه و یک قضیه مهم که در اثبات دولم اصلی این پایان نامه از آنها استفاده شده است می پردازیم و در انتهانیز قضیه ای رابیان می کنیم که دراثبات یکی از قضایای بخش سوم فصل چهارم از آن استفاده شده است .

فصل چهارم در سه بخش نوشته شده است .دربخش اول ابتدا کلاس $\widetilde{\mathcal{R}}(\alpha,\lambda)$ راتعریف کرده وسپس دو لم اصلی و مهم رابیان وثابت می کنیم و در پایان این بخش یک قضیه و نتیجه مهم رادرارتباط با کلاس $\widetilde{\mathcal{R}}(\alpha,\lambda)$ بیان و ثابت می کنیم . دربخش دوم این فصل مسأ له ای راکه $ponnusamy$ و $singh$ در مقاله‌شان آورده اند را بیان می کنیم و به بیان واثبات قضایاونتایجی می پردازیم که جوابهای متفاوتی به این مسأ له می دهد.در بخش سوم کلاس $P(\alpha,\delta)$ راتعریف کرده و قضایایی رادر

ارتباط با این کلاس بیان و ثبات می نماییم هدف اصلی این بخش پیداکردن شرطی اساسی روی δ است به طوری که $f \in P(\alpha, \delta)$ درΔ تک ارز باشد

فصل پنجم در دو بخش نوشته شده است : دربخش اول بااستفاده از قضایا و نتایج فصل چهارم ،به بیان و اثبات نتایجی روی کلاس $\widetilde{\mathcal{R}}(\alpha, \lambda)$ می پردازیم و نتایج بدست آمده رااز لحاظ بهتر بودن،مقایسه می کنیم. در پایان این بخش نیز نتیجه ای رابیان و اثبات می کنیم که در اثبات نتیجه اول بخش دوم فصل پنجم از آن استفاده شده است.

در بخش دوم دو نتیجه اصلی این پایان نامه رابیان و اثبات کرده‌ایم.

فصل ششم شامل واژه نامه و مراجع می باشد

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تهیه و تنظیم شده است :

S. Ponnusamy and V. Singh, *Criteria for univalent, starlike and convex functions,* Bull. Belg. Math. Soc. 9(4)(2002), 511-531

فصل ۱

مفاهیم اولیه

فصل اول در دو بخش ارائه شده است که در بخش اول به تعاریف و قضایایی که در فصول بعدی به آن نیاز خواهیم داشت پرداخته ایم در بخش دوم توابع تک ارز؛محدب و ستاره گون و نزدیک به محدب رامعرفی کرده و برخی از خواص اساسی آن را مورد مطالعه قرار داده ایم .

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم Ω یک مجموعه باز بوده و $f : \Omega \to \mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد. گوییم f در نقطه $z_\circ \in \Omega$ مشتق پذیر است هرگاه

$$\lim_{z \to z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ}$$

موجود باشد و آن رابا$f'(z_\circ)$ نشان می دهیم . هرگاه f در هر نقطه $z_\circ \in \Omega$ مشتق پذیر باشد می گوییم f در Ω **تحلیلی** [۱] است .

---

[۱] Analytic

تبصره ۲.۱.۱ قرص واحد را در صفحه اعداد مختلط به صورت زیر نمایش می دهیم :

$$\Delta = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\}$$

تعریف ۳.۱.۱ **(نگاشت همدیس** [۲]**)** نگاشت پیوسته ای که اندازه زاویه بین خمهای مار بر یک نقطه ی مفروض $z_\circ$ را حفظ نماید حافظ زاویه در $z_\circ$ گوییم اگر $f(z)$ در $z_\circ$ حافظ زاویه باشد و بعلاوه جهت زوایای مار بر نقطه ی $z_\circ$ رانیز حفظ نماید می گوییم $f(z)$ در $z_\circ$ همدیس است .

قضیه ۴.۱.۱ هرگاه $f : G \to \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد آنگاه f در هر نقطه ی $z_\circ \in G$ که $f'(z_\circ) \neq \circ$ باشد همدیس است .

برهان : به مرجع [۲] مراجعه کنید □

مثال ۵.۱.۱ نگاشت $f(z) = z^۲$ در هر نقطه ی $z \neq \circ$ همدیس است زیرا مشتق آن یعنی $f'(z) = ۲z$ در چنین نقاطی مخالف صفر است اما این تابع در نقطه ی $z_\circ = \circ$ همدیس نمی باشد زیرا در واقع

$$\arg f(z) = \arg z^۲ = ۲ \arg z$$

این نگاشت هر زاویه به رأس مبدأ مختصات را دو برابر می کند.

---

[۲] Conformal map

تبصره ۶.۱.۱ مجموعه توابع تحلیلی بر $\triangle$ را با $\mathcal{H}$ نمایش داده و قرار می دهیم :

$$\mathcal{A}_n = \{f \in \mathcal{H} :\ f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k\}$$

و همچنین

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} = \{f \in \mathcal{H} : f(0) = f'(0) - 1 = 0\} = \{f \in \mathcal{H} : f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k\}$$

و

$$\mathcal{A}' = \{f \in \mathcal{H} : f(0) = 1\} = \{f \in \mathcal{H} : f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\}$$

که $\mathcal{A}$ نشان دهنده‌ی مجموعه توابع تحلیلی نرمالیزه بر گوی واحد $\triangle$ می باشد

تعریف ۷.۱.۱ تابع تعریف شده مانند f در Ω بوسیله سری توانی قابل نمایش است هرگاه برای هر قرص $D(a,r) \subset \Omega$ یک سری مانند $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ نظیر شود که به ازای هر $z \in D(a,r)$ همگرابه $f(z)$ باشد.

تذکر ۸.۱.۱ هرگاه f بوسیله سری توانی در Ω قابل نمایش باشد آنگاه $f \in H(\Omega)$ و f' نیز با سری توانی قابل نمایش است در واقع به ازای هر $z \in D(a,r)$ اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ آنگاه به ازای این z ها داریم

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$$

(منظور از $H(\Omega)$ مجموعه توابع تحلیلی بر Ω می باشد)

لم ۹.۱.۱ **(لم شوارتز[۳])** فرض کنیم $f \in H(\triangle)$ به طوری که :

(۱)برای هر$z \in \triangle$،$|f(z)| \leq ۱$ و

(۲)$f(۰) = ۰$

دراین صورت برای هر$z \in \triangle$،$|f(z)| \leq |z|$ و $|f'(۰)| \leq ۱$ بعلاوه اگر $|f'(۰)| = ۱$ یا برای $z \neq ۰$یی واقع در $\triangle$ داشته باشیم $|f(z)| = |z|$،آنگاه عدد ثابت cای موجود است به طوریکه $|c| = ۱$ و $f(z) = cz$ برای هر$z \in \triangle$

برهان : به مرجع [۱۴] لم ۲.۱۲ مراجعه کنید □

تذکر ۱۰.۱.۱ تابعی که در لم شوارتز صدق می کند،به تابع شوارتز[۴] معروف است

تذکر ۱۱.۱.۱ قرارمی دهیم :

$$B = \{w \in \mathcal{H} : \ w(۰) = ۰, |w(z)| < ۱, \ z \in \triangle\}$$

[۳] Schwarz's Lemma

[۴] Schwarz Function

۲.۱ توابع تک ارز،محدب و ستاره گون

تعریف ۱.۲.۱ تابع $f(z)$ را روی $\triangle$تک ارز[5] گوییم هرگاه برای هرz_1 و z_2 در $\triangle$ که $z_1 \neq z_2$ داشته باشیم $f(z_1) \neq f(z_2)$

تعریف ۲.۲.۱ مجموعه تمام توابع تحلیلی و تک ارز f که در دیسک واحد

$$\triangle = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$$

تعریف شده و در شرایط نرمالیزه $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می کنند راباS نمایش می دهیم می توان دید که هر $f \in S$ دارای بسط تیلور به فرم زیر می باشد:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1$$

تعریف ۳.۲.۱ تابع $f(z)$ را در نقطه $z_0 \in \triangle$ **موضعاً تک ارز**[6] گوییم ، هرگاه در یک همسایگی z_0 تک ارز باشد

مثال ۴.۲.۱ تابع $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ را درنظرمی گیریم .این تابع در$\triangle$ تحلیلی و تک ارز است . این تابع اهمیت خاصی در نظریه توابع تحلیلی دارد و به تابع کوبه [7] معروف است

[5] Univalent
[6] Locally Univalent
[7] Koebe Function

توابع محدب و ستاره گون

تعریف ۵.۲.۱ دامنه $D \subset \mathbb{C}$ را نسبت به z_0 ستاره گون [۸] گوییم، هرگاه هر پاره خطی که نقاط D را به z_0 وصل می کند،دقیقاً داخل D قرار گیرد

تعریف ۶.۲.۱ تابع $f \in S$ را نسبت به مبدأ ستاره گون (یا به طور خلاصه ستاره گون) گوییم اگر چنانچه قرص واحد باز، با f بر دامنه ای نگاشته شود که نسبت به $z_0 = 0$ ستاره گون است

این زیر رده از S را با S^* نشان می دهیم .

تبصره ۷.۲.۱ قرار دهید :

$$P = \{\varphi \in H(\triangle) : \quad Re\varphi > 0,\ \varphi(0) = 1\}$$

قضیه ۸.۲.۱ فرض کنید f تابعی تحلیلی و تک ارز در $\triangle$ و داشته باشیم $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. دراین صورت $f \in S^*$ اگر وتنهااگر

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$$

برهان : به مرجع [۳] مراجعه کنید □

---

[۸] Starlike

مثال ۹.۲.۱ تابع کوبه $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ یک تابع ستاره گون است .

برای اثبات ، ملاحظه می شود که نگاره ی $|z|<1$ تحت تابع $k(z)$ صفحه Wاست که در امتداد پرتو$-\frac{1}{4}$ تا∞ بریده شده است و یا این مطلب بانشان دادن

$$Re\{z\frac{k'(z)}{k(z)}\}=Re\{\frac{1+z}{1-z}\}>0$$

نیز قابل اثبات است

تعریف ۱۰.۲.۱ گوییم تابع $f\in S$، ستاره گون از مرتبه ی $0\leq\alpha<1$ است هرگاه

$$Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\}>\alpha,\quad (z\in\triangle)$$

مجموعه این توابع را با $S^*(\alpha)$ نشان می دهیم بنابراین

$$S^*(\alpha)=\left\{f\in S:\quad Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\}>\alpha\right\}$$

مثال ۱۱.۲.۱ تابع $f(z)=\frac{z}{(1-z)^{2-2\alpha}}$ ستاره گون از مرتبه $0\leq\alpha<1$ می باشد

تعریف ۱۲.۲.۱ دامنه ی $D\subseteq\mathbb{C}$ رامحدب [۹] گوییم،هرگاه D نسبت به هر نقطه‌اش ستاره گون باشد. بعبارت دیگر،پاره خط مستقیمی که هردونقطه ازD رابه هم وصل می کند،تماماً داخل D قرار گیرد.

[۹] Convex

تعریف ۱۳.۲.۱ تابع محدب نگاشت همدیسی است که دیسک واحد را به یک مجموعه محدب می برد. فرض کنیم $f \in H(\triangle)$ تک ارز باشد،می گوییم f بر $\triangle$ محدب است هرگاه $f(\triangle)$ محدب باشد. مجموعه تمامی توابع محدب بر$\triangle$ را با K نمایش می دهیم

تذکر ۱۴.۲.۱ به وضوح داریم : $K \subset S^* \subset S \subset \mathcal{A}$

مثال ۱۵.۲.۱ تابع کوبه $f(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}$ قرص $|z| < ۱$ را بر میدان ستاره گونی می نگارد که محدب نیست(نگاره شامل $-\frac{۱}{۴} - i$ و $-\frac{۱}{۴} + i$ هست ولی شامل نقطه ی $-\frac{۱}{۴}$ نیست)

قضیه ۱۶.۲.۱ فرض کنیم f یک تابع تحلیلی و تک ارز در $\triangle$ باشد که $f(۰) = f'(۰) - ۱ = ۰$ در این صورت $f \in K$ اگروتنهااگر

$$Re\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\} > ۰ \ , \quad (z \in \triangle)$$

برهان : به مرجع [۳] مراجعه کنید □

تعریف ۱۷.۲.۱ گوییم تابع $f \in S$ از مرتبه‌ی α($۰ \leq \alpha < ۱$)است هرگاه

$$Re\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\} > \alpha \ , \quad (z \in \triangle)$$

مجموعه این توابع رابا$K(\alpha)$ نمایش می دهیم لذا

$$K(\alpha) = \left\{ f \in S : \quad Re\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\} > \alpha \right\}$$

قضیه ۱۸.۲.۱ (قضیه ی الکساندر[۱۰]) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در Δ باشد که $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ دراین صورت $f \in K$ اگروتنهااگر $zf'(z) \in S^*$

برهان : فرض کنیم $g(z) = zf'(z)$ در این صورت $z\frac{g'(z)}{g(z)} = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$. حال اگر $f \in K$ باشد،آنگاه طبق قضیه ی ۱۶.۲.۱، $Re\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\} > 0$. بنابراین $g(z) \in S^*$ و درنتیجه $zf'(z) \in S^*$.
برعکس،فرض کنیم $zf'(z) \in S^*$ پس $g(z) \in S^*$ بنابراین $Re\{z\frac{g'(z)}{g(z)}\} > 0$ و در نتیجه $f \in K$. □

قضیه ۱۹.۲.۱ (قضیه ی نوشیرو–وارچوسکی [۱۱]) اگر f یک تابع تحلیلی در دامنه ی محدب D بوده و $Re\{f'(z)\} > 0$،آنگاه f در D تک ارز است .

برهان : فرض کنیم $z_1, z_2 \in D$ و $z_1 \neq z_2$ نشان می دهیم که $f(z_1) \neq f(z_2)$ چون دامنه ی D محدب است پس به ازای هر $0 \leq t \leq 1$ داریم :

$$z = (1 - t)z_1 + tz_2 = t(z_2 - z_1) + z_1 \in D$$

همچنین چون

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f'(z)\,dz = (z_2 - z_1)\int_0^1 f'\left((1 - t)z_1 + tz_2\right)\,dt$$

در نتیجه :

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 f'\left(t(z_2 - z_1) + z_1\right)\,dt$$

$$\Rightarrow Re\{\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\} = \int_0^1 Re\{f'(t(z_2 - z_1) + z_1)\}\,dt$$

اما بنابر فرض $Re\{f'(z)\} > 0$، پس $Re\{\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\} > 0$ حال چون $z_1 \neq z_2$،پس نتیجه می شود که $f(z_1) \neq f(z_2)$ یعنی f در D تک ارزاست □

[۱۰] Alexander's theorem

[۱۱] Noshiro-Warschawski's theorem

تعریف ۲۰.۲.۱ تابع $f \in S$ رانزدیک به محدب [۱۲] گوییم اگروتنهااگر یک تابع محدب g(نه لزوماً نرمالیزه) چنان باشد که

$$Re\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\} > 0$$

واین معادل است با اینکه تابع ستاره گون h(نه لزوماً نرمالیزه) چنان باشد که

$$Re\{z\frac{f'(z)}{h(z)}\} > 0$$

این زیررده از S را با C نشان می دهیم

تذکر ۲۱.۲.۱ به وضوح داریم : $K \subset S^* \subset C \subset S$

قضیه ۲۲.۲.۱ هر تابع نزدیک به محدب تک ارز است

برهان : فرض کنیم تابع f نزدیک به محدب باشد لذا بنا به تعریف تابع محدبی مانند g موجوداست که $Re\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\} > 0$ و فرض کنیم D برد g باشد و در نظر می گیریم

$$h(w) = f(g^{-1}(w)), \qquad w \in D$$

لذا

$$h'(w) = \frac{f'(g^{-1}(w))}{g'(g^{-1}(w))} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

در نتیجه

$$Re\{h'(w)\} > 0 \ , \qquad w \in D$$

پس بنابر قضیه ی ۱۹.۲.۱، h تک ارز است بنابراین f تک ارز است □

[۱۲] close to convex