وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

عدد هم‌رنگی گراف‌ها

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

پروین نقی‌زاده شرامین

استاد راهنما: **دکتر علی طاهرخانی**

مرداد ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به خانواده‌ی مهربانم

پدرم که شانه‌هایش بلندترین نقطه‌ی زمین است،

مادرم که عشق تنها در آغوش او خلاصه می‌شود،

خواهرم که زیباترین چشم انداز تندیس نگاه اوست،

برادرانم که آرامش بخش روح و روانم هستند.

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خداوند رحمان و رحیم را که عالم را بر اساس "حساب" و "هندسه" آفرید. آری ریاضیدان بزرگی که همه چیز دنیا را بر اساس حساب استوار کرد و بر پایه‌ی هندسه نظم بخشید. هزاران شکر این راهنمای عظیم را که دستان پر مهرش مرا در نیل به آرزوهایم یار و یاور بوده و صدها سپاس که با پشتیبانیش فرصتی ارزانی شد تا بتوانم پژوهشی هر چند کوتاه در یکی از باب‌های گسترده‌ی ریاضی داشته باشم.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر طاهرخانی که با صبر و مهربانی راهنما و راهگشای بنده بودند نهایت تشکر و قدردانی را به جا آورم. همچنین از داوران محترم جناب آقای دکتر محمودیان، جناب آقای دکتر ذاکر و جناب آقای دکتر باستانی که داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند نهایت سپاس را دارم. در نهایت بوسه بر دستان پدر و مادر عزیزم می‌زنم که در تمامی دوران زندگی علی‌الخصوص دوران تحصیل مشوق و تکیه‌گاهم بودند. خورشیدهایی که هرگاه دنیا برایم به تاریکی می‌گراید روشنای راهم هستند.

امید که سپاس کوچک مرا پذیرا باشند.

چکیده

هم‌رنگ‌آمیزی گراف G افرازی از رأس‌های گراف G به مجموعه‌های مستقل و خوشه‌ها است. عدد هم‌رنگی گراف کمترین تعداد رنگ‌های لازم برای هم‌رنگ‌آمیزی رأس‌های گراف است. ما هم‌رنگ‌آمیزی گراف‌ها و گراف‌های هم‌رنگ بحرانی را مطالعه کرده و کران‌هایی برای هم‌رنگ‌آمیزی ارائه خواهیم داد.

یک k-رنگ‌آمیزی شکافته از گراف G افرازی از مجموعه رأس‌های گراف G به k مجموعه‌ی مستقل و خوشه است. عدد رنگی شکافته‌ی گراف G کوچک‌ترین kای است که گراف G به ازای آن دارای یک k-رنگ‌آمیزی شکافته است. پس از معرفی رنگ‌آمیزی شکافته‌ی گراف‌ها مطالبی در مورد گراف‌هایی با یکتا رنگ‌آمیزی شکافته، گراف‌های شکافته‌ی بحرانی و ارتباط بین عدد رنگی شکافته، عدد رنگی و عدد هم‌رنگی بیان خواهیم کرد و ساختاری از گراف‌های شکافته‌ی بحرانی ارائه خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: *عدد هم‌رنگی، هم‌رنگ بحرانی، عدد رنگی شکافته، یکتا رنگ‌آمیزی شکافته*

فهرست

فهرست تصاویر

پیش‌گفتار

نظریه‌ی گراف یکی از موضوع‌های مهم در ریاضیات گسسته است که به مطالعه‌ی گراف‌ها و مدل‌بندی مسأله‌ها به وسیله‌ی آن‌ها می‌پردازد. گراف یک مدل ریاضی برای یک مجموعه‌ی گسسته است که اعضای آن به طریقی با هم ارتباط دارند. اعضای این مجموعه می‌توانند دانشجویان یک دانشگاه باشند و ارتباط آن‌ها با هم رشته‌ی تحصیلی باشد یا اعضا می‌توانند قسمت‌های مختلف زمین و ارتباط بین آن‌ها پل‌هایی باشد که آن‌ها را به هم مرتبط می‌کند، مانند مسأله‌ی پل‌های شهر کونیگسبرگ. اویلر [۱] ریاضیدان و فیزیکدان برجسته‌ی سوئیسی در سال ۱۷۳۶ با حل مسأله‌ی کونیگسبرگ نظریه‌ی گراف را بنیان گذاشت. اما سیلوستر [۲] نخستین کسی بود که در سال ۱۸۷۸ از واژه‌ی گراف برای نامیدن این مدل‌های ریاضی استفاده کرد.

پیشرفت‌های اخیر در ریاضیات به ویژه در کاربردهای آن، موجب گسترش چشم‌گیر نظریه‌ی گراف شده است. به گونه‌ای که هم اکنون نظریه‌ی گراف ابزار بسیار مناسبی برای تحقیق در زمینه‌های گوناگون مانند نظریه‌ی کدگذاری، علوم رایانه‌ای، شبکه‌های اجتماعی و سایر زمینه‌ها گردیده است.

در نظریه‌ی گراف، رنگ‌آمیزی گراف یکی از مسائل معروف و پرکاربرد است. رویکرد کلی آن استفاده از نظیر کردن رنگ‌هایی به رأس‌ها یا یال‌ها است که این رنگ‌آمیزی محدودیت خاصی را رعایت کند. در ساده‌ترین حالت رنگ‌آمیزی رأسی مورد نظر است که به اختصار رنگ‌آمیزی نامیده می‌شود.

رنگ‌آمیزی گراف کاربردهای زیادی در زمینه‌های علمی و تئوری گوناگون دارد. علاوه بر مسأله‌های

[۱] L. Euler

[۲] J. Sylvester

کلاسیک تعریف شده در این زمینه، با در نظر گرفتن روش‌های مختلف رنگ‌آمیزی و حتی تعداد رنگ عناصر گراف مسأله‌های متنوعی با کاربردهای وسیع در صنعت و علوم تعریف و حل می‌شود. این مسأله از نظر علمی هنوز در حال رشد و بررسی بیشتر است.

اولین نتیجه‌های به‌دست آمده در مورد رنگ‌آمیزی گراف از تلاش‌های انجام شده بر روی گراف‌های مسطح برای حل مسأله‌ی رنگ‌آمیزی نقشه به‌دست آمد. در سال ۱۸۵۲ فرانسیس گاتری [۱] مشغول رنگ‌آمیزی نقشه‌ی انگلستان بود که متوجه شد چهار رنگ برای این کار کافی است. اگرچه تنها چهار رنگ برای رنگ‌آمیزی ناحیه‌های یک نقشه‌ی مسطح مورد نیاز است اما برای رنگ‌آمیزی رأس‌های گراف‌های غیرمسطح گاهی بیش از چهار رنگ لازم است.

در این پایان‌نامه نوعی از رنگ‌آمیزی رأسی گراف‌ها، تحت عنوان هم‌رنگ‌آمیزی را معرفی خواهیم کرد. فصل اول دربرگیرنده‌ی تعاریف اولیه‌ی گراف‌ها، نظریه‌ی رنگ‌آمیزی در گراف‌ها و مطالبی پیرامون نظریه‌ی رمزی است. مطالب این فصل برگرفته از کتاب‌های نظریه‌ی گراف وست [۳۲] و نظریه‌ی گراف باندی و مورتی [۳] است. در فصل دوم مفهوم (j,k)-رنگ‌آمیزی گراف‌ها را معرفی کرده و شرایط لازم برای (j,k)-رنگ‌پذیر بودن گراف‌های وتری را بررسی خواهیم کرد و روی کوچک‌ترین گراف‌هایی که (j,k)-رنگ‌آمیزی ندارند بحث خواهیم کرد. سپس عدد هم‌رنگی گراف‌ها را معرفی کرده و شرایطی را که تحت آن شرایط یک گراف دارای زیرگرافی با عدد هم‌رنگی بزرگ است را بیان خواهیم کرد. مطالب این فصل برگرفته از [۱] و [۱۳] است. در فصل سوم مفهوم هم‌رنگ بحرانی را معرفی کرده و خواص گراف‌هایی که هم‌رنگ بحرانی هستند را از [۶] بیان خواهیم کرد و شرایط لازم برای اینکه یک گراف دارای زیرگرافی هم‌رنگ بحرانی باشد را مورد بررسی قرار خواهیم داد. این فصل را با ارائه‌ی ساختاری از گراف‌هایی که رنگ بحرانی و هم‌رنگ بحرانی هستند به پایان خواهیم برد. در فصل چهارم نوع دیگری از رنگ‌آمیزی رأسی گراف‌ها، تحت عنوان رنگ‌آمیزی شکافته را معرفی کرده و

---

[۱] F. Guthrie

عدد رنگی شکافته‌ی گراف‌ها را تعریف خواهیم کرد. در این فصل ارتباط بین عدد رنگی شکافته، عدد رنگی و عدد هم‌رنگی را بیان نموده و گراف‌های شکافته‌ی بحرانی و گراف‌های یکتا رنگ‌پذیر شکافته را معرفی کرده و ساختاری از گراف‌های شکافته‌ی بحرانی را ارائه خواهیم داد. همچنین در مورد تأثیر حذف و اضافه کردن یال روی عدد رنگی شکافته بحث خواهیم کرد. مطالب این فصل برگرفته از [۱۳] و [۱۴] است.

فصل اول

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل با برخی تعریف‌های اولیه‌ی نظریه‌ی گراف آشنا می‌شویم. برای آشنایی با مفاهیم نظریه‌ی گراف و اثبات قضایا می‌توانید به کتاب نظریه‌ی گراف وست [۳۲]، کتاب نظریه‌ی گراف دیستل [۱۱] یا کتاب نظریه‌ی گراف باندی و مورتی [۳] مراجعه کنید.

۱.۱ تعریف‌های اولیه‌ی نظریه‌ی گراف

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید V یک مجموعه‌ی ناتهی و E زیرمجموعه‌ای از $V \times V$ باشد. دراین‌صورت زوج $G = (V, E)$ را یک **گراف**، V را **مجموعه‌ی رأس‌ها** و E را **مجموعه‌ی یال‌ها** می‌نامیم. اگر ترتیب قرار گرفتن رأس‌ها در اعضای مجموعه‌ی E مهم باشد، گراف را **گراف جهت‌دار** گوییم در غیر این‌صورت گراف را **گراف بدون جهت** می‌نامیم. تعداد رأس‌های یک گراف را **مرتبه‌ی گراف** و تعداد یال‌های آن را **اندازه‌ی گراف** گوییم و به ترتیب با $|V(G)|$ و $|E(G)|$ نشان می‌دهیم. به یک

گراف n رأسی یک **n-گراف** گوییم. اگر دو رأس با یالی به هم متصل باشند آن دو رأس را **رأس‌های مجاور** گوییم. یال با دو سر یکسان **طوقه** نامیده می‌شود. اگر مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های گرافی متناهی باشد گراف را **گراف متناهی** می‌گوییم. گراف $G = (V, E)$ **گراف ساده** است اگر هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال نباشد.

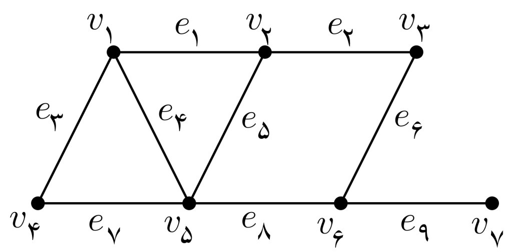
مثال ۲.۱.۱. فرض کنید گراف G گراف نشان داده شده در شکل ۱.۱ باشد. مجموعه رأس‌های این گراف برابر است با

$$V(G) = \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵, v_۶, v_۷\},$$

و مجموعه یال‌های آن برابر است با

$$E(G) = \{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴, e_۵, e_۶, e_v, e_۸, e_۹\}.$$

این گراف یک گراف ساده از مرتبه‌ی هفت و اندازه‌ی نه است.



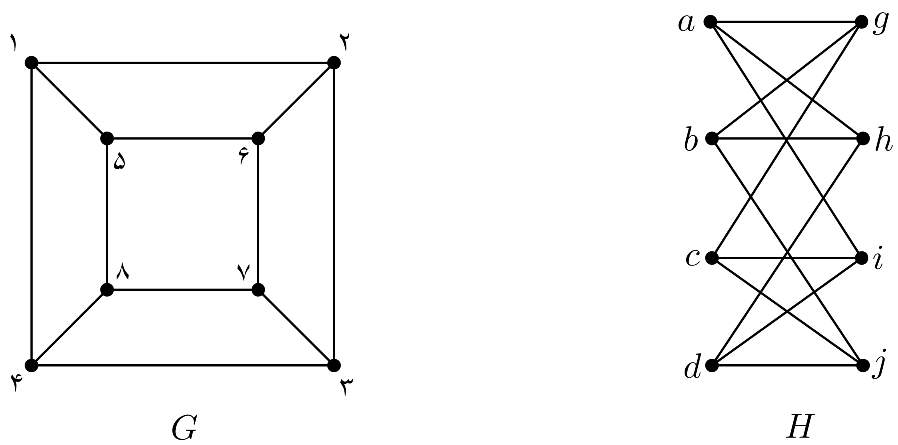
شکل ۱.۱: گراف G

تعریف ۳.۱.۱. دو گراف G و H **گراف‌های یکریخت** هستند اگر و تنها اگر تابعی یک به یک و پوشا به‌صورت $f : V(G) \to V(H)$ بین مجموعه رأس‌های دو گراف وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. در این‌صورت دو گراف G و H را یکریخت گویند و می‌نویسند $G \cong H$.

مثال ۴.۱.۱. دو گراف نشان داده شده در شکل ۲.۱ با اینکه ظاهر متفاوتی دارند اما یکریخت هستند و برای آن‌ها داریم

$$f(a) = ۱, f(b) = ۶, f(c) = ۸, f(d) = ۳, f(g) = ۵, f(h) = ۲, f(i) = ۴, f(j) = ۷.$$



شکل ۲.۱: گراف‌های یکریخت G و H

در ادامه‌ی این بخش انواع گراف‌های ساده مانند گراف تهی، گراف کامل، گراف دوبخشی و ... را معرفی خواهیم کرد.

تعریف ۵.۱.۱. **گراف تهی** گرافی است که هیچ یالی نداشته باشد.

تعریف ۶.۱.۱. گراف ساده‌ی G را **گراف کامل** گوییم هرگاه هر دو رأس آن مجاور باشند. با در نظر گرفتن یکریختی تنها یک گراف کامل n رأسی وجود دارد و آن را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱. زیرمجموعه‌ی S از $V(G)$ را که هیچ دو رأس آن مجاور نیستند یک **مجموعه‌ی مستقل** از G می‌نامیم. مجموعه‌ی مستقل S ماکزیمم نامیده می‌شود هرگاه هیچ مجموعه‌ی مستقل S'ای با شرط $|S'| > |S|$ وجود نداشته باشد. تعداد رأس‌های مجموعه‌ی مستقل ماکزیمم را **عدد استقلال** نامیم و با $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. **گراف دوبخشی** گرافی است که مجموعه رأس‌های آن را می‌توان به دو زیرمجموعه‌ی مستقل X و Y افراز کرد. **گراف دوبخشی کامل** یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y است به‌طوری‌که در آن هر رأس از X به تمامی رأس‌های Y متصل است.

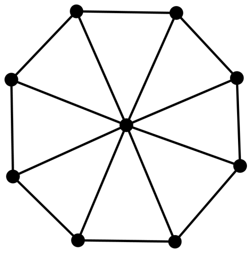
تعریف ۹.۱.۱. گراف ***k*-بخشی** گرافی است که مجموعه رأس‌های آن را می‌توان به k زیرمجموعه افراز کرد به‌طوری‌که هیچ یالی در یک زیرمجموعه قرار نگیرد. گراف ***k*-بخشی کامل** گرافی است که در آن هر رأس به تمامی رأس‌هایی که در زیرمجموعه‌ای غیر یکسان با آن قرار دارند، متصل شده است.

مثال ۱۰.۱.۱. در شکل ۳.۱ گراف G یک گراف دوبخشی کامل و گراف H یک گراف سه بخشی است.

شکل ۳.۱: گراف دوبخشی G و گراف سه بخشی H

تعریف ۱۱.۱.۱. هر گراف با $n+1$ رأس به‌طوری‌که $n \geq 3$ و یکی از رأس‌ها از درجه‌ی n و بقیه از درجه‌ی سه باشند را یک **گراف چرخ** می‌نامیم. گراف چرخ $n+1$ رأسی را با W_n نشان می‌دهیم. در گراف چرخ $n+1$ رأسی، رأس از درجه‌ی n **رأس مرکزی** نامیده می‌شود.

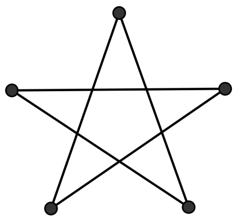
مثال ۱۲.۱.۱. در شکل ۴.۱ یک گراف چرخ با نه رأس را مشاهده می‌کنید.



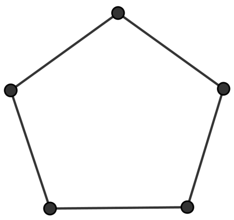
شکل ۴.۱: گراف W_8

تعریف ۱۳.۱.۱. **مکمل** گراف ساده‌ی G گراف ساده‌ای با رأس‌های $V(G)$ است به‌طوری‌که در آن دو رأس مجاور هستند اگر و تنها اگر آن رأس‌ها در گراف G غیرمجاور باشند. مکمل گراف G را با $\overline{G}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۴.۱.۱. در شکل ۵.۱ یک گراف و مکمل آن را مشاهده می‌کنید.



$\overline{G}$



G

شکل ۵.۱: گراف G و مکمل آن

تعریف ۱۵.۱.۱. گراف H را **زیرگراف** G می‌نامیم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. اگر H زیرگراف G باشد می‌نویسیم $H \subseteq G$. گراف H را **زیرگراف سره‌ی** گراف G می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $H \subseteq G$ و $H \neq G$. اگر H زیرگراف سره‌ی G باشد می‌نویسیم $H \subset G$. در صورتی که زیرگراف H در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن را **زیرگراف فراگیر** نامیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید V' زیرمجموعه‌ای ناتهی از V باشد. زیرگرافی از G که مجموعه رأس‌های آن V' و مجموعه یال‌های آن برابر با مجموعه یال‌هایی از گراف G باشد که هر دو سر آن‌ها در V' واقع است، زیرگراف القا شده توسط V' می‌نامیم و با $G[V']$ نمایش می‌دهیم و به آن **زیرگراف القایی** G روی رأس‌های V' می‌گوییم.

تعریف ۱۷.۱.۱. یک **مسیر** از رأس u به رأس v دنباله‌ای از رأس‌های دو به دو متمایز گراف G است به‌طوری‌که از u آغاز و به v ختم می‌شود و هر دو رأس متوالی این دنباله مجاور هستند. به **تعداد** یال‌های یک مسیر **طول مسیر** گفته می‌شود.

تعریف ۱۸.۱.۱. یک **دور** دنباله‌ای به‌صورت $v_1, v_2, ..., v_{n+1} = (v_1)$ با شرط $n \geq 3$ متشکل از n رأس دو به دو متمایز است به‌طوری‌که هر دو رأس متوالی این دنباله مجاور هستند. دور n رأسی را با C_n نشان می‌دهیم.

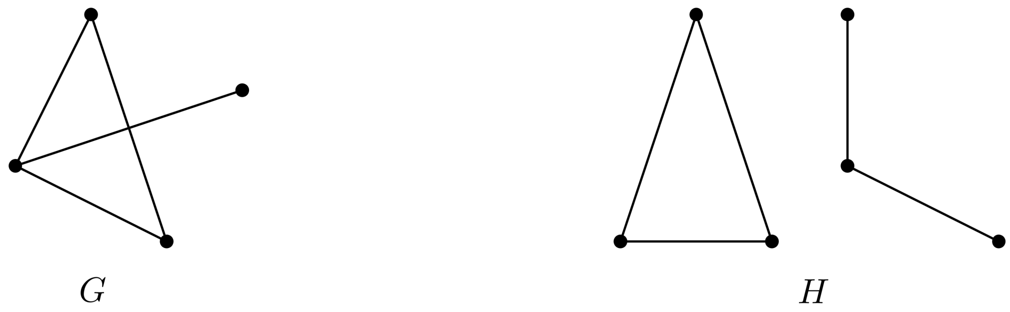
تعریف ۱۹.۱.۱. گراف G را **همبند** گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد. همبندی یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه رأس‌های $V(G)$ تشکیل می‌دهد. بنابراین افرازی از $V(G)$ به زیرمجموعه‌های ناتهی V_1، V_2،... و V_i وجود دارد که در آن دو رأس u و v با مسیری به هم متصل هستند اگر و تنها اگر هر دو متعلق به V_i یکسانی باشند. زیرگراف‌های $G[V_1]$، $G[V_2]$،... و $G[V_i]$ **مؤلفه‌های همبندی** گراف G نامیده می‌شوند.

مثال ۲۰.۱.۱. در شکل ۶.۱ گراف G گرافی همبند و گراف H گرافی ناهمبند با دو مؤلفه‌ی همبندی است.

تعریف ۲۱.۱.۱. یک گراف همبند بدون دور را **درخت** می‌نامیم.

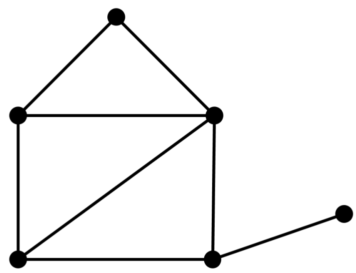
تعریف ۲۲.۱.۱. گراف G را **گراف وتری** یا مثلث‌بندی شده گوییم هرگاه هیچ دور القایی به طول بیش از سه نداشته باشد.

مثال ۲۳.۱.۱. تمامی درخت‌ها گراف‌های وتری هستند. چون هیچ دوری ندارند. در شکل ۷.۱ نیز



شکل ۶.۱: گراف همبند G و گراف ناهمبند H

یک گراف وتری نشان داده شده است.



شکل ۷.۱: گراف وتری

تعریف ۲۴.۱.۱. یک **خوشه** از گراف G زیرمجموعه‌ای مانند S از $V(G)$ است به‌طوری‌که $G[S]$ گرافی کامل باشد. به وضوح S یک خوشه از G است اگر و تنها اگر S یک مجموعه‌ی مستقل از $\overline{G}$ باشد. **عدد خوشه‌ای** گراف G برابر با اندازه‌ی بزرگ‌ترین خوشه از گراف G است و آن را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۵.۱.۱. به کمترین تعداد خوشه‌های مورد نیاز برای پوشاندن یک گراف **عدد رنگی خوشه‌ای** گوییم و آن را با $\theta(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. اگر G و H دو گراف باشند، در این‌صورت **اجتماع مجزای** این دو گراف یعنی