

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه مازندران
دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته فیزیک گرایش گرانش و کیهانشناسی

موضوع:

سیاهچاله‌ها در مدل شامه ای DGP با در نظر گرفتن اثرات ریسمانی

استاد راهنما:

دکتر کوروش نوذری

استاد مشاور:

دکتر علی توفیقی

نام دانشجو:

امیر عصائیان

شهریور ۱۳۹۰

سپاسگزاری

در اینجا لازم می‌دانم از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر کوروش نوذری، که راهنمایی بنده در انجام این رساله را به عهده داشتند کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. گذراندن دوره‌ی کارشناسی ارشد در محضر ایشان سرشار از تجربیات علمی و خاطرات فراوان است که برایم بسیار پرارزش و فراموش نشدنی است. سعادت، سلامت و توفیق روز افزون را برای استاد گرانقدرم آرزومندم. همچنین از پدر و مادر عزیزم که بعد از خدا پشتیبان و مشوق اصلی بنده بوده و هستند سپاسگزارم. حقیقتاً گذراندن دوران تحصیل بدون حمایت‌های بی‌دریغ ایشان غیر ممکن بود. از خداوند منان برایشان آرزوی سلامتی و شادکامی دارم. از تمام اساتید گروه فیزیک دانشگاه مازندران که در دوره‌ی کارشناسی ارشد از حضورشان بهره بردم کمال تشکر و قدردانی را دارم. بنده در کنار دوستان، همکلاسی‌ها و همخوابگاهی‌های دوران کارشناسی و کارشناسی ارشد خود تجربیات علمی و غیرعلمی فراوانی کسب نمودم، برای تمامی این دوستان آرزوی موفقیت و توفیق روزافزون دارم.

تقدیم به:

مهربان ترین مخلوقات عالم

پدر و مادر

چکیده :

با ظهور نظریه‌ی نسبیت عام و جواب شوارتزشیلد برای فضای بیرون توزیع جرم‌های متقارن کروی، موضوع سیاهچاله‌ها با اثراتی غیرطبیعی بر هندسه‌ی اطراف خود و پدیده‌های جدید مورد توجه فراوان قرار گرفت. جواب شوارتزشیلد با دقت بالایی با مشاهدات منظومه‌ی شمسی هم‌خوانی دارد. نسبیت عام در مقیاس‌های طولی کوچک بدلیل پیش‌بینی تکنیکی‌های کلاسیک در رُمبش‌های گرانشی بزرگ کاربرد ندارد. تاکنون نظریات ابعاد اضافیه‌ی گوناگونی با هدف‌های مختلفی از جمله وحدت گرانش و الکترومغناطیس، نظریه‌ی گرانش کوانتومی، حل مساله‌ی سلسله‌مراتبی و توجیه انبساط شتابدار عالم کنونی مطرح شده‌اند. در دهه‌ی اخیر نظریات گرانشی جهان‌شامه‌ای بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. در مدل‌های جهان‌شامه‌ای عالم چهاربعدی ما شامه‌ای غوطه‌ور در ابعاد اضافه می‌باشد بطوریکه تمام میدان‌های مادی و تابش بر روی شامه قرار دارند و تنها گرانش می‌تواند به بعد اضافه نشت کند. مدل‌های جهان‌شامه‌ای RS و DGP از معروف‌ترین این نظریات می‌باشند. جواب‌های سیاهچاله‌ای در این مدل‌ها خصوصیتی متفاوت با نسبیت عام دارند. البته این نظریات در حدود مناسب نتایج نسبیت عام را نیز بازتولید می‌کنند. ما از ترکیب دو مدل جهان‌شامه‌ای RS و DGP مدل جهان‌شامه‌ای تابدار DGP را می‌سازیم. این مدل نتایج هر دو نظریه را در خود جای داده است که می‌توانیم در حدود مناسب آنها را از نتایج نهایی استخراج کنیم. بازیابی نتایج نسبیت عام در این مدل کمی دشوار است، زیرا معادلات میدان گرانشی خطی شده به نتایج نسبیت عام منجر نمی‌شوند (حتی در حد بدون جرم نظریه). مدل خطی شده‌ی DGP دارای نوعی ناپیوستگی شبیه به ناپیوستگی $vDVZ$ که در نظریات گرانشی با گراویتون جرم‌دار وجود دارد، است. انتشارگر گراویتون در نظریات جرم‌دار در حد بدون جرم نظریه به انتشارگر گراویتون بی‌جرم نسبیت عام منجر نمی‌شود. علت این ناپیوستگی تفاوت در تعداد درجات آزادی گراویتون جرم‌دار و بی‌جرم است. تاکنون افراد زیادی بر روی این موضوع کار کرده و نشان داده‌اند که علت وجود این ناپیوستگی در خطی کردن کامل معادلات است و این ناپیوستگی در معادلات غیرخطی ظاهر نمی‌شود. ما با در نظر گرفتن بعضی جملات غیرخطی مربوط به خمیدگی شامه و حل معادلات غیرخطی حاصل، نتایج صحیح نسبیت عام را بر روی شامه‌ی چهاربعدی بازتولید می‌کنیم و نشان می‌دهیم که ناپیوستگی $vDVZ$ در مدل تابدار DGP وجود ندارد و جواب شوارتزشیلد در محدوده‌ی اندازه‌گیری‌های ما برقرار است.

واژه‌های کلیدی:

مدل‌های جهان‌شامه‌ای، گرانش القایی، سیاهچاله، ناپیوستگی $vDVZ$

صفحه	عنوان
سپاسگزاری	ت
چکیده	ج
	فصل اول : سیاهچاله‌ها در نسبیت عام
۱-۱ مقدمه	۱
۲-۱ متریک شوارتزشیلد	۲
۳-۱ متریک رایزنر-نورداشتروم	۶
۴-۱ متریک کر و کر-نیومان	۲۰
	۲۳
	فصل دوم : نظریات گرانشی جهان‌شامه‌ای
۱-۲ مقدمه	۲۵
۱-۱-۲ نظریه‌ی Kaluza-Klein	۲۶
۲-۱-۲ نظریات ابررسمان	۲۷
۳-۱-۲ نظریه‌ی ADD	۲۹
۲-۲ مدل‌های جهان‌شامه‌ای Randall-Sundrum	۳۲
۱-۲-۲ گرانش اختلالی	۳۴
۲-۲-۲ گرانش غیراختلالی	۴۰
۳-۲-۲ کیهانشناخت جهان‌شامه‌ای	۴۸
۳-۲ مدل جهان‌شامه‌ای DGP	۵۳
۱-۳-۲ کیهانشناخت DGP	۵۵
۲-۳-۲ گرانش اختلالی و بازیابی گرانش نسبیت عام	۵۷
۳-۳-۲ گرانش غیراختلالی	۶۰
	۶۵

۶۸	فصل سوم : سیاهچاله‌ها در نظریات جهان‌شامه‌ای
۶۹	۱-۳ مقدمه
۷۰	۲-۳ سیاهچاله‌ها در مدل جهان‌شامه‌ای RSII
۷۰	۱-۲-۳ جواب حد میدان ضعیف خطی شده
۷۱	۲-۲-۳ ریمان سیاه
۷۳	۳-۲-۳ سیاهچاله‌ی باردار کَشَن‌دی
۷۶	۴-۲-۳ جواب تحلیلی برای سیاهچاله‌ای ایستا
۸۲	۳-۳ سیاهچاله‌ها در مدل‌های جهان‌شامه‌ای با گرانش القایی
۸۲	۱-۳-۳ حد گرانش ضعیف
۸۹	۲-۳-۳ جواب‌های غیراختلالی

فصل چهارم : جواب‌های سیاهچاله‌ای در مدل جهان‌شامه‌ای تابدار DGP

۹۸	
۹۹	۱-۴ مقدمه
۱۰۰	۲-۴ چینش نظریه و معادلات میدان
۱۰۲	۳-۴ حد میدان ضعیف
۱۰۵	۴-۴ بازیابی جواب شوارتزشیلد بر روی شامه
۱۰۸	۵-۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای آینده
۱۰۹	منابع و مراجع

فهرست شکل‌ها

صفحه	عنوان
۹	شکل (۱-۱): حرکت تقدیمی مدار گردش سیاره عطارد بدور خورشید
۱۰	شکل (۲-۱): مسیر حرکت پرتو نور در گرانش نیوتنی
۱۱	شکل (۳-۱): مسیر خمیده‌ی حرکت پرتو نور از کنار یک جسم متقارن کروی در نظریه‌ی نسبیت عام
۱۳	شکل (۴-۱): عبور نور بازتابی از سیاره از کنار خورشید با تاخیر زمانی در رسیدن به زمین
۱۶	شکل (۵-۱): نمودار فضا-زمان متریک شوارتزشیلد در مختصات شوارتزشیلد
۱۷	شکل (۶-۱): ذره‌ی فروافتنده‌ی شعاعی در سیاهچاله‌ی شوارتزشیلد در زمان‌های t و τ
۱۸	شکل (۷-۱): جواب شوارتزشیلد در مختصات ادینگتون-فینکل‌اشتاین
۱۹	شکل (۸-۱): رمبش گرانشی ستاره متقارن کروی غیرچرخان
۱۹	شکل (۹-۱): نمودار رمبش گرانشی سه‌بعدی
۲۱	شکل (۱۰-۱): نمودار g_{00} برای جواب‌های شوارتزشیلد و رایزنر-نورداشتروم
۲۲	شکل (۱۱-۱): جواب رایزنر-نورداشتروم ($\varepsilon^2 < m^2$) در مختصات $(\bar{t}, r, \theta, \phi)$
۳۰	شکل (۱-۲): نمایی از مقید بودن ماده بر روی شامه و انتشار گرانش به توده
۳۲	شکل (۲-۲): تصویری از بعد اضافه و موقعیت شامه در نظریات ADD و کالوزا-کلاین
۳۶	شکل (۳-۲): رفتار عامل پیچش در مدل RSI
۴۱	شکل (۴-۲): میدان گرانشی یک چشمه‌ی مادی در پیمانه‌ی RS و خمیدگی شامه در این پیمانه
۵۶	شکل (۵-۲): پتانسیل گرانشی یک چشمه‌ی نقطه‌ای بر روی جهان‌شامه‌ی DGP
۶۵	شکل (۶-۲): رفتار پتانسیل نیوتنی $2V(r) = g_{tt} - 1$ ناشی از یک چشمه‌ی نقطه‌ای در سه ناحیه‌ی مختلف روی شامه
۸۸	شکل (۱-۳): خلاصه‌ی نتایج گرانش خطی شده، که در $r \gg r_*$ برقرار است
۹۵	شکل (۲-۳): رفتار مجانبی جواب سیاهچاله‌ای (۱۳۳-۳)

لیست علائم و اختصارات

GR.....	General Relativity
KK.....	Kaluza-Klein
ADD.....	Arkani Hamed-Dimolpoulos-Dvali
RS.....	Randall-Sundrum
AdS.....	Anti-de Sitter
TeV.....	trillion(Tera) electron Volt
DGP.....	Dvali-Gabadadze-Porrati
FRW.....	Friedmann-Robertson-Walker
vDVZ.....	van Dam-Veltman-Zakharov

فصل اول

سیاهچاله‌ها در نسبیت عام

فصل اول : سیاهچاله‌ها در نسبیت عام

۱-۱) مقدمه

در دهه اول قرن بیستم، انقلابی در فلسفه علوم طبیعی پیش آمد که بسیاری آن را از حیث عمق معنا و بر هم زدن احکام موجود پذیرفته شده، نسبت به انقلاب کوپرنیکی-گالیله‌ای، برتر به شمار می‌آورند. در این زمان دو نظریه بسیار مهم پا به عرصه‌ی رقابت نهادند، **نظریه‌ی نسبیت (نسبیت خاص و نسبیت عام)** و **نظریه‌ی کوانتومی** که نسبت به کارهای دانشمندان پیشین به نحو چشمگیری متفاوت بودند. نظریه نسبیت عام که یک نظریه‌ی گرانشی است در سال ۱۹۱۵ توسط آلبرت اینشتین^۱ منتشر شد. این نظریه تعمیمی بر نظریه‌ی نسبیت خاص و قانون جاذبه‌ی نیوتن است که گرانش را بصورت خاصیتی هندسی از فضا-زمان توصیف می‌کند. این دیدگاه با دیدگاه نیوتنی تفاوت بسیاری دارد. بر اساس نگرش نیوتن جرم به گرانش می‌گوید که چگونه نیرو اعمال کند و نیرو به جرم می‌گوید که چگونه شتاب بگیرد. حال آنکه بر اساس نگرش اینشتین جرم به فضا-زمان می‌گوید که چگونه خمیده شود و خمش فضا-زمان به جرم می‌گوید که چگونه حرکت کند. در این نظریه، فضا-زمان توسط هندسه‌ی ریمانی بررسی می‌شود. اینشتین برای پایه‌ریزی نظریه‌ی خود از پنج اصل اساسی زیر الهام گرفت:

(۱) اصل ماخ^۲: اگر ماده وجود نداشته باشد، هندسه‌ای هم وجود نخواهد داشت. ماده هندسه را بوجود می‌آورد و هندسه حرکت ماده را تعیین می‌کند.

^۱ Albert Einstein

^۲ Mach's principle

(۲) اصل هم‌ارزی : حرکت یک ذره آزمون گرانشی در یک میدان گرانشی، مستقل از جرم و ساختارش است. جرم گرانشی و جرم لختی با هم برابرند. با هیچ آزمون موضعی نمی‌توان بین یک چارچوب در حال سقوط آزاد در میدان گرانشی و یک چارچوب در حال حرکت یکنواخت در فضایی خالی از میدان گرانشی، تمایز قائل شد.

(۳) اصل هموردایی عام : تمام ناظرین اعم از لخت و غیر لخت هم‌ارزند. بنابراین تمامی معادلات فیزیک باید شکل تانسوری داشته باشند، زیرا روابط تانسوری مستقل از چارچوب می‌باشند.

(۴) اصل کمینه‌ی جفت‌شدگی گرانشی : هنگام گذار از نسبیت خاص به نسبیت عام، جملات صریح تانسور انحنای نباید به معادلات حرکت نسبیت خاص (فضا-زمان تخت) اضافه شود. عبارت دیگر این معادلات با حداقل تغییر به فضا-زمان خمیده تعمیم داده می‌شوند.

(۵) اصل تطابق : نظریه نسبیت عام در حالت‌های حدی به گرانش نیوتنی و نسبیت خاص تبدیل می‌شود.

اینشتین معادلات میدان خود را بصورت زیر نوشت:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1-1)$$

که جمله‌ی سمت چپ هندسه‌ی فضا-زمان و جمله‌ی سمت راست محتوای انرژی-تکانه را مشخص می‌کند. در این معادله G ثابت گرانشی نیوتن است. $G_{\mu\nu}$ تانسور اینشتین است که از ترکیب تانسور ریچی $R_{\mu\nu}$ و اسکالر ریچی R تعریف می‌شود. تانسور و اسکالر ریچی نیز از ادغام روی اندیس‌های تانسور ریمان $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ که بصورت زیر برحسب هموستار متریک^۱ $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ و مشتق جزئی آن تعریف می‌شود، بیان می‌شوند:

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} - \partial_{\delta}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\delta}^{\eta}\Gamma_{\eta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\eta}\Gamma_{\eta\delta}^{\alpha}, \quad (2-1)$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(\partial_{\beta}g_{\delta\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\delta\beta} - \partial_{\delta}g_{\beta\gamma}), \quad (3-1)$$

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma} = g^{\gamma\delta}R_{\delta\alpha\gamma\beta}, \quad (4-1)$$

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}, \quad (5-1)$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (6-1)$$

تانسور اینشتین در معادله‌ی زیر که به اتحاد بیانکی^۲ معروف است صدق می‌کند:

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0, \quad (7-1)$$

¹ Metric Connection

² Bianchi

با استفاده از این اتحاد و معادلات میدان (۱-۱)، معادله‌ی پایستگی تانسور انرژی-تکانه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (۸-۱)$$

معادلات میدان اینشین را می‌توان از وردش کنش زیر نسبت به متریک نیز بدست آورد:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x + \int \sqrt{-g} L_M d^4x, \quad (۹-۱)$$

جمله‌ی اول این کنش که بخش هندسی معادلات میدان را نتیجه می‌دهد، به کنش اینشتین-هیلبرت معروف است و در جمله‌ی دوم که بخش مادی معادلات میدان را تولید می‌کند، L_M لاگرانژی^۱ ماده می‌باشد و

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} L_M. \quad (۱۰-۱)$$

با مشاهده‌ی معادلات (۱-۲)-(۱-۶) می‌توان نتیجه گرفت که تانسور اینشتین از ترکیب متریک، مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و دوم متریک و همچنین حاصلضرب آنها تشکیل شده است. عبارت دیگر معادلات میدان اینشتین از نوع معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی مرتبه‌ی دوم می‌باشند. از سه دیدگاه متفاوت می‌توان به معادلات میدان اینشتین (۱-۱) نگاه کرد.

۱) معادلات میدان، معادلات دیفرانسیلی برای پیدا کردن تانسور متریک $g_{\mu\nu}$ متناظر با یک تانسور انرژی-تکانه $T_{\mu\nu}$ داده شده می‌باشند. در واقع این یک دیدگاه مایخی است که می‌توان به معادلات میدان داشت، زیرا ابتدا توزیع ماده مشخص می‌شود سپس هندسه‌ی نشات گرفته از این توزیع ماده با استفاده از معادلات میدان بدست می‌آید. مهم‌ترین حالت از معادلات که بسیار مورد توجه قرار می‌گیرد حالت $T_{\mu\nu} = 0$ است، که در آن یافتن جواب‌های خلأ معادلات میدان مد نظر می‌باشد.

۲) معادلات میدان، معادلاتی برای یافتن تانسور انرژی-تکانه متناظر با یک تانسور متریک مشخص می‌باشند. این دیدگاه را بندرت می‌توان بعنوان روش عملی مناسبی برای رسیدن به جواب در نظر گرفت زیرا معمولاً تانسور انرژی-تکانه‌ی حاصل از این رهیافت، غیر فیزیکی بوده و شرایط انرژی-تکانه باید آنها را برآورده کنند را نقض می‌کند.

۳) معادلات میدان شامل ده معادله برای ۲۰ کمیت (ده مولفه‌ی مستقل تانسور متریک و ده مولفه‌ی مستقل تانسور انرژی-تکانه) می‌باشد. اگر بخواهیم بطور همزمان این کمیت‌ها را انتخاب کنیم، می‌توان به معادلات میدان بعنوان قیدهایی بر این انتخاب نگاه کرد. این رهیافت زمانی بکار گرفته می‌شود که بتوان هر دو بخش هندسه و ماده را با استفاده از شرایط فیزیکی مساله، البته بطور ناقص، تعیین کرد. استفاده از معادلات میدان در گام بعدی، هر دو کمیت را بطور دقیق نتیجه می‌دهد.

غیرخطی بودن معادلات میدان اینشتین حل آن را بسیار دشوار نموده است. اصل برهم‌نهی در این معادلات غیرخطی برقرار نیست، بنابراین نمی‌توان با ترکیبی خطی از جواب‌های معادله‌ی میدان به جواب‌های جدیدی برای آن رسید. غیرخطی بودن معادلات میدان را می‌توان نتیجه‌ی اصل هم‌ارزی پنداشت، زیرا طبق این اصل جرم و انرژی هم‌ارزند و میدان گرانشی ناشی از یک چشمه‌ی گرانشی حاوی انرژی و در نتیجه جرم است و این جرم خود می‌تواند چشمه‌ی میدان گرانشی باشد. عبارت دیگر میدان

^۱ Lagrangian

گرانشی با خودش برهمکنش و جفتیدگی پیدا می‌کند. در واقع خود اینشتین پیش‌بینی کرده بود که هرگز کسی قادر به حل و پیدا کردن جوابی دقیق برای معادلات میدانش نخواهد شد. ولی در حدود دو ماه بعد از انتشار نظریه‌ی نسبیت عام، شخصی به نام **کارل شوارتزشیلد**^۱ جواب دقیقی برای معادلات میدان پیدا کرد. البته شوارتزشیلد با وارد کردن فرض تقارن کروی جواب خود را بدست آورد. تاکنون جواب‌های زیادی برای معادلات میدان اینشتین ارائه شده است، که تقریباً تمامی آنها با وارد کردن شرایط تقارن بدست آمده‌اند. در مواردی که تقارن در مساله وجود ندارد یا تقارن وجود دارد ولی برای رسیدن به جواب کافی نیست، باید از روشهای تقریبی استفاده کرد. روشهای تقریبی بر اساس تضعیف میدانهای گرانشی عمل می‌کنند. بطور مثال در فواصل بسیار دور از چشمه‌های گرانشی منزوی، میدان گرانشی تضعیف می‌شود و در نتیجه جملات خطی معادلات میدان مهم‌تر از باقی جملات غیرخطی خواهند شد و می‌توان بطور تقریبی از بقیه‌ی جملات صرف‌نظر کرد و معادلات میدان را بصورت خطی شده نوشت.

یکی از مهمترین مسائلی که همواره در نسبیت عام مورد توجه فراوان قرار گرفته است، مساله اجرام با تقارن کروی و حل معادلات میدان در نواحی بیرونی و داخلی آنها می‌باشد. این اجرام متقارن کروی بیشتر از هر شیء دیگری در عالم یافت می‌شوند، بنابراین براحتی می‌توان نتایج حاصل از نظریه را با مشاهدات رصدی مورد آزمون قرار داد. زمین، خورشید و یا هر ستاره‌ی دیگری را می‌توان بشکل توده‌ای کروی از ماده در نظر گرفت.

سیاهچاله عبارت است از ناحیه‌ای از فضا-زمان، که در آن ناحیه گرانش چنان قوی است که هیچ چیز، حتی امواج الکترومغناطیسی، نمی‌تواند از نیروی جاذبه‌ی آن بگریزد. سیاهچاله‌ها انواع مختلف دارند. برخی از آنها را می‌توان آخرین مرحله از تحول ستارگان سنگین در نظر گرفت، بطوریکه اگر جرم باقیمانده از ستاره بعد از طی مراحل تکامل و انفجار و اتمام سوخت هسته‌ای، به ۲.۳ برابر جرم خورشید برسد بوسیله‌ی نیروی جاذبه‌ی گرانشی خودش، که تنها نیروی باقیمانده است، در خود فرو می‌ریزد. هیچ جسم مادی نمی‌تواند این نهایت درجه‌ی خرد شدن ماده را تحمل کند. بنابراین ستاره بطور کامل متراکم شده و نه تنها الکترون‌ها بلکه نوترون‌های آن نیز درهم می‌شکنند، یعنی حتی بین نوترون‌ها نیز فاصله‌ای باقی نمی‌ماند. این روند کاهش حجم تا جایی ادامه می‌یابد تا حجمش به صفر برسد و در این حالت چگالی بقدری زیاد خواهد شد که مقدارش به بینهایت میل می‌کند. محصول این افزایش شدید چگالی، جاذبه‌ی گرانشی بسیار قوی و خمیدگی شدید فضا-زمان در اطراف سیاهچاله‌ها است. بطوریکه حتی امواج الکترومغناطیسی هم نمی‌توانند از سطح آن خارج شوند. در بخش بعدی این فصل بطور مفصل درباره‌ی علت این پدیده بحث خواهیم کرد. همچنین سیاهچاله‌هایی با اجرامی میلیونی و یا میلیاردها برابر بیشتر از جرم خورشید در مرکز اکثر کهکشانها در نظر گرفته می‌شوند، که نقشی کلیدی در مدل‌های اخیر برای توضیح چگونگی شکل‌گیری کهکشانها، در طی میلیاردها سال، ایفا می‌کنند.

بطور کلی سیاهچاله‌ها دارای سه ویژگی ذاتی جرم، بار و اندازه حرکت زاویه‌ای می‌باشند که بر اساس آنها می‌توان سیاهچاله‌ها را به چهار نوع تقسیم کرد:

(۱) سیاهچاله‌های بدون بار و غیر چرخشی : متریک شوارتزشیلد

(۲) سیاهچاله‌های باردار و غیر چرخشی : متریک رایزنر-نورداشتروم

^۱ Karl Schwarzschild

(۳) سیاهچاله‌های بدون بار و چرخشی : متریک کر

(۴) سیاهچاله‌های باردار و چرخشی : متریک کر- نیومان

در ادامه‌ی این فصل به بررسی جواب‌های معادلات میدان نسبیت عام برای این سیاهچاله‌ها می‌پردازیم.

(۲-۱) متریک شوارتزشیلد

یک جسم متقارن کروی که ایستا و بدون بار الکتریکی است را در نظر می‌گیریم. منظور از ایستا بودن نداشتن حرکت دورانی با گذشت زمان است. فرض می‌کنیم کره‌ای به شعاع R وجود دارد که تمام توزیع جرم در درون آن قرار دارد و فضای اطراف آن خالی و تهی از ماده و انرژی است. عمومی‌ترین متریک ایستا با تقارن کروی که می‌توان برای محیط خلاً بیرون کره نوشت بصورت زیر است:

$$ds^2 = -e^{\nu} dt^2 + e^{\lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (11-1)$$

که در دستگاه مختصات $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$ نوشته شده است. t مختصه‌ی زمانی، r مختصه‌ی شعاعی و ϕ, θ به ترتیب مختصات زاویه‌ای محوری و سمتی می‌باشند. در این متریک $g_{0i} = 0$ و $(i = 1, 2, 3)$. شرط ایستا بودن متریک عدم وابستگی صریح مولفه‌های آن به مختصه‌ی زمانی t می‌باشد، یعنی $\lambda = \lambda(r)$ و $\nu = \nu(r)$.

برای تعیین مجهولات ν, λ از معادلات میدان اینشتین (۱-۱)، که در فضای خلاً بیرون جرم کروی بشکل زیر نوشته می‌شوند، استفاده می‌کنیم:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (12-1)$$

با ضرب دو طرف معادله در $g^{\mu\nu}$ و ادغام روی اندیس‌ها خواهیم داشت:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = R\left(1 - \frac{4}{2}\right) = -R = 0. \quad (13-1)$$

با قرار دادن متریک (۱۱-۱) در معادله (۱۳-۱) و همچنین استفاده از اتحاد بیانکی، معادله‌ی (۷-۱)، مجهولات متریک بدست می‌آیند. محاسبات ریاضی نشان می‌دهند که همواره می‌توان دستگاه مختصاتی یافت، بطوریکه عام‌ترین جواب متقارن کروی برای معادلات میدان خلاً در آن دستگاه مختصات بصورت زیر باشد:

$$ds^2 = -(1 - 2m/r)dt^2 + (1 - 2m/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (14-1)$$

این جواب به عنصر خط شوارتزشیلد معروف است. در این رابطه m یک ثابت انتگرال‌گیری است و نقش مهمی در تعیین خصوصیات فضا-زمان توصیف شده با این متریک دارد. یافتن ارتباط m با جرم سیاهچاله و تفسیر کلاسیکی آن به درک این خصوصیات کمک خواهد کرد.

طبق مکانیک کلاسیک نیوتنی، سرعت لازم بر روی سطح یک توزیع جرم متقارن کروی با جرم کل M و شعاع R برای گریختن از جاذبه‌ی گرانشی و رسیدن به سرعت صفر در بینهایت، سرعتی موسوم به سرعت فرار، v_e است. از قوانین پایستگی انرژی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{mM}{R} = 0. \quad (15-1)$$

سمت چپ این رابطه انرژی مکانیکی ذره‌ای به جرم m که با سرعت شعاعی v_e از سطح توزیع جرم M در حال فرار است، می‌باشد و این انرژی در فضایی بدون تاثیرات گرانشی ناشی از M طبق تعریف برابر صفر است. بنابراین سرعت فرار بصورت زیر بدست می‌آید:

$$v_e^2 = \frac{2GM}{R} \quad (16-1)$$

طبق این رابطه سرعت فرار بصورت تابعی از جرم و شعاع توزیع جرم متقارن کروی بدست می‌آید. اگر ذره‌ای بر روی سطح این توزیع جرم دارای سرعت شعاعی کمتر از v_e باشد سرانجام گرفتار جاذبه‌ی گرانشی M خواهد شد.

برای دیده شدن جسم متقارن کروی توسط ناظری که در فواصل دور و بیرون از اثرات گرانشی قرار دارد نور یا بطور کلی امواج الکترومغناطیسی باید بتواند از سطح آن تا بینهایت انتقال بیابد. با پذیرفتن یک نظریه‌ی ذره‌ای نور و قرار دادن مقدار سرعت نور، c ، بجای v_e بیشترین شعاع لازم برای دیده شدن جسم کروی توسط ناظری که در بینهایت قرار دارد، بصورت زیر بدست می‌آید:

$$R_0 = \frac{2GM}{c^2}, \quad (17-1)$$

بنابراین اگر شعاع توزیع جرم کروی به جرم M در اثر رُمبش گرانشی به مقداری کمتر از R_0 کاهش بیابد، حتی امواج الکترومغناطیسی، که بیشترین سرعت را در طبیعت دارند، هم نمی‌توانند از جاذبه‌ی گرانشی آن فرار کنند.

متریک شوارتزشیلد در حد $r \rightarrow \infty$ به متریک تخت مینکوفسکی نسبت خاص تبدیل می‌شود، این بدان معنی است که جواب خلا متقارن کروی لزوماً بطور مجانبی تخت است. با در نظر گرفتن حد میدان ضعیف، به تفسیر مناسبی برای m می‌توان رسید. برای بدست آوردن ثابت جفت‌شدگی بین هندسه و ماده یعنی ثابت $8\pi G$ در (1-1) از روشی به نام تقریب میدان ضعیف استفاده می‌شود. توجه به این نکته ضروری است که ثابت جفت‌شدگی گرانشی در دستگاه یکای نسبیتی، که در آن $c = 0$ ، برابر $8\pi G$ است ولی در دستگاه یکای غیر نسبیتی مقدارش $\frac{8\pi G}{c^4}$ می‌باشد. روش تقریب میدان ضعیف بدین صورت است که میدان گرانشی را ضعیف در نظر می‌گیرند تا به حد نیوتنی نزدیک شوند، این شرایط در فواصل دور از چشمه‌ی میدان گرانشی حاصل

می‌شود. برای این منظور، متریک $g_{\mu\nu}$ را دارای اختلاف ناچیزی نسبت به متریک مینکوفسکی $\eta_{\mu\nu}$ (فضای تخت) در نظر می‌گیرند، یعنی $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2)$. در این رابطه ε پارامتری بی‌بعد از مرتبه v/c است و v نیز سرعت نوعی اجرام می‌باشد. با قرار دادن متریک $g_{\mu\nu}$ در معادله‌ی ژئودزیکِ زمان‌گونه‌ی حرکت یک ذره‌ی آزمون با سرعتی از مرتبه v و استفاده از تقریب حرکت آهسته، یعنی صرفنظر کردن از مراتب دوم و بالاتر ε ، رابطه‌ی بین g_{00} و پتانسیل گرانشی نیوتنی ϕ بصورت زیر برقرار می‌شود:

$$|g_{00}| = 1 + \frac{2\phi}{c^2} + O(v/c). \quad (18-1)$$

اگر در این رابطه پتانسیل گرانشی ناشی از یک جرم نقطه‌ای به جرم M (قرار گرفته در مرکز مختصات) باشد، یعنی $\phi = -\frac{GM}{r}$ ، آنگاه متریک حاصل از (18-1) متناظر با هندسه‌ی اطراف جسم متقارن کروی خواهد بود، بنابراین از مقایسه‌ی (18-1) و (14-1) مقدار m بصورت زیر بدست می‌آید:

$$m = \frac{GM}{c^2}, \quad (19-1)$$

و در نتیجه $R_0 = 2m$. طبق تعریف (19-1)، m بعد طول دارد به همین دلیل به آن جرم هندسی نیز می‌گویند.

برای میدان‌های گرانشی ضعیف، نسبیت عام قابل تمایز از گرانش نیوتنی نیست و تقریباً هر دو نتایج یکسانی را نتیجه می‌دهند. بنابراین تنها در حضور میدان‌های گرانشی قوی است که گرانش نیوتنی ناکارآمد می‌شود. به جرأت می‌توان گفت که اعتبار نظریه‌ی نسبیت عام ناشی از همخوانی جواب شوارتزشیلد با تمام مشاهدات رصدی است که قبل از مطرح شدن نسبیت عام و با گرانش نیوتنی قابل توجیه نبودند. حرکت تقدیمی مدار گردش عطارد به دور خورشید پدیده‌ای است که از دهه‌ی ۱۸۰۰ شناخته شده است. این پدیده به هیچ وجه با قوانین کلاسیک نیوتنی قابل توجیه نیست. با بدست آوردن معادلات حرکت اجسام در اطراف اجرام کروی، نتایج متفاوتی از گرانش نیوتنی بدست می‌آید. ذرات آزمون در نسبیت عام بر روی ژئودزیک‌های زمان‌گونه حرکت می‌کنند. این ژئودزیک‌ها برای متریک شوارتزشیلد از معادله‌ی زیر و با استفاده از روش وردشی بدست می‌آیند:

$$2K = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -(1 - 2m/r)t^2 + (1 - 2m/r)^{-1}r^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) = -1. \quad (20-1)$$

τ در این رابطه ویژه زمان^۱ است و نقطه‌ی روی پارامترهای t, r, θ, ϕ نشان دهنده مشتق آنها نسبت به ویژه زمان می‌باشد. با استفاده از معادلات اولر-لاگرانژ^۲:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial (2K)}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial (2K)}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (21-1)$$

و حل معادلات دیفرانسیل حاصل، مانند حل کلاسیکی، حرکت بر روی یک صفحه محصور می‌شود. معادله‌ی دیفرانسیلی که حل آن معادله‌ی مسیر حرکت را نتیجه می‌دهد، بصورت زیر است:

¹ Proper time

² Euler-Lagrange

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2. \quad (22-1)$$

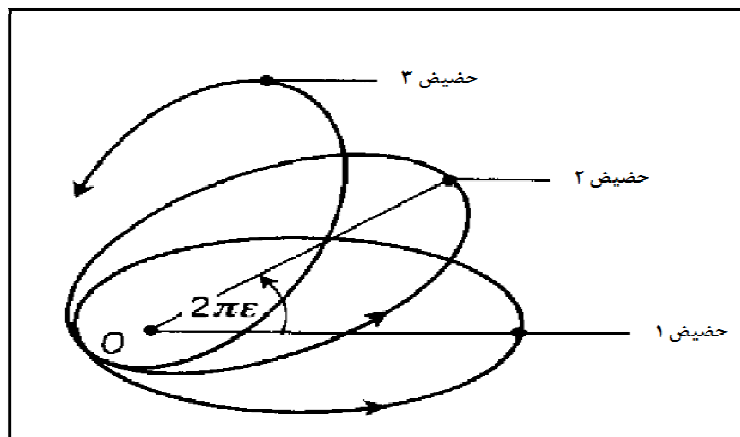
در این رابطه $h = r^2 \dot{\phi}$ ثابت است و $u = \frac{1}{r}$. این معادله با معادل کلاسیکی اش که از گرانش نیوتنی بدست می آید تنها در آخرین جمله اختلاف دارد، یعنی جمله $3mu^2$. از حل معادله ی (22-1) داریم:

$$u(\phi) \cong \frac{m}{h^2} \{1 + e \cos[\phi(1 - \varepsilon)]\} + O(\varepsilon^2). \quad (23-1)$$

در این رابطه $\varepsilon = 3m^2/h^2$ و e مقداری ثابت است که در جواب کلاسیکی، گریز از مرکز نامیده می شود و شکل مسیر حرکت جسم را، بسته به انرژی آن، مشخص می کند. بنابراین برای $e < 1$ حرکت جسم آزمون تقریباً بازهم بیضوی خواهد بود و تناوبی با این تفاوت که دوره ی تناوب دیگر 2π نیست، بلکه $\frac{2\pi}{1-\varepsilon} = 2\pi(1 + \varepsilon)$ می باشد. یعنی به ازای هر دور چرخش، محور بیضی به اندازه ی $2\pi\varepsilon$ نسبت به موقعیت قبلی خود می چرخد. این مقدار در دستگاه واحد غیر نسبیتی برابر با

$$2\pi\varepsilon \cong \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1-e^2)} \quad (24-1)$$

می شود. در این رابطه T دوره تناوب گردش مداری و a نیم محور بزرگ مدار بیضی می باشد. با قرار دادن شرایط خورشید و عطارد در (24-1)، مقدار بدست آمده برای آهنگ حرکت تقدیمی دقیقاً همان مقدار مشاهده شده رصدی است، یعنی 43 ثانیه ی قوسی در قرن. برای سیارات دیگر منظومه ی شمسی که در فواصل دورتری از خورشید قرار دارند میدان گرانشی ضعیف تر است، در نتیجه این حرکت تقدیمی آهسته تر انجام می پذیرد.



شکل (1-1): حرکت تقدیمی مدار گردش سیاره عطارد بدور خورشید

نسبیت عام پیش بینی های جدید دیگری را نیز ارائه می دهد که مشاهده ی آنها دلیل محکمی بر درستی نظریه خواهد بود. خمش نور در عبور از کنار یک جسم گرانشی نمونه ای از این پیش بینی ها است. در واقع خمیدگی فضا-زمان است که نوع حرکت ماده و نور را تعیین می کند. پس نور در حضور میدان گرانشی نمی تواند مسیر مستقیمی را طی کند بلکه بر روی ژئودزیک های نورگونه که توسط متریک فضا-زمان خمیده مشخص می شوند حرکت می کند. مشاهده و بررسی نور ستارگان دور که از میان

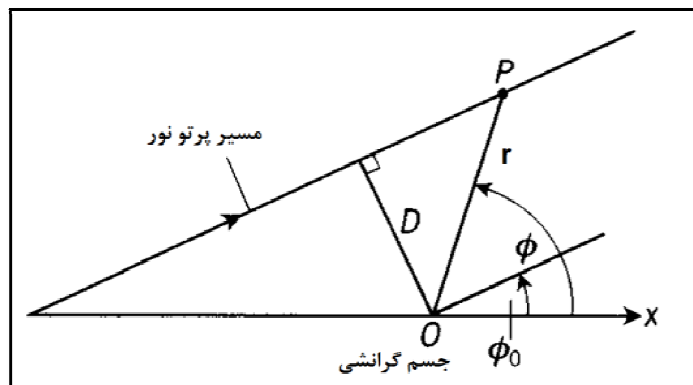
فضا-زمان خمیده‌ی نزدیک به سطح خورشید عبور می‌کند، درستی یا نادرستی این پیش‌بینی را مشخص می‌کند. چون در نسبیت عام پرتوهای نور بر روی ژئودزیک‌های نورگونه حرکت می‌کنند، برای بدست آوردن مسیر حرکت پرتو نور در یک میدان گرانشی متقارن کروی، سمت راست معادله‌ی (۲۰-۱) را برابر صفر قرار می‌دهیم. مشتقات نیز نسبت به یک پارامتر افین^۱ گرفته می‌شود. معادله‌ی متناظر با (۲۲-۱) برای این حالت بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2. \quad (25-1)$$

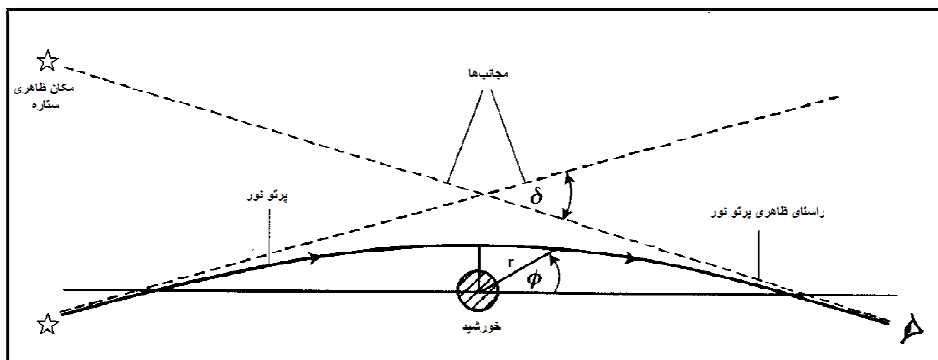
با حل تقریبی این معادله، به معادله‌ی حرکتی متفاوت با نتیجه‌ی کلاسیکی نیوتنی، که مسیر حرکتی مستقیم ناشی از عدم برهمکنش نور با گرانش را پیش‌بینی می‌کند، می‌رسیم:

$$u \cong \frac{\sin \phi}{D} + \frac{m(1+C \cos \phi + \cos^2 \phi)}{D^2}, \quad (26-1)$$

جمله‌ی اول همان نتیجه‌ی کلاسیکی است، D کمترین فاصله‌ی پرتو نور تا مرکز جسم کروی و C نیز یک ثابت انتگرال‌گیری است. شکل‌های (۲-۱) و (۳-۱) نتایج کلاسیکی و نسبیت عام را نشان می‌دهد.



شکل (۲-۱): مسیر حرکت پرتو نور در گرانش نیوتنی



شکل (۳-۱): مسیر خمیده‌ی حرکت پرتو نور از کنار یک جسم متقارن کروی در نظریه‌ی نسبیت عام

¹ Affine

با استفاده از معادله‌ی (۱-۲۶) می‌توان زاویه‌ی انحراف پرتو نور δ را در عبور از کنار یک جسم متقارن کروی، مثلاً خورشید، بدست آورد. این مقدار فقط به D و جرم ستاره وابسته است:

$$\delta = \frac{4m}{D} = \frac{4GM}{c^2 D}. \quad (1-27)$$

این مقدار انحراف برای پرتو نوری که بطور مماس با سطح خورشید از کنار آن عبور می‌کند، $1/75$ ثانیه‌ی قوسی بدست می‌آید. به علت درخشندگی بالای خورشید، مشاهده‌ی این خمش نور با مشکلاتی همراه است. به همین دلیل در سال ۱۹۱۹، درست بعد از جنگ جهانی اول، گروهی به سرپرستی آرتور ادینگتون^۱ برای اولین بار برای ثبت این پدیده در هنگام یک خورشیدگرفتگی کامل عازم شدند. در لحظه‌ی وقوع کسوف، زمانیکه نور خورشید بطور کامل توسط ماه پوشش داده شد، عکس-هایی از ستارگان مجاور خورشید گرفته شد. این عکس‌ها با عکس‌هایی که شش ماه قبل از همان قسمت آسمان، وقتیکه خورشید در قسمت دیگر آسمان بود، گرفته شده بود مقایسه شد. در این آزمایش پیش‌بینی نسبیت عام با دقت خوبی مشاهده شد. البته اکنون مشخص شده است که نتایج مشاهده شده به آن دقت که فکر می‌کردند نبوده است. پدیده‌هایی مانند تاج خورشیدی، خطاهای تقارنی و تارشدگی‌های تصویری، در نتایج تاثیرگذار می‌باشند. تاکنون این اندازه‌گیری‌ها هفت بار تکرار شده است و نتایج از $0/7$ تا $1/55$ برابر پیش‌گویی نسبیت عام متغیر بوده است. آنچه می‌توان گفت این است که مشاهدات بطور کیفی با نسبیت عام سازگارند ولی توافق کمی آنها نامشخص است. با ظهور تلسکوپهای رادیویی بزرگ و کشف چشمه‌های نقطه‌ای امواج الکترومغناطیس به نام کوازارها^۲ مقدار انحراف امواج را می‌توان با روشهای تداخل‌سنجی اندازه‌گیری کرد. مقادیر اندازه‌گیری شده‌ی اخیر بین $1/57$ تا $1/82 \pm 0/2$ ثانیه قوسی است که با دقت بالاتری به نتایج نسبیت عام نزدیک است.

پیش‌بینی دیگر نسبیت عام که باز هم ناشی از تغییر مفهوم گرانش و برهم‌کنشهای گرانشی است، انتقال به سرخ گرانشی نام دارد. بطور کلی هر نظریه‌ی نسبیتی گرانش که اصل هم‌ارزی را در خود داشته باشد، انتقال به سرخ گرانشی را نیز به همراه دارد. بعنوان مثال نوری که از خورشید بسمت زمین تابیده می‌شود، تحت تاثیر جاذبه‌ی گرانشی خورشید دچار افزایش طول موج یا همان انتقال به سرخ می‌شود. مقدار انتقال به سرخی که یک پرتو نور در عبور از یک فضا-زمان ایستا پیدا می‌کند، در حد میدان ضعیف، برابر مقدار زیر است:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v-v_0}{v_0} \cong -\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1-28)$$

یعنی در حضور جسم گرانشی به جرم M در مرکز مختصات، فرکانس نوری که با فرکانس v_0 از فاصله‌ی شعاعی r_1 ساطع می‌شود در مکان r_2 به اندازه‌ی Δv متفاوت با v_0 است. بنابر این اگر $r_1 < r_2$ آنگاه $\Delta v < 0$ ، یعنی فرکانس بسمت قرمز انتقال می‌یابد. جالب توجه است که این نتیجه بدون استفاده از معادلات میدان بدست آمده است. برای آزمودن این پیش‌بینی نسبیت عام، بدلیل شناخت اندکی که از ساختار جزیی خورشید و اتمسفرش داریم، نظرها بیشتر به سمت آزمونهای زمینی معطوف شد. در این راستا

¹ Arthur Eddington

² quasar (quasi-stellar)