دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

بررسی حوزه‌های تجزیه یکتا

استادان راهنما

دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده و دکتر البرز آذرنگ

پژوهشگر

طیبه طاهری

بهمن ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: طاهری نام: طیبه

عنوان: بررسی حوزه‌های تجزیه یکتا

استادان راهنما: دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده و دکتر البرز آذرنگ

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: شهید چمران اهواز دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۸۳

واژگان کلیدی: حوزه‌های تجزیه یکتا، حوزه نیم‌تجزیه، اتمیک، عنصر تحویل‌ناپذیر، بسته‌ی صحیح

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به بررسی حوزه‌های تجزیه یکتا و حوزه‌های تجزیه می‌پردازیم. حوزه تجزیه R را حوزه نیم‌تجزیه (HFD) گوییم، اگر برای هر عنصر غیرصفر غیریکه داشته باشیم $a_1a_2\ldots a_n = b_1b_2\ldots b_m$، به‌طوری که a_i ها و b_j ها در R تحویل‌ناپذیر باشند، آن‌گاه $n = m$. سپس ویژگی‌های حوزه‌های نیم‌تجزیه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هم‌چنین حوزه تجزیه R را $OHFD$ می‌نامیم، اگر $a_1a_2\ldots a_n = b_1b_2\ldots b_n$، که در آن a_i ها و b_j ها در R تحویل‌ناپذیر باشند، آن‌گاه هر کدام از عناصر a_i ها حداقل با یکی از عناصر b_j ها شریک باشد. در پایان نشان می‌دهیم حوزه‌های $OHFD$ با UFD ها معادل هستند.

تقدیم به همه کسانی که لحظه ای بعد انسانی و وجدانی خود را فراموش نمی کنند

و بر آستان گران سنگ انسانیت سر فرود می آورند

و انسان را با همه تفاوت هایش ارج می نهند

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استادان راهنمای خود، جناب آقای دکتر امید علی کرم‌زاده و جناب آقای دکتر البرز آذرنگ، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده این بزرگواران، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
همچنین لازم می‌دانم که از تمامی اساتید مهربانم صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که در تمامی طول تحصیل با کمک‌های بی شائبه‌ی خود مرا مورد لطف و عنایت قرار داده و زمینه را برای پیشرفت اینجانب فراهم آورده‌اند.
و سپاس‌گزارم از تمام دوستانم که به هر گونه مرا یار شدند و همواره حضور گرم و سبزشان را احساس کردم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، وجود مقدسشان را ستایش می‌کنم.

طیبه طاهری
بهمن ۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیشگفتار

همان‌طور که می‌دانید حوزه صحیح R را یک حوزه تجزیه یکتا (UFD) می‌نامیم، اگر هر عنصر غیرصفر غیریکه‌ی R را بتوان به عناصر تحویل‌ناپذیر تجزیه کرد و اگر داشته باشیم:

$$a_۱ a_۲ \dots a_n = b_۱ b_۲ \dots b_m$$

به‌طوری که a_i ها و b_j ها در R تحویل‌ناپذیر باشند، آن‌گاه:

(۱) $n = m$؛

(۲) به‌علاوه هرگاه

$$a_۱ a_۲ \dots a_n = b_۱ b_۲ \dots b_n$$

که در آن a_i ها و b_j ها در R تحویل‌ناپذیراند، آن‌گاه هر کدام از عناصر a_i ها حداقل با یکی از عناصر b_j ها شریک باشد. در واقع R را یک حوزه UFD گوییم اگر تجزیه باشد و در شرط (۱) و (۲) صدق کند. حوزه‌های تجزیه را که در شرط (۱) صدق کند را حوزه‌های نیم‌تجزیه (HFD) می‌نامیم و حوزه‌های تجزیه‌ای که در شرط (۲) آن صدق کند را $OHFD$ می‌نامیم. در فصل اول به یادآوری مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم و ویژگی‌های حوزه‌های تجزیه یکتا و حوزه‌های نیم‌تجزیه را بیان می‌کنیم. در این پایان‌نامه قصد داریم به بررسی توسیع‌های حوزه‌های نیم‌تجزیه بپردازیم. علی‌رغم حوزه‌های تجزیه یکتا که خاصیت آن روی حلقه‌های چندجمله‌ای آن و یا بستار صحیح آن حفظ می‌شود در حوزه‌های نیم‌تجزیه به این صورت نمی‌باشد، برای این منظور مثال‌هایی را آورده‌ایم که لزوما این خواص را حوزه‌های نیم‌تجزیه

حفظ نمی‌کنند. در انتهای فصل اول نشان می‌دهیم اگر $R[x]$ یک HFD باشد آن‌گاه R در میدان کسرهایش بسته صحیح خواهد بود و به‌واسطه این قضیه نشان می‌دهیم در حلقه‌های نوتری، HFD بودن حلقه‌های $R[x]$ با HFD بودن حلقه‌های $R[x_1 \dots x_n]$ معادل می‌باشند. همان‌طور که در قبل اشاره شد، بستار صحیح یک حوزه نیم‌تجزیه لزوماً نیم‌تجزیه نمی‌باشد. در فصل دو در طی چند مرحله حلقه‌ای را می‌سازیم و نشان می‌دهیم که حوزه نیم‌تجزیه است ولی بستار صحیح آن نیم‌تجزیه نیست. توجه داشته باشیم که در حوزه‌های کرول، توسیع یک حوزه نیم‌تجزیه، نیم‌تجزیه می‌باشد ولی در حالت کلی به این صورت نمی‌باشد ولی فقط در حد یک حدس، با افزودن فرض‌هایی، می‌توان مطرح کرد که توسیع یک حلقه HFD خاصیت نیم‌تجزیه بودن را حفظ می‌نماید. در ادامه فصل دوم به اصلاح این حدس می‌پردازیم و مرز نگاشت را روی میدان کسرهای یک حوزه نیم‌تجزیه تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم اگر مرز نگاشت تمام عناصر تحویل‌ناپذیر زیرحلقه یک حوزه نیم‌تجزیه، یک باشد، می‌توان نتیجه گرفت زیرحلقه‌ی آن حوزه نیز نیم‌تجزیه است.

در فصل سوم به حوزه‌های $OHFD$ می‌پردازیم و بررسی می‌کنیم این حوزه‌ها تا چه اندازه به حوزه‌های تجزیه یکتا نزدیک می‌باشد و نشان می‌دهیم که در واقع هر $OHFD$ یک HFD می‌باشد و بنابراین $OHFD$ با UFD معادل می‌باشد. از این‌رو برای این‌که بررسی کنیم حلقه‌ای UFD است کافی‌است شرط دوم آن را مورد بررسی قرار بدهیم.

لازم به ذکر است که این پایان‌نامه برگرفته از دو مقاله‌ی « بستار صحیح حوزه نیم‌تجزیه» و مقاله‌ی «حوزه تحزیه یکتا» نوشته جیم کویکندل می‌باشد که مقاله‌ی اول در سال (۲۰۰۳) و مقاله‌ی دوم در سال (۲۰۱۱) چاپ و نشر یافته‌اند. به مراجع [۱۷] و [۱۸] نگاه کنید.

فصل ۱
تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی را بیان می‌کنیم. از جمله دامنه ارزیاب را تعریف می‌کنیم و در ادامه به معرفی حلقه‌های ارزیاب گسسته می‌پردازیم. در بخش بعدی دامنه‌های ددکیند و کرول را به همراه قضایای اساسی آن‌ها بیان می‌کنیم. سپس گروه کلاسی را معرفی کرده و ارتباط آن را با حوزه‌های ایدال اصلی ذکر می‌کنیم. در ادامه به معرفی حوزه‌های تجزیه یکتا می‌پردازیم. نشان می‌دهیم هر حوزه تجزیه یکتا در میدان کسرهایش بسته‌ی صحیح است. هم‌چنین به ذکر خواصی از حوزه‌های تجزیه یکتا می‌پردازیم. به عنوان مثال، موضع‌سازی یک حوزه تجزیه یکتا، حوزه تجزیه یکتا می باشد. سرانجام مبحث آن قسمت را با مثالی از یک حوزه تجزیه که حوزه تجزیه یکتا نباشد به پایان می‌رسانیم. سپس به معرفی حوزه‌های نیم‌تجزیه می‌پردازیم و قضایای مهم آن‌ها را ذکر می‌کنیم. در واقع قضایایی را مطرح می‌کنیم که به واسطه‌ی آنها بتوان در شناخت حوزه‌های نیم‌تجزیه کمک کرد و در راستای آن مثال‌هایی از این‌گونه از حوزه‌ها خواهیم آورد. هم‌چنین از حوزه‌هایی که نیم‌تجزیه هستند ولی تجزیه یکتا نمی‌باشند مثال‌هایی مطرح می‌کنیم. خاطر نشان می‌کنیم که بر خلاف حوزه‌های تجزیه یکتا، توسیع حوزه‌های نیم‌تجزیه، لزوماً نیم‌تجزیه نمی‌باشند.

از این رو مثالی از یک حوزه نیم‌تجزیه می‌آوریم به‌طوری که حلقه چندجمله‌ای‌های آن حوزه‌ی نیم‌تجزیه نباشد. در بخش ۱.۴ این فصل به حلقه‌های چندجمله‌ای با خواص نیم‌تجزیه‌ای می‌پردازیم. در گزاره‌ای خواهیم دید که اگر $R[x]$ یک حوزه نیم‌تجزیه باشد، آن‌گاه حلقه R یک حوزه نیم‌تجزیه می‌باشد و یک بسته‌ی صحیح در میدان کسرهایش می‌باشد از این رو نتیجه می‌گیریم اگر R یک حلقه نوتری باشد، آن‌گاه این شرایط برقرارند: (۱) R یک دامنه کرول با $|Cl(R)| \leq ۲$؛ (۲) $R[x]$ یک HFD است؛ (۳) $R[x_۱, \ldots, x_n]$ یک HFD است برای هر $n \geq ۱$؛ (۴) $n \geq ۱$ وجود دارد که $R[x_۱, \ldots, x_n]$ یک HFD است.

۲.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه و x یک مجهول (متغیری مستقل) روی R باشد. فرض کنید $R[x]$ مجموعه چندجمله‌ای‌ها بر حسب x، با ضرایب در R باشد. یعنی

$$R[x] = \{a_۰ + a_۱x + \ldots + a_rx^r : a_i \in R, r \in \mathbb{Z}^+\}.$$

فرض کنید $f(x) = a_۰ + a_۱x + \ldots + a_rx^r$ و $g(x) = b_۰ + b_۱x + \ldots + b_sx^s$ چندجمله‌ای‌های دلخواهی در $R[x]$ باشند. در این صورت $f(x) = g(x)$ اگر و تنها اگر $r = s$ و برای هر i که $۰ \leq i \leq r$، $a_i = b_i$. هم‌چنین اگر $r \leq s$، $R[x]$ با عمل جمع و ضرب زیر تشکیل حلقه می‌دهد.

$$f(x) + g(x) = (a_۰ + b_۰) + (a_۱ + b_۱)x + \ldots + (a_r + b_r)x^r + b_{r+۱}x^{r+۱} + \ldots + b_sx^s$$

و $f(x)g(x) = \sum_{k=۰}^{r+s} c_kx^k$ که در آن $c_k = \sum_{i=۰}^{k} a_ib_{k-i}$. در حالت خاص، $a_۰ + a_۱x + \ldots + a_rx^r = ۰$ اگر و تنها اگر برای هر i، $a_i = ۰$. هرگاه $p(x) = a_۰ + a_۱x + \ldots + a_rx^r \neq ۰$ و $a_r \neq ۰$، آن‌گاه a_r را ضریب پیشروی $p(x)$ و r را درجه $p(x)$ می‌نامند. درجه $p(x)$ را با $deg\ p(x)$ نشان می‌دهند. هم‌چنین $a_۰$ را جمله ثابت $p(x)$ می‌نامند. یک

چندجمله‌ای که جمله ثابت آن صفر باشد را چندجمله‌ای با ثابت صفر می‌نامند. هم‌چنین چندجمله‌ای غیرصفری که ضریب پیشروی آن ۱ است، چندجمله‌ای تکین نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. هرگاه R یک حلقه باشد، خلقه چندجمله‌ای‌ها با n متغیر $x_{1},\dots,x_n$، به‌طور استقرایی تعریف می‌شود. حلقه $R[x_{1}]$ همان حلقه $R[x]$ است و حلقه چندجمله‌ای‌ها با n متغیر $x_{1},\dots,x_n$، حلقه چندجمله‌ای‌ها با متغیر x_n روی حلقه $R[x_{1},\dots,x_{n-1}]$ می‌باشد. این حلقه را با $R[x_{1},\dots,x_n]$ نشان می‌دهند و داریم:

$$R[x_{1},\dots,x_n]=\{f=\sum a_i x_{1}^{i_{1}}\dots x_n^{i_n}|a_i\in\mathbb{R}; i_j\in\mathbb{Z}^{+}\}.$$

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنیم $f(x)=a_{0}+a_{1}x\dots+a_nx^n$ و $g(x)=b_{0}+b_{1}\dots+b_mx^m$ دو عنصر از $R[x]$ باشند که R یک میدان است و a_n و b_m عناصری ناصفر از F بوده و $m>0$. در این صورت چندجمله‌ای‌های منحصر به فرد $q(x)$ و $r(x)$ در $R[x]$ وجود دارند به‌طوری که $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ که در آن $r(x)=0$ یا درجه‌ی $r(x)$ از درجه‌ی $g(x)$ کمتر است.*

برهان. به [۲] قضیه ۱.۶.۵ مراجعه شود. □

تعریف ۴.۲.۱. چندجمله‌ای غیر ثابت $f(x)\in R[x]$ را تحویل‌ناپذیر گویند، هرگاه $f(x)=g(x)h(x)$ در این صورت یا درجه $h(x)$ صفر می‌باشد یا درجه $g(x)$.

تعریف ۵.۲.۱. به ازای $f(x),g(x)\in R[x]$ گوییم $g(x)$ چندجمله‌ای $f(x)$ را در $R[x]$ عاد می‌کند اگر $q(x)\in R[x]$ یافت شود به‌طوری که $f(x)=g(x)q(x)$.

قضیه ۶.۲.۱. *گیریم R یک میدان باشد. فرض کنیم $p(x)$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر در $R[x]$ باشد. هرگاه $p(x)$ حاصل‌ضرب $r(x)s(x)$ را به ازای $r(x),s(x)\in R[x]$ عاد کند، آن‌گاه $p(x)$ یا $r(x)$ یا $s(x)$ را عاد خواهد کرد.*

برهان. به [۲] قضیه ۱۸.۶.۵ مراجعه شود. □

قضیه ۷.۲.۱. *هرگاه R میدان باشد، آن‌گاه هر چندجمله‌ای غیر ثابت $f(x) \in R[x]$ را می‌توان در $R[x]$ به حاصل‌ضربی از چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر تجزیه کرد و این تجزیه در حد ترتیب و عوامل یکه منحصربه‌فرد است.*

برهان. به [۲] قضیه ۲۰.۶.۵ مراجعه شود. □

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از R است. S را یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه R می‌گویند، هرگاه $1 \in S$ و $0 \notin S$ و برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $xy \in S$.

مثال ۹.۲.۱. اگر P ایدال اولی از حلقه R باشد، آن‌گاه $S = R \setminus P$ یک مجموعه بسته ضربی است. زیرا $1 \notin P$ بنابراین $1 \in R \setminus P$ و $0 \in P$ پس $0 \notin S$. حال باید نشان دهیم که اگر $s_1, s_2 \in S$، آن‌گاه $s_1 s_2 \in S$. فرض کنید $s_1 s_2 \notin S$، از این‌رو $s_1 s_2 \in P$ و چون P ایدال اول است در نتیجه $s_1 \in P$ یا $s_2 \in P$، که تناقض است. بنابراین $s_1 s_2 \in S$.

مثال ۱۰.۲.۱. هرگاه $\{P_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از ایدال‌های اول حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه مشابه مثال بالا می‌توان نشان داد که $S = R \setminus \bigcup_{i \in I} P_i$ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه R است.

لم ۱۱.۲.۱. *فرض کنید S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای هر $(a, s), (b, t) \in R \times S$*

$$(a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow \exists u \in S : u(ta - sb) = 0$$

در این صورت $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

برهان. به [۱۶] قضیه ۲.۴.۳ مراجعه شود. □

ملاحظه ۱.۲.۱۲. (۱) *با فرضیات بالا، به ازای* $(a,s)\in R\times S$*، رده‌ی هم‌ارزی شامل* (a,s) *را با* $\frac{a}{s}$ *و مجموعه تمام رده‌های هم‌ارزی* $\sim$ *را با* R_S *نمایش می‌دهند. در این صورت* $S^{-1}R$ *تحت عمل‌های*

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t}=\frac{ab}{st} \quad و \quad \frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{ta+sb}{st}$$

به ازای a,b *های متعلق به* R *و* s,t *های متعلق به* S*، حلقه‌ای تعویض‌پذیر است. این حلقه جدید را که با* R_S *یا* $S^{-1}R$ *نشان می‌دهند، حلقه‌ی کسرهای* R *نسبت به* S *می‌نامند. معمولاً آن را موضع‌سازی* R *نسبت به* S *نیز می‌نامند.*

(۲) *همانی جمعی حلقه‌ی* R_S*،* $0/1$ *وهمانی ضربی آن* $1/1$ *است.*

(۳) *فرض کنید* $a\in R$ *و* $s\in S$*، در این صورت* $a/s=0_{R_S}$ *اگر و تنها اگر* $t\in S$ *وجود داشته باشد که* $t(1a-s0)=0$*. یعنی* $ta=0$*.*

(۴) $f:R\longrightarrow R_S$ *با ضابطه‌ی* $f(a)=a/1$ *برای هر* $a\in R$*، هم‌ریختی طبیعی نامیده می‌شود و*

$$ker(f)=\{a\in R|ta=0 \text{ که باشد موجود } t\in S\}.$$

(۵) *اگر* S *یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی* R *و* $f:R\longrightarrow R_S$ *هم‌ریختی طبیعی باشد، آن‌گاه:*

(الف) *برای هر* $s\in S$*،* $f(s)=s/1$ *در* R_s *یکال است و* $1/s$ *وارون آن است.*

(ب) *هر عضو* a/s *از حلقه‌ی* R_S *که در آن* $a\in R$ *و* $s\in S$ *را می‌توان به صورت* $a/s=f(a)(f(s))^{-1}$ *نوشت. زیرا:* $a/s=(a/1)/(s/1)=(a/1)\cdot(s/1)^{-1}=f(a)(f(s))^{-1}$*.*

گزاره ۱.۲.۱۳. *هرگاه* R *یک حلقه و* S *یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی در* R *باشد، آن‌گاه ایدال‌های* R_S *دقیقاً به فرم* I_S *اند که* $I\trianglelefteq R$*. به‌علاوه* $I_S=R_S$ *اگر وتنها اگر* $I\cap S\neq\emptyset$*.*

برهان. به [۱] گزاره ۴.۸ مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۱۴. گیریم R یک حلقه تعویض‌پذیر باشد. $Spec(R)$ را نشان‌دهنده‌ی مجموعه تمام ایدال‌های اول R است. هم‌چنین مجموعه تمام ایدال‌های ماکسیمال حلقه R را با $Max(R)$ و مجموعه عناصر یکه در حلقه R را با $U(R)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۱۵. *هرگاه R یک حلقه و S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی در R باشد، آن‌گاه*

$$Spec(R) = \{P_S | P \in Spec(R), P \cap S = \emptyset\}$$

و در واقع تناظر دوسویی حافظ شمول بین دو مجموعه‌ی زیر وجود دارد:

$$\sum = \{P \in Spec(R) | P \cap S = \emptyset\} \longrightarrow Spec(R_S)$$

$$P \longrightarrow P_S$$

هم‌چنین

$$Max(R_S) = \{Q_S | Q \in Max(\sum)\}$$

برهان. به [۱۱] گزاره ۳.۱۱ مراجعه شود. □

قضیه ۱.۲.۱۶. *فرض کنیم R و $I, J, K \trianglerighteq R$ باشد و $P_1, \ldots P_n \in Spec(R)$ برای $n \geq 0$ به‌طوری که $K \subseteq I \cup J \cup P_1 \cup \ldots \cup P_n$. در این صورت K در یکی از ایدال $I, J, P_1, \ldots, P_n$ قرار دارد.*

برهان. به [۱۱] قضیه ۱.۱۱ مراجعه شود. □

ملاحظه ۱.۲.۱۷. *هرگاه S_1 و S_2 مجموعه‌های بسته‌ی ضربی در دامنه‌ی R باشند که $S_1 \subset S_2$، آن‌گاه $R_{S_1} \subseteq R_{S_2}$. هم‌چنین اگر P و Q ایدال‌های اول باشند که $P \subseteq Q$، لذا چون $R \setminus Q \subseteq R \setminus P$، از این رو $R_Q \subseteq R_P$.*

تذکر ۱۸.۲.۱. (۱) *اگر حلقه R یک حوزه صحیح باشد و $S = R\backslash\{0\}$ زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد، در این صورت حلقه کسرهای R نسبت به S دقیقاً همان میدان کسرهای R است و آن را با $Q(R)$ نشان می‌دهند. زیرا $R_S = \{\frac{r}{s}|r \in R, s \in R, s \neq 0\} = Q(R)$.*

(۲) *هرگاه R یک حوزه‌ی صحیح باشد و در حلقه R_S به ازای $a, b \in R$ و $s, s' \in S$ داشته باشیم $\frac{a}{s} = \frac{b}{s'}$، آن‌گاه مطابق تعریف $t \in S$ وجود دارد که $t(as' - bs) = 0$ زیرا از آن‌جا که R حوزه است و $t \neq 0$ پس $as' = bs$.*

(۳) *اگر X یک مجموعه بسته ضربی در حوزه‌ی R باشد، آن‌گاه*

$$R \subseteq R_X \subseteq Q(R).$$

به بیان دیگر، تمام موضع‌سازی‌های R شامل R هستند و در $Q(R)$ قرار دارند. زیرا با توجه به ملاحظه ۱۲.۲.۱ ، کافی است نشان دهیم هم‌ریختی f یک به یک است. گیریم برای $r \in R$ دلخواه، $f(r) = r/1 = 0$ از این رو یک $t \in X$ وجود دارد به‌طوری که $rt = 0$ و این ایجاب می‌کند $r = 0$. بنابراین f یک به یک است و $R \subseteq R_X$.

تعریف ۱۹.۲.۱. حلقه‌ی R را که دقیقاً یک ایدال ماکسیمال دارد حلقه‌ی شبه‌موضعی می‌نامیم. هرگاه R، نوتری نیز باشد، آن را موضعی می‌نامیم. در این صورت هرگاه M ایدال ماکسیمال یگانه‌ی R باشد، می‌نویسیم (R, M). به‌وضوح در این حالت $U(R) = R \setminus M$ و R/M را هیات یا میدان باقیمانده‌ای R می‌نامیم. حلقه‌ای که فقط تعداد متناهی ایدال ماکسیمال دارد را شبه‌نیمه‌موضعی می‌نامیم.

مثال ۲۰.۲.۱. اگر R یک حلقه و $P_1, \ldots, P_n \in Spec(R)$ و $S = R \setminus \bigcup_{i=1}^n P_i$. در این صورت R_S یک حلقه شبه‌نیمه‌موضعی است. زیرا ابتدا توجه کنید که مطابق قضیه ۱۵.۲.۱ داریم:

$$Spec(R_S) = \{P_S|P \in Spec(R), P \cap S = \emptyset\} = \{P_S|P \in Spec(R), P \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i\}$$

$= \{P_S | P \in Spec(R), P \subseteq P_i\}$

در نتیجه $Max(R_S) = \{S^{-1}P_1, \dots, S^{-1}P_n\}$. در حالت خاص هرگاه $n = 1$ و $P = P_1$، آن‌گاه معمولاً حلقه‌ی کسرهای R_S را با R_P نشان می‌دهیم. حال واضح است که $Max(R_P) = \{P_P\}$. لذا R_P حلقه‌ای شبه موضعی است.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه است. اشتراک همه ایدال‌های ماکسیمال R را رادیکال جیکوبسن R می‌نامیم و با $J(R)$ نمایش می‌دهیم. به وضوح در حلقه شبه‌موضعی R با ایدال ماکسیمال یگانه‌ی M داریم: $J(R) = M$.

ملاحظه ۲۲.۲.۱. *گیریم R یک حلقه باشد. می‌توان نشان داد که $1 + J(R) \subseteq U(R)$. واضح است که اگر حلقه R شبه‌موضعی باشد با ایدال ماکسیمال M، آن‌گاه $1 + M \subseteq U(R)$.*

تذکر ۲۳.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه و S، مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی باشد. می‌توان نشان داد که $(R[x])_S \cong R_S[x]$.*

تعریف ۲۴.۲.۱. میدان F را توسیع میدان K گوییم، هرگاه K زیرمیدان F باشد و می‌نویسیم $K \subseteq F$ و آن را یک توسیع از میدان‌ها می‌نامیم. در این صورت F یک فضای برداری روی K است که بعد آن را با $[F : K]$ نمایش می‌دهیم. F را یک توسیع متناهی یا نامتناهی گوییم، هرگاه $[F : K]$ متناهی یا نامتناهی باشد.

تعریف ۲۵.۲.۱. اگر T حلقه‌ای باشد که شامل حلقه R به عنوان زیرحلقه باشد، آنگاه T را یک توسیع حلقه‌ای از R می‌نامیم.

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنیم T یک توسیع از حلقه R باشد. در این صورت $x \in T$ را روی R صحیح می‌نامیم هرگاه x ریشه یک چندجمله‌ای تکین (ناصفر) روی R باشد. یعنی وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ و $a_{n-1}, \dots, a_0 \in R$ به طوری که $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$.

مثال ۲۷.۲.۱. هرگاه $R \subseteq T$ یک توسیع حلقه‌ای باشد، هر عضو از مجموعه پوچ توان‌های T روی R صحیح است. زیرا اگر x عضو پوچ توانی از T باشد، وجود دارد n، که $x^n = ۰$. بنابراین چندجمله‌ای تکین را، $f(t) = t^n \in R[t]$ در نظر می‌گیریم.

مثال ۲۸.۲.۱. هرگاه $t \in R$ آنگاه t روی R صحیح است. زیرا چندجمله تکین $f(x) = x - t \in R[x]$ وجود دارد به طوری که داریم $f(t) = ۰$.

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنیم T توسیعی از حلقه R باشد. مجموعه تمام عناصری از T که روی R صحیح باشند را با $\overline{R}$ یا R'_T نمایش می‌دهیم و آن را بستار صحیح R در T می‌نامیم. اگر $R = R'_T$ آنگاه R را در T بسته صحیح می‌نامیم. و توسیع $R \subseteq T$ را توسیع بسته صحیح می‌نامیم و اگر هر عضو $x \in T$ روی R صحیح باشد در این صورت توسیع T روی Rرا یک توسیع صحیح می‌نامیم.

مثال ۳۰.۲.۱. $\mathbb{Q}$ یک توسیعی از حلقه $\mathbb{Z}$ می‌باشد. اگر $x \in \mathbb{Q}$ روی $\mathbb{Z}$ صحیح باشد آنگاه $x \in \mathbb{Z}$ در نتیجه $\mathbb{Z}$ یک بسته صحیح می‌باشد.

گزاره ۳۱.۲.۱. *هرگاه $R \subseteq T$ توسیعی از حلقه‌ها باشد و $u, v \in T$ روی R صحیح باشند، در این صورت $u + v$ و uv نیز روی R صحیح هستند. بنابراین $\overline{R}$ یک زیرحلقه از T شامل R است.*

برهان. به [۷] قضیه ۱۳ مراجعه شود. □

مثال ۳۲.۲.۱. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[i]$ که $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | i^۲ = -۱; a, b \in \mathbb{Z}\}$ یک توسیع صحیح است. زیرا $i^۲ + ۱ = ۰$، پس i روی $\mathbb{Z}$ صحیح است. از طرفی a, b نیز روی $\mathbb{Z}$ صحیح هستند پس بنابر گزاره ۳۱.۲.۱، $a + bi$ برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$ روی $\mathbb{Z}$ صحیح است.

قضیه ۱.۲.۳۳. *فرض کنید $R \subseteq T$ توسیعی از حلقه‌ها باشد و u عضوی از یک حلقه شامل T باشد. فرض کنید u روی T صحیح باشد و T روی R صحیح باشد، آن‌گاه u روی R صحیح است.*

برهان. به [۷] قضیه ۴۰ مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۳۴. حوزه صحیح R را بسته صحیح می‌نامیم هرگاه R در میدان کسرهایش بسته صحیح باشد.

مثال ۱.۲.۳۵. هر PID یک حوزه بسته صحیح است زیرا بنا به ۱.۵.۱۵ هر حوزه تجزیه یکتا یک حوزه بسته صحیح است و از آن‌جایی که هر PID یک حوزه تجزیه یکتا است، می‌توان نتیجه گرفت یک حوزه بسته صحیح نیز می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۳۶. گیریم R یک حوزه صحیح با میدان کسرهای K باشد، عنصر $x \in K$ را تقریباً صحیح روی D می‌نامیم اگر یک عنصر غیرصفر $y \in D$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $n \geq ۰$، $yx^n \in D$.

تعریف ۱.۲.۳۷. اگر R یک زیرحلقه از S باشد، مجموعه زیرحلقه‌های S که شامل R هستند را با $[R, S]$ نشان می‌دهند. عضوهای $[R, S]$، $S-$ زبرحلقه‌های R گفته می‌شوند. در حالتی که S حلقه کسرهای R باشد، یک $S-$ زبرحلقه از R یا به‌طور ساده یک زبرحلقه R گفته می‌شود.

مثال ۱.۲.۳۸. اگر K میدان کسرهای R باشد، $\overline{R}$ یک زبرحلقه R است. زیرا $R \leq \overline{R} \leq K$.

تعریف ۱.۲.۳۹. K را یک میدان عددی گوییم هرگاه یک توسیع متناهی از $\mathbb{Q}$ باشد.

مثال ۱.۲.۴۰. $\mathbb{Q}$ یک میدان عددی است.

مثال ۴۱.۲.۱. $\mathbb{Q}(i)$ یک میدان عددی نابدیهی می‌باشد.

تعریف ۴۲.۲.۱. عدد جبری در میدان عددی K عنصر $\alpha \in K$ است به‌طوری که روی $\mathbb{Z}$ صحیح باشد.

مثال ۴۳.۲.۱. $i \in \mathbb{Q}(i)$ یک عدد جبری است، از آن‌جایی که در چندجمله‌ای $x^۲ + ۱$ صدق می‌کند.

مثال ۴۴.۲.۱. هر عنصر از $\mathbb{Z}[\sqrt{-۵}]$ را می‌توان به فرم $a + b\sqrt{-۵}$ نوشت که $a, b \in \mathbb{Z}$. همانند مثال ۸.۴.۱، $a, b, \sqrt{-۵}$ روی $\mathbb{Z}$ صحیح می‌باشند. از این رو می‌توان نشان داد که هر عنصر از $\mathbb{Z}[\sqrt{-۵}]$ اعداد جبری می‌باشد.

تعریف ۴۵.۲.۱. اگر K یک میدان عددی باشد، در این صورت بستار صحیح $\mathbb{Z}$ در K را حلقه اعداد جبری از K می‌نامیم و با $\mathcal{O}_K$ نشان می‌دهیم.

مثال ۴۶.۲.۱. با توجه به اینکه $\mathbb{Q}$ توسیعی از $\mathbb{Z}$ است و $\mathbb{Z}$ بسته صحیح در $\mathbb{Q}$ می‌باشد، بنابراین حلقه اعداد جبری از $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Z}$ می‌باشد.

ملاحظه ۴۷.۲.۱. *گیریم $d \in \mathbb{Z} \setminus \{۰, ۱\}$ خالی از مربع، و قرار دهیم $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. گیریم $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$، می‌توان نشان داد که α یک عدد جبری است اگر و تنها اگر*

(۱) $(d \equiv ۲$ یا $۳ (mod\ ۴))$ $\alpha = a + b\sqrt{d}$ برای $a, b \in \mathbb{Z}$.

(۲) $(d \equiv ۱\ (mod\ ۴))$ $\alpha = a + b\frac{-۱+\sqrt{d}}{۲}$ برای $a, b \in \mathbb{Z}$.

بنابراین،

$$\begin{cases} \mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d} = \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & d \equiv ۲, ۳\ (mod\ ۴) \\ \mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{-۱+\sqrt{d}}{۲} \neq \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & d \equiv ۱\ (mod\ ۴) \end{cases}$$

در حالت (۱) یک اصل کلی مهم را نشان می‌دهد: اگر α یک عدد جبری باشد حلقه اعداد جبری از میدان عددی $\mathbb{Q}(\alpha)$ ممکن است به‌طور اکید از $\mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}]$ بزرگتر شود.

برهان. به [۱۳] گزاره ۴.۴ مراجعه شود. $\square$

مثال ۴۸.۲.۱. گیریم $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ از آن‌جایی که $-5 \equiv 3 (mod\ 4)$ لذا، حلقه اعداد جبری از K

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}].$$

ملاحظه ۴۹.۲.۱. *هرگاه K یک میدان عددی باشد، آن‌گاه $\mathcal{O}_K$ بسته‌ی صحیح است.*

برهان. به [۱۳] لم ۵.۱۴ مراجعه شود. $\square$

تعریف ۵۰.۲.۱. هر گاه R حوزه‌ای صحیح، K میدان کسرهای آن و I ایدال R باشد، در این صورت قرار می‌دهیم $I^{-1} = \{x \in K | xI \subseteq R\}$. ایدال I را وارون‌پذیر می‌گوییم، هرگاه $II^{-1} = R$.

مثال ۵۱.۲.۱. هر ایدال اصلی، وارون‌پذیر است.

تعریف ۵۲.۲.۱. هرگاه $P \in Spec(R)$، ارتفاع P را، سوپریمم طول زنجیرهایی به صورت $P_0 \subseteq P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_n = P$ تعریف می‌کنیم و آن را با $ht_R(P)$ نمایش می‌هیم. هرگاه این سوپریمم موجود نباشد آن را نامتناهی قرارداد می‌کنیم.

مثال ۵۳.۲.۱. اگر K یک میدان باشد، آن‌گاه $ht(0) = 0$.

تعریف ۵۴.۲.۱. زنجیر $P_0 \subseteq P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_n$ از ایدال‌های اول حلقه‌ی R را اشباع شده می‌نامیم، هرگاه بین P_i و P_{i-1} ایدال اول دیگری نباشد.

تعریف ۵۵.۲.۱. بعد کرول حلقه R را سوپریمم طول زنجیرهای اشباع شده از ایدال‌های اول (ارتفاع‌های ایدال‌های اول) R تعریف می‌کنیم.

$$dimR = Sup\{n \in \mathbb{N} | P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n, P_i \in Spec(R)\} = Sup\{ht(P) | P \in Spec(R)\}$$