بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی
گرایش تحقیق در عملیات

عنوان:

روش‌های نقطه درونی برای مسائل مکمل خطی $P_*(\kappa)$

استاد راهنما:
دکتر حسین منصوری

استاد مشاور:
دکتر مریم زنگی آبادی

توسط:
ربابه فتاحی زاده

شهریور ماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به
دانشگاه شهرکرد است.

تشکر و قدردانی

خدایا تو را سپاس که مرا در دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دفتر اندیشه‌ام کشیدی و چشمه سار زلال دانش و معرفتت را ارزانی‌ام داشتی تا در برهوت نادانی سیراب‌گر وجودم باشد.

در ابتدا یاد و خاطره اولین و بزرگترین معلمان زندگیم **پدر و مادر عزیزم** که مرا به جان پروردند و امید رسیدن به افق‌های روشن را در دلم شکوفا ساختند و اکنون که وقت دیدن آن رسید که ثمره کارشان را ببینند در کنارم نیستند را گرامی می دارم.

برخود لازم می‌دانم از **جناب آقای دکتر حسین منصوری** به عنوان استاد راهنما که با سعه‌صدر و دقت نظرشان باعث هرچه پربار شدن این پایان‌نامه شدند نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

از **خانم دکتر مریم زنگی آبادی** به عنوان استاد مشاور که با نظرات و رهنمودهای ارزشمند خود مرا یاری نمودن سپاسگزارم.

از **آقای دکتر علیرضا امینی هرندی** و **آقای دکتر مهدی قاسمی** که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند تشکر می کنم.

در نهایت از همه دوستان و همکلاسی‌هایم برای همه همراهی‌ها و به خاطر تمام لحظات شیرین و به یادماندنی که در کنارشان تجربه کردم، سپاس گزارم.

ربابه فتاحی زاده

شهریور ماه ۱۳۹۰

چکیده

مسائل مکمل خطی که آن ها را به اختصار با CPs نشان می دهیم کاربردهای زیادی در برنامه ریزی ریاضی و مسائل مرتبط با آن مانند اقتصاد، برنامه ریزی حمل و نقل و نظریه بازی دارند[۲۹]. به این دلیل روش های مختلفی برای حل آن ها ارائه شد.

در بین این روش ها، روش های نقطه درونی اولیه—دوگان کاراترین روش ها در بین روش های دیگر بود. روش های نقطه درونی در حل این مسائل از الگوریتم هایی استفاده می کنند که در آن از تقریب مسیرمرکز استفاده می شود. هم چنین در هر الگوریتم نیاز است تا از تابعی برای اندازه گیری فاصله بین هر تکرار تا مسیرمرکز استفاده کنیم. بیشتر روش های نقطه درونی از تابع مانع لگاریتمی به عنوان تابع اندازه نزدیکی برای تخمین این فاصله استفاده می کردند. با استفاده از این نوع توابع، الگوریتم هایی با گام کوتاه از نظر تئوری کران پیچیدگی بهتری داشتند اما در عمل کران پیچیدگی الگوریتم های با گام بلند بهتر بود. محققین برای از بین بردن چنین شکافی از توابع هسته ای به جای تابع مانع لگاریتمی استفاده کردند که علاوه بر این که شکاف میان تئوری و نتایج عملی را از بین می برد، کران پیچیدگی بهتری نسبت به استفاده از تابع مانع لگاریتمی دارند.

در این پایان نامه، ما نخست به توصیف روش های نقطه درونی برای حل مسئله برنامه ریزی خطی می پردازیم و سپس با استفاده از این روش دو مسئله مکمل خطی $P_*(\kappa)$ و مکمل غیر خطی $P_*(\kappa)$ را با الگوریتم هایی که روی توابع هسته ای پایه گذاری می شوند، حل می کنیم.

کلمات کلیدی

مسئله مکمل، مسئله مکمل خطی $P_*(\kappa)$، مسئله مکمل غیر خطی $P_*(\kappa)$، روش نقطه درونی، مسیرمرکز، شکاف دوگان، تابع هسته ای.

فهرست مندرجات

۱ مقدماتی از مسائل برنامه ریزی خطی و مکمل خطی ۱

۱.۱ مسئله برنامه ریزی خطی ۱

۱.۱.۱ روش های نقطه درونی اولیه—دوگان بهینه سازی خطی ۳

۲.۱.۱ روش های نقطه درونی اولیه—دوگان با استفاده از توابع هسته ای . ۷

۳.۱.۱ الگوریتم ۸

۲.۱ مسئله مکمل خطی (LCP) ۱۱

۲ روش‌های نقطه درونی برای مسائل مکمل خطی $P_*(\kappa)$ با استفاده از توابع هسته ای ۱۵

۱.۲ تابع هسته ای اول ۱۵

۱.۱.۲ مقدمه ۱۵

۲.۱.۲ شرح الگوریتم ۲۰

۳.۱.۲ توابع هسته ای و رفتار افزایشی ۲۲

۴.۱.۲ اندازه طول گام ۲۷
۵.۱.۲ کاهش اندازه نزدیکی و پیچیدگی ۳۵

۲.۲ تابع هسته ای دوم ۴۱
۱.۲.۲ رفتار افزایشی تابع هسته ای ۴۱
۲.۲.۲ اندازه طول گام ۴۴
۳.۲.۲ پیچیدگی تکرار ۴۵

۳ الگوریتم نقطه درونی برای مسئله مکمل خطی $P_*(\kappa)$ با استفاده از جهت های داروی ۴۹

۱.۳ مقدمه ۴۹
۱.۱.۳ روش نیوتن ۵۰
۲.۱.۳ تعریف و ویژگی های جهت های داروی ۵۱

۲.۳ اندازه نزدیکی و الگوریتم ۵۳

۳.۳ آنالیز همگرایی ۵۵

۴ الگوریتم نقطه درونی برای مسئله مکمل غیرخطی P_* ۶۳

۱.۴ مقدمه ۶۳

۲.۴ الگوریتم ٦٥
۳.۴ ویژگی های تابع هسته ای ٦٨
۴.۴ پیچیدگی تکرار ۷۲
منابع ۸۴

فهرست نمادها

فضای برداری اقلیدسی n بعدی	R^n
فضای برداری اقلیدسی نامنفی n بعدی	R^n_+
فضای برداری اقلیدسی مثبت n بعدی	R^n_{++}
بردار همه یک	e
فضای ماتریس های $n \times n$	$R^{n\times n}$
متعلق است به	$\in$
ترانهاده ماتریس $A \in R^{n\times n}$	A^T
i—امین مؤلفه از بردار x	x_i
نرم اقلیدسی از بردار x	$\|x\|$
نرم بی نهایت از بردار x	$\|x\|_\infty$
مؤلفه کمینه‌ی بردار x	x_{min}
ترانهاده بردار x	x^T
ماتریس واحد در فضای مناسب	I
معکوس ماتریس $A \in R^{n\times n}$	A^{-1}
پارامتر مانع یا پارامتر شکاف دوگان	μ
مقدار اولیه از μ	μ°
ماتریس قطری با بردار روی قطر x	$diag(x)$
ضرب مؤلفه به مؤلفه دو بردار x و s	xs
ضرب اسکالر دو بردار x و s	$x^T s$

تقسیم مؤلفه به مؤلفه دو بردار x و s	$\frac{x}{s}$
جهت جست و جو در فضای x	Δx
جهت جست و جوی مقیاس گذاری در فضای x	d_x
جهت جست و جو در فضای s	Δs
جهت جست و جوی مقیاس گذاری شده در فضای s	d_s
پارامتر دقت	ϵ
پارامتر بهنگام کردن μ	θ
بردار واریانس	$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$
پارامتر اندازه	τ
مخالف با	$\neq$
لگاریتم طبیعی از t	$\log t$
مسئله برنامه ریزی خطی در فرم استاندارد	(P)
مسئله مکمل خطی	LCP
مسئله مکمل خطی $P_*(\kappa)$	$P_*(\kappa) - LCP$
مسئله مکمل غیر خطی	NCP

پیشگفتار

مسائل مکمل که آن ها را به اختصار با CPs نمایش می دهیم، مسئله یافتن جفت بردار شدنی $(x, s) \in R^{۲n}_{+}$ است به طوری که:

$$s = F(x), \qquad x^T s = ۰$$

باشد که دو حالت برای آن وجود دارد:

۱. نگاشت $F(x)$ یک نگاشت خطی باشد $(F(x) = Mx + q)$ که در این صورت مسئله مکمل را مسئله مکمل خطی (LCP) می گوئیم.

۲. نگاشت $F(x)$ یک نگاشت مشتق پذیر پیوسته غیرخطی باشد که در این صورت مسئله مکمل را مسئله مکمل غیرخطی (NCP) می گوئیم.

در حالت اول ماتریس M می تواند شکل های مختلفی داشته باشد. به عنوان مثال می تواند ماتریس نیمه معین مثبت، $P_*(\kappa)$—ماتریس، ماتریس ستون کافی و غیره باشد. در این پایان نامه ماتریس M را یک $P_*(\kappa)$ ماتریس در نظر می گیریم و مسئله مکمل خطی $P_*(\kappa)$ را به دست می آوریم. در حالت دوم نیز با فرض اینکه $F(x)$ یک نگاشت P_* است، مسئله مکمل غیرخطی $P_*(\kappa)$ را به دست می آوریم.

روش های مختلفی برای حل مسئله مکمل وجود دارد. در بین این روش ها ما از روش های نقطه درونی استفاده می کنیم، چون هم کران پیچیدگی چند جمله ای دارند و هم برای مسئله با ابعاد بزرگ کارا هستند. در به کارگیری این روش، ما نیاز داریم از الگوریتم هایی برای حل مسئله استفاده کنیم. کران پیچیدگی که مشخصه مهم در هر الگوریتم است به تعداد تکرارها در یک الگوریتم تعبیر می شود. هدف ما در این پایان نامه حل مسئله مکمل خطی و غیرخطی $P_*(\kappa)$ با استفاده از روش های نقطه

درونی و راه های مختلف برای به دست آوردن کران پیچیدگی در هر مسئله است. به همین منظور مباحث خود را در چهار فصل به صورت زیر تنظیم کرده ایم.

فصل اول، پیش نیاز فصل های دیگر است چرا که در آن مسئله مکمل خطی و روش های نقطه درونی برای حل آن را بیان می کنیم و این به دلیل ارتباط تنگاتنگ بین دو مسئله برنامه ریزی خطی و مسئله مکمل خطی است و در ادامه به طور خلاصه مسئله مکمل خطی و حالت های مختلف آن را بیان می کنیم.

در فصل دوم الگوریتمی را برای حل مسئله مکمل خطی $P_*(\kappa)$ بیان می کنیم که روی توابع هسته ای پایه گذاری شده است. در بخش اول از این فصل از تابع هسته ای در [۱۵] و در بخش دوم از تابع هسته ای در [۱۶،۱۷] استفاده می کنیم و دو روش مختلف برای به دست آوردن کران پیچیدگی آن ها بیان می کنیم.

در فصل سوم روش جدیدی برای به دست آوردن جهت های جست و جو برای حل مسئله مکمل خطی $P_*(\kappa)$ بیان می کنیم که برگرفته از جهت های جست وجوی داروی برای مسئله برنامه ریزی خطی هستند.

در فصل چهارم مسئله مکمل غیرخطی را با روش های نقطه درونی بررسی می کنیم و الگوریتمی برای حل آن ارائه می دهیم که روی تابع هسته ای در [۳۶] پایه گذاری می شود.

فصل ۱

مقدماتی از مسائل برنامه ریزی خطی و مکمل خطی

در این فصل ابتدا به بیان مسئله برنامه ریزی خطی و حل آن با روش نقطه درونی می پردازیم، سپس مسئله مکمل خطی را بررسی می کنیم. مطالب ارائه شده در این فصل از منابع [۱ – ۱۳, ۱۸, ۲۰, ۲۳] می باشند.

۱.۱ مسئله برنامه ریزی خطی

هر مسئله برنامه ریزی خطی، مینیمم سازی یا ماکزیمم سازی یک تابع هدف خطی است که تحت یک یا چند قید به صورت خطی قرار دارد که این قیود می توانند به صورت تساوی یا نامساوی باشند. برنامه ریزی خطی و حل آن حاصل تلاش دانتزینگ [۱] و همکاران وی است [۱]، زیرا که اولین و متداول ترین روشی که برای حل برنامه ریزی خطی به کار رفت روش سیمپلکس بود که در سال ۱۹۴۷ توسط دانتزینگ ارائه شد. این روش به طور عادی برای حل مسائلی در زمینه تجارت، منطق،

[۱] Dantzing

اقتصاد و مهندسی استفاده شد. اگرچه این روش در عمل کارا بود، ولی پیچیدگی چندجمله ای که ویژگی مهم از نظر تئوری محسوب می شود را نداشت. روش سیمپلکس به این صورت بود که تکرارها در امتداد یک ناحیه شدنی کراندار و با حرکت از یک نقطه گوشه ای به نقطه گوشه ای مجاور آن، باعث بهبود بخشیدن به مقدار تابع هدف می شد.

به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} & max \quad \sum_{j=۱}^{n} ۱۰^{n-j} x_j \\ s.t. \qquad & (۲ \sum_{j=۱}^{i-۱} ۱۰^{i-j} x_j) + x_i \leq ۱۰۰ \\ & x_j \geq ۰ \end{aligned}$$

روش سیمپلکس این مثال را با $۲^{n-۱}$نقطه گوشه ای حل می کند که این بدترین حالت رفتار سیمپلکس اصلاح شده است و نشان می دهد پیچیدگی روش سیمپلکس در بدترین حالت از نوع نمایی[۲] است [۲].

اولین الگوریتم چند جمله ای برای حل مسائل برنامه ریزی خطی توسط خاکیان در سال ۱۹۷۹ ارائه شد[۳]. روش بیضی گون [۳] اگرچه از نظر تئوری نتایج مهم و خوبی داشت، ولی در عمل از روش سیپلکس بهتر نبود. کارمارکار[۴] در سال ۱۹۸۴ الگوریتمی ارائه داد که پیچیدگی چندجمله ای داشت[۴]. الگوریتم کارمارکار به این صورت بود که از نقاط درونی یک چندوجهی برای تقریب جواب مسئله استفاده می کرد که این الگوریتم پیچیدگی کمتری از الگوریتم خاکیان داشت و هم چنین ثابت شد که الگوریتم کارمارکار در عمل بسیار کارا است، به خصوص وقتی که ابعاد مسئله بزرگتر می شود. به این صورت دنباله ای از تحقیقات در این زمینه صورت گرفت تا در نهایت شاخه ای از روش های

[۲] exponential
[۳] ellipsoid method
[۴] karmarkar

نقطه درونی که موضوع مهمی بود از آن حاصل شد.

۱.۱.۱ روش های نقطه درونی اولیه–دوگان بهینه سازی خطی

روش های نقطه درونی که آن ها را به اختصار با $IPMs$ نمایش می دهیم، به طور رایج یکی از فعال ترین زمینه های تحقیقاتی در بهینه سازی است. نام روش های نقطه درونی از این حقیقت سرچشمه می گیرد که نقاط تولید شده به وسیله این روش ها در درون ناحیه شدنی قرار می گیرند. این روش ها با روش سیمپلکس رایج کاملاً متفاوت اند که تکرارهای آن در امتداد مرز ناحیه شدنی از یک نقطه گوشه ای به نقطه گوشه ای دیگر حرکت می کند.

روش های نقطه درونی علاوه بر این که ابزاری قوی در حل مسائل بهینه سازی خطی (LO) هستند[٦]، در سطحی وسیع تر برای مسائل بهینه سازی دیگر [۱۸،۵] مانند بهینه سازی نیمه معین[۵]، بهینه سازی مخروطی مرتبه دوم[٦] و مسائل مکمل خطی که آن ها را به اختصار با $LCPs$ نمایش می دهیم، به کار می روند. در سال های اخیر مسائل مکمل خطی مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفتند و این به دلیل ارتباط تنگاتنگ بین مسائل LO و LCP بود.

از بین روش های نقطه درونی، روش های نقطه درونی اولیه–دوگان کاراترین روش در بین روش های دیگر است. یک مسئله برنامه ریزی خطی را به راه های زیادی می توان نمایش داد. دو روش بسیار مناسب برای نمایش مسئله، نمایش به صورت استاندارد [۷] و نمایش به صورت متعارفی [۸] است. دو مسئله اولیه و دوگان را در شکل استاندارد به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$(P): \quad \min \quad \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

$$(D): \quad \max \quad \{b^T y : A^T y + s = c, s \geq 0\}$$

---

[۵] SDO

[٦] SOCO

[۷] standard form

[۸] cannonical form

پیدا کردن یک جواب بهینه برای دو مسئله (P) و (D) هم ارز پیدا کردن جواب برای سیستم غیرخطی زیر است:

$$\begin{aligned} Ax &= b, \quad x \geq ۰ \\ A^T y + s &= c, \quad s \geq ۰ \\ xs &= ۰. \end{aligned}$$

معادله آخر در این سیستم غیرخطی شرط مکمل نامیده می شود.
ایده اصلی در روش های نقطه درونی اولیه—دوگان جایگزینی معادله غیرخطی شرط مکمل با معادله پارامتری $xs = \mu e$ است که در آن پارامتر $\mu > ۰$ و e برداری بصورت $e = (۱, ۱, \cdots, ۱)^T$ است. دستگاه جدید به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} Ax &= b, \quad x \geq ۰ \\ A^T + s &= c, \quad s \geq ۰ \\ xs &= \mu e \end{aligned} \qquad (۱)$$

بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می کنیم که سیستم (۱) در شرط نقطه درونی صدق می کند.

تعریف ۱.۱.۱ یک سیستم در شرط نقطه درونی (IPC) صدق می کند اگر یک جواب شدنی برای آن سیستم موجود باشد به طوری که در تمام محدودیت های نامساوی به طور اکید صدق کند.

در نتیجه نقطه اکیداً شدنی اولیه $(x^\circ, s^\circ, y^\circ)$ وجود دارد به طوری که برای آن

$$Ax^\circ = b, \;\; x^\circ > ۰, \quad A^T y^\circ + s^\circ = c, \;\; s^\circ > ۰$$

برقرار است. این نقطه شدنی آغازین را $x_۰ = s_۰ = e$ در نظر می گیریم که دستگاه بالا را در $\mu = ۱$ حل می کنند.

اگر ماتریس A از مرتبه m باشد (rank(A)=m) و شرط IPC برقرار باشد، دستگاه (۱) برای هر مقدار $\mu > 0$ جواب یکتای $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ را دارد. مجموعه همه این جواب ها یک مسیر همگن را ایجاد می کنند که به آن اصطلاحاً مسیرمرکز [۹] برای دو مسئله (P) و(D) گوییم به طوری که:

۱. $x(\mu)$، μ—مرکز برای مسئله (P) است.

۲. $(y(\mu), s(\mu))$، μ—مرکز برای مسئله (D) است.

ارتباط بین مسیرمرکز و مسئله برنامه ریزی خطی اولین بار توسط مگیدو ارائه شد[۷].

حد مسیر مرکز وقتی $\mu \to 0$ وجود دارد و چون این حد در شرط مکمل صدق می کند، جواب بهین را برای دو مسئله (P) و (D) به دست می دهد[۲۰]. حال با در نظر گرفتن این نقطه شدنی آغازین، μ را به $\mu_+ = (1-\theta)\mu$ که $\theta \in (0, 1)$ و ثابت است، کاهش می دهیم و با به کارگیری روش نیوتن سیستم (۱) را با این مقدار μ حل می کنیم.

بنابراین در هر مرحله ما به حل سیستم (۲) می پردازیم که آن را اصطلاحاً سیستم نیوتن و $(\Delta x, \Delta s, \Delta y)$ را اصطلاحاً جهت های جست وجوی نیوتن می نامیم. این سیستم به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} A\Delta x &= 0 \\ A^T\Delta y + \Delta s &= 0 \\ s\Delta x + x\Delta s &= \mu e - xs \end{aligned} \qquad (۲)$$

همان طور که گفتیم چون A ماتریسی معکوس پذیر است (از مرتبه m است)، جهت های جست وجوی $(\Delta x, \Delta s, \Delta y)$ به طور یکتا تعیین می شوند. دو معادله اول به ترتیب بیانگر شدنی بودن دو مسئله اولیه و دو گان بعد از گام برداشتن در امتداد جهت های جست و جو هستند و معادله سوم، معادله مرکزی نامیده می شود.

[۹] central path

با برداشتن یک گام کامل در امتداد این جهت ها به تکرار جدید:

$$x^+ = x + \Delta x, \quad s^+ = s + \Delta s$$

می رسیم. دوباره μ را با عامل $(\theta - ۱)$ کاهش می دهیم و همین مراحل را تکرار می کنیم. با تکرار این روش به مرحله ای می رسیم که μ به اندازه کافی کوچک شود، یعنی $(n\mu \leq \varepsilon)$، که در این مرحله اصطلاحاً می گوییم که یک ε—جواب را برای دو مسئله (P) و (D) یافته ایم.

باتعریف بردار مقیاس گذاری شده v و جهت های جست وجوی مقیاس گذاری شده d_x و d_s به صورت:

$$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}, \quad d_x = \frac{v\Delta x}{x}, \quad d_s = \frac{v\Delta s}{s}.$$

می توان سیستم نیوتن را به صورت سیستم مقیاس گذاری شده نیوتن زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \bar{A}d_x &= ۰ \\ \bar{A}\triangle y + d_s &= ۰ \qquad (۳) \\ d_x + d_s &= v^{-۱} - v. \end{aligned}$$

که در این سیستم:

$$\bar{A} : = \frac{۱}{\mu} AV^{-۱}X = AS^{-۱}V$$

$$V := diag(v), \quad X : = diag(x), \quad S := diag(s)$$

است. با توجه به این سیستم مقیاس گذاری شده نیوتن بردارهای d_x و d_s متعامد هستند. زیرا d_x متعلق به فضای پوچ ماتریس A و d_s متعلق به فضای سطری ماتریس A است.

نتیجه ۱.۱.۱ اگر $d_x = d_s = ۰$ باشد، (x, s) منطبق با μ—مرکز در دو مسئله (P) و (D) است. زیرا طبق سومین معادله از سیستم (۳) خواهیم داشت

$$d_x = d_s = ۰ \Leftrightarrow v^{-۱} - v = ۰$$

که نتیجه می دهد، $v = e$ است. در این حالت $x = x(\mu) = e$ و $s = s(\mu) = e$ می شود.

سمت راست سومین معادله از سیستم مقیاس گذاری شده نیوتن، $v - v^{-1}$، برابر با منفی گرادیان تابع

$$\Psi_c(v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_i^2 - 1}{2} - \log v_i \right)$$

است که مشتق دوم آن به صورت:

$$\nabla^2 \Psi_c(v) = diag(1 + v^{-2})$$

است. $\nabla^2 \Psi_c(v)$ یک ماتریس معین مثبت است که نتیجه می دهد $\Psi_c(v)$ تابعی اکیداً محدب است وچون $\nabla \Psi_c(e) = 0$ است، پس $\Psi_c(v)$ در $v = e$ به مینیمم مقدار خود یعنی صفر می رسد.

نتیجه ۲.۱.۱ سه شرط زیر معادل هستند:

۱) $v = e$ است.

۲) $x = x(\mu)$ و $s = s(\mu)$ است.

۳) $\Psi_c(v)$ همه جا نامنفی است و به صفر میل می کند.

۲.۱.۱ روش های نقطه درونی اولیه—دوگان با استفاده از توابع هسته ای

به طور کلی اگر سمت راست سومین معادله از سیستم (۳) را با هر تابع اکیداً محدب نامنفی دلخواه مثل $\Psi(v)$ که در آن $v \in R^n_{++}$ است و در $v = e$ به مینیمم خود می رسد، (به جای $\Psi_c(v)$) جای گزین کنیم، معادله آخر در سیستم مقیاس گذاری شده به صورت:

$$d_x + d_s = -\nabla \Psi(v) \qquad (۴)$$

تبدیل می شود. فرض کنید که تابع $\Psi(v)$ تجزیه پذیر به مؤلفه هایش است و تابع ψ نشان دهنده مؤلفه های $\Psi(v)$ باشد یعنی:

$$\Psi(v) = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i)$$

که در آن $\psi(t) : D(\subset R_{++}) \to R_+$ تابع تک متغیره اکیداً محدب است و در $t = ۱$ به مینیمم مقدار خود یعنی $\psi(۱) = ۰$ می رسد.

تعریف ۲.۱.۱ می گوییم تابع تک متغیره $\psi(t)$، تابع هسته ای [۱۰] $\Psi(v)$ است که ما همیشه آن را تابعی دوبار مشتق پذیر در نظر می گیریم.

در اینجا تابع هسته ای که باعث به دست آمدن جهت های نیوتن می شود، با توجه به تعریف تابع $\Psi_c(v)$، به صورت:

$$\psi_c(t) = \frac{t^۲ - ۱}{۲} - \log t \qquad (۵)$$

تعریف می شود.

۳.۱.۱ الگوریتم

در این بخش ما الگوریتم کلی روش های نقطه درونی را برای مسئله بهینه سازی خطی بیان می کنیم. همان طور که در بخش قبل بیان کردیم با شروع از یک نقطه اکیداً شدنی آغازین، نیاز داشتیم که جهت های جست وجوی نیوتن را برای برداشتن گام نیوتن و رسیدن به مرحله بعدی به دست آوریم. این جهت ها همان طور که در بخش قبل گفته شد از حل سیستم:

$$\begin{aligned} \bar{A}d_x &= ۰ \\ \bar{A}\Delta y + d_s &= ۰ \qquad (۶) \\ d_x + d_s &= -\nabla\Psi(v). \end{aligned}$$

به دست می آیند، به این صورت که ابتدا d_x و d_s و Δy محاسبه می شوند و سپس طبق روابط:

$$\Delta x = \frac{x d_x}{v}, \qquad \Delta s = \frac{s d_s}{v} \qquad (۷)$$

[۱۰] kernel function