دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

گرایش آنالیز عددی

عنوان:

حل معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی با استفاده از روش معادلات ساده

استاد راهنما:

دکتر حسین جعفری

استاد مشاور:

دکتر اله بخش یزدانی چراتی

نگارش:

حامد شفیع زاده سماکوش

تیر ۱۳۹۲

قدردانی

زندگی صحنه ی یکتای هنرمندی ماست

هر کسی نغمه ی خود خواند و از صحنه رود

صحنه پیوسته به جاست

خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد.

سپاس بی پایان از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر حسین جعفری که با هدایت و ارشادم در مسیر ترقی و پیشرفت، اینجانب را مورد عنایت و محبت خود قرار دادند.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر اله بخش یزدانی چراتی که مشاورهٔ این پایان نامه را به عهده داشته و با دانش و خرد شان، اینجانب را از لطف بی دریغشان بهره مند ساخته اند، کمال تشکر را دارم. تشکر فراوان از اساتید محترم گروه آقایان دکتر حسن حسین زاده و دکتر عزیزاله ولی نژاد که داوری پایان نامه را به عهده گرفته، همچنین از مدیر محترم گروه آقای دکتر محسن علیمحمدی و استاد محترم آقای دکتر ماشااله متین فر و آقای نعمت اله کدخدا که برای ادامه ی راه مرا یاری نموده اند.

در نهایت سپاس بی شائبه دارم از خانوادهٔ عزیزم که همواره مشوق اصلی من در تمامی دوران تحصیل بودند و موفقیت خود را از آغاز دوره تحصیل تاکنون مرهون زحمات آنها هستم.

حامد شفیع زاده سماکوش- تیر ۱۳۹۲

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

که با ذره ذرهٔ وجودشان، راه پیشرفت علم را بر من هموار کرده اند.

با عشق و محبت فراوان

تقدیم به همسر مهربانم

که با صبر گران بهایش مرا یاری می کرد و بدون کمک وی هیچ کاری ممکن نبود و با حمایت وی هیچ محدودیتی وجود نداشت.

چکیده :

در دهه های اخیر معادلات دیفرانسیل جزیی خطی و غیر خطی به دلیل کاربرد مهمی که در علوم مهندسی و فیزیک دارند توجه محققین زیادی را به خود معطوف کرده است. پیدا کردن جواب های تحلیلی - دقیق این نوع مسائل برای ما آسان نخواهد بود، به همین دلیل به مطالعه ی جواب های تحلیلی - تقریبی می پردازیم. در این پایان نامه، روش های متغیر تابعی، سینوس - کسینوس، تانژانت هذلولی (متعارفی، توسعه یافته) بسط- $\frac{G'}{G}$ و معادلات ساده برای حل تحلیلی معادلات با مشتقات جزیی غیر خطی به کار رفته اند. و در نهایت به مقایسهٔ روش ها می پردازیم.

کلمات کلیدی :

معادلات دیفرانسیل جزیی، معادله دیفرانسیل معمولی، معادله دیفرانسیل ریکاتی، معادلات دیفرانسیل برنولی روش معادلات ساده، جواب دقیق.

فهرست مطالب

دانشگاه مازندران

تعهدنامه اصالت پایان نامه

اینجانب حامد شفیع زاده سماکوش دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی با شماره دانشجویی ۹۰۵۲۴۷۷۰۴ تعهد می‌نمایم که کلیه مطالب مندرج در این پایان نامه اینجانب تحت عنوان حل معادلات دیفرانسیل جزیی غیر خطی با استفاده از روش معادلات ساده، حاصل فعالیت پژوهشی خودم بوده که به راهنمایی یا مشاورت اساتید دانشگاه مازندران تهیه شده است و در هر جا که از دستاوردها یا آثار علمی دیگران استفاده شده با رعایت حقوق مالکیت معنوی به صورت مستقیم یا غیرمستقیم در متن پایان نامه، ارجاع داده شده و در منابع پایانی ذکر شده است.

این اثر پژوهشی قبلاً برای اخذ هیچ مدرک هم‌سطح، بالاتر یا پایین تر هیچ یک از دانشگاه ها و موسسات دولتی یا غیردولتی ارائه نشده است، در صورت احراز تخلف و اثبات خلاف هر یک از موارد فوق، دانشگاه مازندران حق دارد بدون نیاز به حکمی از مراجع قضایی یا غیرقضایی، نسبت به ابطال مدرک تحصیلی اینجانب اقدام کند و حق پیگیری قضایی موضوع نیز برای دانشگاه مازندران محفوظ است و اینجانب حق هرگونه اعتراض را از خود ساقط می‌نمایم.

کلیه نتایج و حقوق حاصل از این اثر، متعلق به دانشگاه مازندران است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی، واگذاری اطلاعات به دیگران یا چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری ترجمه و اقتباس از پایان‌نامه، بدون موافقت دانشگاه مازندران یا استاد راهنما یا مشاور، ممنوع است، نقل مطالب با ذکر ماخذ بلامانع است.

صحت امضای دانشجو مورد گواهی است. نام و نام خانوادگی و امضاء دانشجو

مدیر گروه آموزشی:

معاون پژوهشی دانشکده:

پیش گفتار

کاربرد وسیع معادلات دیفرانسیل جزیی خطی و غیر خطی در علوم مهندسی (مکانیک سیالات، کامپیوتر، مهندسی شیمی و ...) و علوم پایه (فیزیک، ریاضی، شیمی و ...) موجب شده است تا محققین زیادی به تحقیق و پژوهش در این زمینه بپردازند. به دست آوردن جواب های تحلیلی (دقیق)، در صورت وجود، برای این نوع از معادلات از اهمیّت بسیاری برخوردار است. بنابراین در چند دهه اخیر، بسیاری از دانشمندان به تحقیق و بررسی در این زمینه و به دست آوردن جواب های تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزیی غیر خطی با استفاده از روش های گوناگون پرداخته اند، برای مثال چند نمونه از این روش ها عبارتند از: روش سینوس-کسینوس، روش تانژانت هذلولی متعارفی، روش تانژانت هذلولی توسعه یافته، روش بسط $\frac{G'}{G}$ و ... .

پیدا کردن جواب های تحلیلی - دقیق معادلات دیفرانسیل جزیی خطی و غیر خطی از اهمیّت زیادی در ریاضی - فیزیک برخوردار است. یکی از روش هایی که برای به دست آوردن جواب های تحلیلی - دقیق فراهم آمده است، روش معادلات ساده می باشد. این روش ابتدا توسط کودریاشوف[۱] در سال ۲۰۰۵، برای حل معادله فیشر پیشنهاد شده است که این روش را در سال ۲۰۱۰ توسعه دادند.

در فصل اول برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه مربوط به معادلات دیفرانسیل جزیی آورده شده اند و در انتهای این فصل، معادلات دیفرانسیل معمولی برنولی و ریکاتی به همراه جواب های آن ها را بیان کرده ایم. در فصل دوم با کمک گرفتن از [۴۴]، روش های متغیر تابعی، سینوس - کسینوس، تانژانت هذلولی (متعارفی، توسعه یافته) و روش بسط $\frac{G'}{G}$ را برای حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزیی غیر خطی، معرفی کرده ایم و سپس در

[۱] N. A. Kudryashov

ادامه هر روش سعی شده است تا با ارائه مثال های متفاوت، موارد استفاده از روش ها را بیان نموده و در انتها، توضیحاتی در مورد مزایا و معایب روش ها آمده است.

در فصل سوم ابتدا روش معادلات ساده بیان شده است و در ادامه به حل چند معادله دیفرانسیل جزیی که به کمک روش های بیان شده در فصل سوم حل شده اند، می پردازیم. و در نهایت، در فصل چهار به مقایسه روش معادلات ساده با سایر روش های بیان شده، پرداخته ایم.

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل جزیی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

در این قسمت سعی شده است تا تعاریف و مفاهیم اولیه مربوط به معادلات دیفرانسیل آورده شود.

تعریف ۱.۱.۱ (***معادله دیفرانسیل***) :

در هر پدیده و فرآیند در طبیعت پارامترهای مختلفی وجود دارد که مطابق قوانین حاکم بر آن پدیده با هم ارتباط دارند. بیان این ارتباط به زبان ریاضی، یک معادله تابعی است و معادله تابعی حاصل از پدیده ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک یا چند متغیر مستقل بررسی شود، معادله دیفرانسیل نامیده می شود.

تعریف ۲.۱.۱ (***معادله دیفرانسیل معمولی***) :

اگر معادله دیفرانسیل دارای یک متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل را معادله دیفرانسیل معمولی گویند و به اختصار آن را با (ODE) *نشان می دهند.*

تعریف ۳.۱.۱ (***معادله دیفرانسیل جزیی***) :

اگر معادله دیفرانسیل دارای بیش از یک متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل را معادله دیفرانسیل جزیی گویند و به اختصار آن را با (PDE) *نشان می دهند.*

معادلات

$$\begin{aligned}
&u_t = ku_{xx},\\
&u_t = k(u_{xx} + u_{yy}),\\
&u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).
\end{aligned}$$

نمونه هایی از معادلات PDE می باشند که به ترتیب، جریان گرما در فضای یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی را توصیف می کنند و معادلات

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^{2} u_{xx},\\
&u_{tt} = a^{2}(u_{xx} + u_{yy}),\\
&u_{tt} = a^{2}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).
\end{aligned}
$$

نیز معادلات PDE هستند که به ترتیب، انتشار موج در فضای یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی را توصیف می کنند.

تعریف ۴.۱.۱ (مرتبه *PDE*) :

مرتبه یک PDE عبارت است از بالاترین مرتبه مشتقی که در آن موجود است.

به عنوان مثال، معادلات

$$
\begin{aligned}
&u_t - u_x = 0,\\
&u_t - u u_{xx} = 0,\\
&u_t - u_{xxx} + u - u^{2} = 0.
\end{aligned}
$$

به ترتیب، معادلات PDE مرتبه اول، مرتبه دوم و مرتبه سوم می باشند.

تعریف ۵.۱.۱ (*PDE* خطی و غیر خطی) :

اگر $u = u(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ به طوری که x_k، $k = 1, 2, \cdots, n$، n متغیر مستقل باشند آن گاه یک PDE در حالت کلی به صورت زیر نشان داده می شود:

$$f(x_k, u, u_{x_k}, u_{x_k x_i}, \cdots) = 0, \quad i, k = 1, 2, \cdots, n.$$

اگر f برحسب u و مشتقات آن به صورت خطی در معادله ظاهر شود، PDE را خطی گویند، در غیر این صورت PDE را غیر خطی می نامند. به عنوان مثال، معادلات

$$
\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} = 0,\\
&u_{tt} - u_{xx} + u - u^{2} = 0.
\end{aligned}
$$

به ترتیب معادله PDE مرتبه دوم خطی و مرتبه دوم غیر خطی هستند.

تعریف ۶.۱.۱ (*PDE* شبه خطی) :

یک PDE را شبه خطی گویند هرگاه نسبت به بالاترین مرتبه مشتق موجود (مشتق نسبت به همه متغیر ها) در معادله خطی باشد.

به عنوان مثال، معادلات را در نظر بگیرید:

$$u_{xxt} + u_{xx} - u^{۲} = ۰,$$
$$u_t^{۳} - u_{xx}^{۲} + u_{xxt} - u = ۰.$$

معادله اول، به خاطر وجود جمله $u^{۲}$ غیر خطی ولی چون نسبت به جمله با بالاترین مرتبه مشتق (جمله u_{xxt})، خطی است لذا یک معادله PDE شبه خطی می باشد و بطور مشابه، معادله دوم به خاطر جملات $u_t^{۳}$ و $u_{xx}^{۲}$ غیر خطی است ولی چون نسبت به جمله با بالاترین مرتبه مشتق (جمله u_{xxt})، خطی است لذا یک معادله PDE شبه خطی می باشد. اما معادله

$$u_{xxt}^{۲} + u_{xx} - u^{۳} - u_x + u_t = ۰.$$

به خاطر غیر خطی بودن جمله $u_{xxt}^{۲}$، که بالاترین مرتبه مشتق می باشد، شبه خطی نمی باشد.

نکته ۱ . *با توجه به این که در یک معادله خطی، متغیرهای وابسته و همه مشتقات آن ها در معادله دیفرانسیل به صورت خطی ظاهر می شوند، بنابر این می توان نتیجه گرفت که معادله خطی، شبه خطی است در حالی که عکس این مطلب لزوماً درست نیست. در معادله PDE*

$$u_{xxt} + u_{xx} - u^{۲} = ۰.$$

ملاحظه می شود که این معادله یک معادله شبه خطی است در حالی که خطی نمی باشد.

تعریف ۷.۱.۱ (*PDE* تقریباً خطی) :

یک معادله دیفرانسیل جزیی را تقریباً خطی گویند هرگاه معادله شبه خطی بوده و ضرائب بالاترین مرتبه مشتق هایی که در معادله ظاهر می شوند، فقط به متغیرهای مستقل بستگی داشته باشند.

تعریف ۸.۱.۱ (*PDE همگن و ناهمگن*) :

اگر تمام جملات معادله خطی شامل تابع مجهول یا مشتق های آن باشد آن را همگن نامند و در غیر این صورت ناهمگن گویند. برای مثال معادله لاپلاس دو بعدی (با دو متغیر مستقل)

$$u_{xx} + u_{tt} = 0.$$

همگن، در حالی که معادله پواسون دو بعدی

$$u_{xx} + u_{tt} = f(x,t).$$

که در آن $f(x,y)$ تابعی معمولی (مخالف صفر) است، غیر همگن می باشد.

تعریف ۹.۱.۱ (*جواب PDE*) :

اگر تابع u و مشتقات آن در معادله دیفرانسیل صدق کند آن را جواب معادله گویند.

به عنوان مثال تابع $u = e^{x+y}$ یکی از جواب های معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی $u_x = u_y$ می باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ (*جواب تقریبی و دقیق*) :

جوابی که از انجام محاسبات و طی مراحل عملیاتی برای یک مسأله به دست می آید، جواب تقریبی یا جواب محاسباتی آن مسأله گفته می شود و جوابی که در شرایط مسأله صدق کرده و با اعمال آن یک تساوی بدون کم و کاست حاصل می گردد، جواب دقیق یا جواب واقعی آن مسأله نامیده می شود.

تعریف ۱۱.۱.۱ (*جواب تحلیلی*) :

گوییم مسأله در نقطه $x = x_0$ دارای جواب تحلیلی می باشد، هرگاه جواب آن در نقطه $x = x_0$ دارای بسط تیلور با شعاع همگرایی مثبت باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱ (*سیگنال*) :

هر کمیت قابل اندازه گیری یا خصوصیتی از محیط که مکان یا سرعت آشوب و برهم ریختگی در محیط را نشان دهد، سیگنال نامیده می شود.

تعریف ۱۳.۱.۱ (موج) :

هر سیگنال قابل شناختی که از مکانی به مکان دیگر با سرعت تکثیر قابل شناختی حرکت کند، موج نامیده می شود.

تعریف ۱۴.۱.۱ (*جواب موج حرکتی و انواع گوناگون آن*) :

امواجی که به صورت $u(x,t) = f(x-ct)$ نمایش داده می شوند را موج حرکتی گویند. چنین تابعی آشفتگی را نشان می دهد که با سرعت c حرکت می کند.

مطالعه معادلاتی که از پدیده های موج مدل سازی شده اند، نیاز به مطالعه جواب های موج حرکتی دارند. جواب موج حرکتی یک جواب از شکل دائم در حال حرکت با یک سرعت ثابت است. جواب های موج حرکتی معمولاً از تبدیل معادلات PDE به معادلات ODE مرتبط با آن ها به دست می آیند.

جواب های موج حرکتی

$$u(x,t) = u(\xi), \qquad \xi = x - ct.$$

که معادلات PDE را به معادلات PDE بر حسب متغیر ξ تبدیل می کند، معمولاً از روش های مستقیم جبری به دست می آیند.

تعدادی از انواع جواب های موج حرکتی که مورد علاقه خاص در نظریه موج انفرادی که به سرعت در بسیاری از زمینه های علمی از امواج آب در آب کم عمق در فیزیک پلاسما وجود دارند، عبارت اند از:

۱- موج های انفرادی و سولیتونی[۱] :

امواج انفرادی، امواج حرکتی موضعی با سرعت های ثابت هستند و سولیتون ها انواع مخصوص از امواج انفرادی می باشند با این خاصیت که

$$\lim_{\xi \longrightarrow \pm\infty} f^{(n)}(\xi) \longrightarrow 0.$$

[1] Solitons

و همچنین سولیتون ها هویت خود را در تعامل با سولیتون های دیگر حفظ می کنند.

۲- جواب های متناوب :

جواب های متناوب، جواب های موج حرکتی هستند که به طور متناوب تکرار می شوند، مانند جواب $\cos(x-t)$ برای معادله موج استاندارد $u_{tt} = u_{xx}$.

۳- امواج تابی[۲] :

امواج تابی امواجی هستند که از یک حالت مجانبی به حالت دیگری افزایش یا کاهش می یابند. جواب تابی در بی نهایت به صفر نزدیک می شوند. معادله برگر پراکندگی استاندارد

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}.$$

که بازای $\nu = \frac{۱}{۲}$ دارای جواب تابی زیر می باشد:

$$u(x,t) = ۱ - \tanh(x-t), \qquad -۱۰ \leq x,t \leq ۱۰.$$

تعریف ۱۵.۱.۱ (کامپکتون[۳]) :

کامپکتون ها، سولیتون هایی با طول موج متناهی هستند، به این معنی که کامپکتون ها امواجی با پایه فشرده یا سولیتون هایی آزاد از بخش نمایی هستند. جواب کامپکتونی برخلاف جواب سولیتونی، وقتی $\xi \longrightarrow \infty$، لزومی ندارد که $f(\xi) \longrightarrow ۰$. معادله

$$u_t + (u^n)_{xx} + (u^n)_{xxx} = ۰, \qquad n > ۱.$$

دارای جواب کامپکتونی زیر می باشد:

$$u(x,t) = \cos^{\frac{۱}{۲}}(x-t), \qquad ۰ \leq x,t \leq ۱.$$

[۲]Kink waves

[۳]Compactoon

۲.۱ معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه دوم

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل از مرتبه دوم چنین است:

$$L[u] = A\,\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + B\,\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + C\,\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} - H(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = ۰. \qquad (۱.۱)$$

با توجه به تعریف هایی که در بخش قبل آمده است می توان برای معادله فوق این گونه نتیجه گرفت که هرگاه A، B و C توابعی از متغیرهای x و y باشند، آنگاه معادله (۱.۱) را شبه خطی گویند. معادله (۱.۱) تقریباً خطی است هرگاه A، B و C توابعی از متغیرهای x، y، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشند. هرگاه A، B و C توابعی از x و y باشند و هم چنین H نیز یک تابع از x، y، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشد آنگاه معادله (۱.۱) را خطی گویند. بنابراین با جانشانی H صورت کلی یک معادله دیفرانسیل جزیی از مرتبه دو را می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} &A(x,y)\,\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + B(x,y)\,\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\,\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} \\ &+D(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x,y) = ۰. \end{aligned} \qquad (۲.۱)$$

اگر $G = ۰$، معادله دیفرانسیل فوق را همگن گویند، در غیر این صورت ناهمگن خواهد بود. جواب عمومی معادله (۱.۱) یا (۲.۱) به صورت

$$u = u(x, y). \qquad (۳.۱)$$

می باشد که آن را رویه انتگرال گویند و مشخص کننده یک رویه در فضای سه بعدی است. اگر روی رویه، منحنی هایی موجود باشند که در آن ها روابط $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$ ناپیوسته و نامعلوم باشند، آنگاه این منحنی ها را منحنی های مشخصه گویند.

فرض کنید که جواب (۳.۱) شامل منحنی Γ باشد که معادلات پارامتری آن به صورت زیر است

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad u = u(s). \qquad (۴.۱)$$

فرض می کنیم که در هر نقطه (x,y,u) از منحنی Γ، مشتقات جزیی $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ معلوم باشند، بنابراین بازای هر نقطه (x,y,u) واقع بر روی منحنی Γ، داریم $u=u(x,y)$ و

$$\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}. \qquad (۵.۱)$$

با قرار دادن $\frac{\partial u}{\partial x}=p=p(x,y)$ و $\frac{\partial u}{\partial y}=q=q(x,y)$، داریم

$$\frac{dp}{ds}=\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds},\qquad \frac{dq}{ds}=\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial q}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}. \qquad (۶.۱)$$

با در نظر گرفتن این حقیقت که در معادله (۱.۱) و روابط فوق، مقادیر A، B، C، H، $\frac{dx}{ds}$، $\frac{dy}{ds}$، p، q، $\frac{dp}{ds}$ و $\frac{dq}{ds}$ در هر نقطه از Γ معلوم هستند، این سه معادله را می توان به عنوان سه معادله همزمان برای مقادیر نامعلوم $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ در هر نقطه از Γ ، تلقی کرد:

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial p}{\partial x}+B\dfrac{\partial p}{\partial y}+C\dfrac{\partial q}{\partial y} &= H(x,y,u,p,q),\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial y} &= \dfrac{dp}{ds},\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial q}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial q}{\partial y} &= \dfrac{dq}{ds}. \end{cases} \qquad (۷.۱)$$

توجه کنید که $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ و $\cdots$ می باشند و دستگاه (۷.۱) دارای جواب یکتا است هرگاه رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{vmatrix} A & B & C\\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & 0\\ 0 & \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} \end{vmatrix}=0. \qquad (۸.۱)$$

که پس از ساده سازی خواهیم داشت:

$$A\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-B\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}\right)+C\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=0.$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در عبارت $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ معادله زیر حاصل می شود:

$$A\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-B\left(\frac{dy}{dx}\right)+C=0. \qquad (۹.۱)$$

معادله فوق یک چند جمله ای درجه دو است و جواب آن می شود:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2A}\left(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\,\right). \tag{10.1}$$

معادله (۱۰.۱) را می توان به صورت دو معادله جدا شده زیر نوشت:

$$\begin{cases} 2Ady - (B + \sqrt{B^2 - 4AC})dx &= 0, \\ 2Ady - (B - \sqrt{B^2 - 4AC})dx &= 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

با توجه به این که معادلات فوق، معادلات دیفرانسیل مرتبه اول هستند، پس جواب معادلات فوق به صورت زیر است:

$$\phi_1(x, y) = c_1, \quad \phi_2(x, y) = c_2.$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت های دلخواه هستند. این منحنی ها را، منحنی های مشخصه گویند.

۳.۱ معادله دیفرانسیل (برنولی و ریکاتی)

در این قسمت معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول برنولی و ریکاتی را مورد بررسی قرار می دهیم.

۱- معادله برنولی : معادله برنولی در حالت کلی به صورت زیر می باشد:

$$G'(\xi) = aG(\xi) + bG(\xi)^2. \tag{12.1}$$

که جواب های آن می شوند:

۱. برای حالتی که $a > 0$ و $b < 0$ آنگاه

$$G(\xi) = \frac{a\exp(a(\xi + \xi_0))}{1 - b\exp(a(\xi + \xi_0))}. \tag{13.1}$$

۲. برای حالتی که $a < 0$ و $b > 0$ آنگاه

$$G(\xi) = -\frac{a\exp(a(\xi + \xi_0))}{1 + b\exp(a(\xi + \xi_0))}. \tag{14.1}$$