دانشگاه ارومیه

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

گرایش توپولوژی

عنوان

کاربرد پایه‌های گروبنر برای طول ناوی منیفلدهای گراسمان جهت‌دار

استاد راهنما

دکتر محمد علی اسدی

نگارش

علی فرهنگ چاخرلو

آذر ۸۸

پایان نامه علی فرهنگ [illegible] به تاریخ ۸۸/۹/۱۰ شماره   مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی

و نمره ۱۸/ قرار گرفت. هیجده [illegible]

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر محمدعلی اسدی

۲- استاد مشاور:

۳- داور خارجی: دکتر [illegible]

۴- داور داخلی: دکتر بهمن رضایی

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر سعید راستی [illegible]

تقدیم به

خانواده‌ام

در اینجا لازم می‌دانم از استاد راهنمای خود آقای دکتر محمد علی اسدی و داوران داخلی و خارجی، آقایان دکتر رضایی و دکتر سزیده تشکر به عمل آورم.

همچنین یاد می‌کنم از دوستانی که در این دانشگاه توفیق آشنایی با آنها را داشتم. در کنار آنها بودن، لحظات خوشی از زندگی بنده بود.

چکیده

برای $n = 2^{m+1} - 4$ که در آن $m \geq 2$، طول ناوی $H^*(\tilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$ را با پیدا کردن پایه‌ی گروبنر زیر حلقه‌ی معینی از آن به دست می‌آوریم. به عنوان کاربرد نه تنها یک کران پایین، بلکه یک کران بالا برای LS - رده‌ی $\tilde{G}_{n,3}$ می‌دهیم. همچنین مسأله‌ی غوطه‌وری $\tilde{G}_{n,3}$ را بررسی می‌کنیم.

پیشگفتار

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی باشد. طول ناوی R بزرگترین عدد صحیح n تعریف می‌شود که $x_1, x_2, ..., x_n \in R$ و $x_1 x_2 ... x_n \neq 0$. طول ناوی R را با $cup(R)$ نشان می‌دهیم. حال فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $\tilde{H}^*(X; A)$ نشان دهنده‌ی حلقه‌ی کوهمولوژی کاهشی X با ضرایب در حلقه‌ی جابجایی A باشد. طول ناوی X را با $cup_A(X)$ نشان داده و آن را $cup(\tilde{H}^*(X; A))$ تعریف می‌کنیم.

در این پایان نامه که بر اساس مرجع [۱۷] نوشته شده است، می‌خواهیم $cup_{\mathbb{Z}_2}(\tilde{G}_{n,3})$ را مطالعه کنیم که در آن $\tilde{G}_{n,k}$ نشان دهنده‌ی خمینه‌ی گراسمان جهت‌دار $SO(n+k)/(SO(n) \times SO(k))$ است. یادآوری می‌کنیم که $\tilde{G}_{n,k}$، یک منیفلد nk - بعدی است. کورباش[1] در [۸] با در نظر گرفتن طول[2] ω_2 در $H^*(\tilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}_2)$ (طول یعنی، سوپرمم تمام k های صحیحی که $\omega_2^k \neq 0$) تقریبی برای $cup_{\mathbb{Z}_2}(\tilde{G}_{n,3})$ به دست آورد که در آن ω_2 دومین کلاس استیفل - ویتنی می‌باشد.

فوکایا[3] $H^*(\tilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}_2)$ را با در نظر گرفتن یک پایه‌ی گروبنر مربوط به زیر حلقه‌ی معینی از $H^*(\tilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}_2)$ مطالعه کرده است. وی با استفاده از کامپیوتر محاسبات زیادی انجام داد و توانست حدس زیر را ارایه دهد:

---

[1] J. Korbash

[2] height

[3] Tomohiro Fukaya

$$
cup_{\mathbb{Z}_2}(\tilde{G}_{n,3}) = \begin{cases} 2^{m+1}-3 & 2^{m+1}-4 \leq n \leq 2^{m+1}+2^m-6, \\ 2^{m+1}-3+k & n = 2^{m+1}+2^m-5+k,\ 0 \leq k \leq 2, \\ 2^{m+1}+2^m+\cdots & n = 2^{m+1}+2^m+\cdots+2^j-2+k, \\ \quad +2^{j+1}+2^{j-1}+k & \qquad\qquad 0 \leq k \leq 2^{j-1}-1. \end{cases}
$$

اگر $n = 2^{m+1} - 4$، با استفاده از روش پایه‌ی گروبنر قضیه‌ی زیر را به دست می‌آوریم. ولی حالت‌های دیگر این حدس که هنوز باز است قابل مطالعه می‌باشد.

قضیه: اگر $n = 2^{m+1} - 4$ که در آن $m \geq 2$، آنگاه $cup_{\mathbb{Z}_2}(\tilde{G}_{n,3}) = n + 1$.

فرض کنیم $cat(X)$ نشان دهنده‌ی LS ـ رده‌ی[۴] فضای X باشد، آنگاه در فصل ۵ نتیجه‌ی زیر را اثبات می‌کنیم:

نتیجه: اگر $n = 2^{m+1} - 4$ که در آن $m \geq 2$، آنگاه $n + 1 \leq cat(\tilde{G}_{n,3}) < \frac{3}{2}n$.

در حالت خاص، داریم $cat(\tilde{G}_{4,3}) = 5$.

کاربردهایی از قضیه‌ی بالا را برای مسأله‌ی غوطه‌وری $\tilde{G}_{n,3}$ مطرح خواهیم کرد. با استفاده از نتایج کلاسیک ویتنی[۵] در [۱۲]، می‌دانیم که $\tilde{G}_{n,3}$ داخل $\mathbb{R}^{6n-1}$ غوطه‌ور می‌شود. در قضیه‌ی زیر

[۴] LS-category

[۵] H. Whitney

فرض می‌کنیم $n = ۲^{m+۱} - ۴$ که در آن $m \geq ۳$. نشان می‌دهیم که:

قضیه: منیفلد گراسمان جهت‌دار $\tilde{G}_{n,۳}$ داخل $\mathbb{R}^{۶n-۳}$ غوطه‌ور می‌شود ولی در $\mathbb{R}^{۳n+۸}$ غوطه‌ور نمی‌شود. در حالت خاص، نشان می‌دهیم که $\tilde{G}_{۴,۳}$ در $\mathbb{R}^{۲۱}$ غوطه‌ور می‌شود ولی در $\mathbb{R}^{۲۰}$ غوطه‌ور نمی‌شود.

تذکر فرض کنیم $n = ۲^{m+۱} - ۴$ که در آن $m \geq ۲$. با استفاده از نتیجه‌ی والگنباخ[۶] [۱۱]، $\tilde{G}_{n,۳}$ در $\mathbb{R}^{۴n-۲m+۳}$ غوطه‌ور نمی‌شود. از طرف دیگر، کوهن[۷] در [۲]، نشان داد که $\tilde{G}_{n,۳}$ داخل $\mathbb{R}^{۶n-m+۱}$ غوطه‌ور می‌شود. لذا، قضیه‌ی بالا وقتی $m = ۲, ۳$ نتیجه‌ی بهتری به دست می‌دهد.

ساختار این پایان نامه چنین است که ابتدا در فصل ۱، مفاهیم اولیه و قضایایی که در این پایان نامه مورد نیاز است، آورده شده است. سپس در فصل ۲، قضایا و مفاهیمی از نظریه‌ی هموتوپی همراه با توصیفی از منیفلدهای گراسمان $G_{n,k}$ و $\tilde{G}_{n,k}$ آورده شده است. در فصل ۳، با در نظر گرفتن نگاشت پوششی مضاعف[۸] $p_n : \tilde{G}_{n,۳} \longrightarrow G_{n,۳}$، زیرحلقه‌ی $\mathbf{Im}p_n^*$ از $H^*(\tilde{G}_{n,۳};\mathbb{Z}_۲)$ را مشخص می‌کنیم؛ سپس به یکریختی $\mathbf{Im}(p_n^*) \cong \frac{\mathbb{Z}_۲[\bar{\omega}_۲,\bar{\omega}_۳]}{J_n}$ می‌رسیم که در آن مولدهای J_n داده شده است.

---

[۶] M. Walgenbach

[۷] R. L. Cohen

[۸] double covering map

در حالتی که $n = ۲^{m+۱} - ۴$ $(m \geq ۲)$، توصیف روشنی از مولدهای ایده‌ال J_n، با استفاده از بسط دودویی به دست می‌آوریم. در فصل ۴، پایه‌ی گروبنر J_n را محاسبه می‌کنیم و $cup(\mathbf{Im}p_n^*)$ را به دست می‌آوریم. در فصل ۵، نشان می‌دهیم که از $cup(\mathbf{Im}p_n^*)$ می‌توان $cup_{\mathbb{Z}_۲}(\tilde{G}_{n,۳})$ را محاسبه نمود. به عنوان کاربرد، تقریبی برای $cat(\tilde{G}_{n,۳})$ را ارایه خواهیم داد و مسأله‌ی غوطه‌وری $\tilde{G}_{n,۳}$ را نیز، مطالعه خواهیم کرد.

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۴

۱.۱ همولوژی، کوهمولوژی ۴

۱.۱.۱ ضرب ناوی و برخی مطالب دیگر ۷

۲.۱ کلافهای برداری ۱۲

۱.۲.۱ کلاس‌های کوهمولوژی استیفل - ویتنی ۱۷

۲ گروه‌های هموتوپی و توصیف $G_{n,k}$ و $\tilde{G}_{n,k}$ ۲۰

۱.۲ گروه‌های هموتوپی ۲۰

۲.۲ توصیف $G_{n,k}$ و $\tilde{G}_{n,k}$ ۲۲

۳ کوهمولوژی $\tilde{G}_{n,2}$ و تعیین مولدهای J_n ۲۹

۱.۳ کوهمولوژی $\tilde{G}_{n,2}$ ۲۹

۲.۳ تعیین مولدهای J_n ۳۴

۳.۳ ملموس‌تر ساختن مولدهای J_n ۴۲

۴ پایه‌ی گروبنر و طول ناوی ۴۸

۱.۴ پایه‌های گروبنر ۴۸

۲.۴ جستجوی پایه‌ی گروبنر J_n ۵۱

۳.۴ طول ناوی Imp_n^* ۵۹

۵ طول ناوی $\tilde{G}_{n,۳}$ و کاربردها ۶۶

۱.۵ . . . . ۶۶

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل برخی از مفاهیم ابتدایی و قضایایی را که در فصل‌های بعدی به آنها نیاز خواهیم داشت را می آوریم.

۱.۱ همولوژی، کوهمولوژی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید R^∞ دارای پایه استاندارد $\{e_0, e_1, ...\}$ باشد، در این صورت pـ سادک استاندارد[1] عبارت است از $\triangle_p = \{x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i | \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$.

تعریف ۲.۱.۱ برای نقاط v_0،...، v_n در R^n، فرض کنید $[v_0, ..., v_n]$ نگاشت $\triangle_n \longrightarrow R^n$، با ضابطه‌ی $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$ باشد؛ در این صورت $[v_0, ..., v_n]$، nـ سادک تکین آفین[2] نامیده می‌شود.

[1] standard p-simplex
[2] affine singular n-simplex

تعریف ۳.۱.۱ $(p-1)$ ـ سادک تکین آفین $\triangle_{p-1} \longrightarrow \triangle_p$: $[e_0, ..., \hat{e_i}, ..., e_p]$ را نگاشت وجهی[3] نامیده و با F_i^p نمایش می‌دهیم. در واقع برای $j < i$، $F_i^p(e_j) = e_j$ و برای $j \geq i$ داریم $F_i^p(e_j) = e_{j+1}$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. منظور از p ـ سادک تکین[4] در X، نگاشت پیوسته‌ی $\sigma : \triangle_p \longrightarrow X$ می‌باشد که در آن $\triangle_p$، p ـ سادک استاندارد است. گروه آبلی آزاد با پایه‌ی همه‌ی p ـ سادکهای تکین در X را با $\triangle_p(X)$ نشان داده و قرار می‌دهیم $\triangle_i(X) = \{0\}$ برای $i \leq 0$. هر عضو $\triangle_p(X)$، p ـ زنجیر تکین[5] در X نامیده می‌شود.

در حالت خاص $\triangle_0(X)$ یک گروه آبلی آزاد با پایه‌ی X است.

تعریف ۵.۱.۱ اگر $\sigma : \triangle_p \longrightarrow X$ یک p ـ سادک تکین باشد، آنگاه i ـ امین وجه از σ به صورت $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^p$ تعریف کرده و مرز[6] σ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^{(i)} \in \triangle_{p-1}(X)$$

تعریف ۶.۱.۱ همریختی‌های $\partial_p : \triangle_p(X) \longrightarrow \triangle_{p-1}(X)$ عملگرهای مرزی[7] نامیده می‌شوند.

برای هر X، دنباله‌ای از گروههای آبلی آزاد و همریختی‌های زیر را داریم:

$$\ldots \longrightarrow \triangle_p(X) \xrightarrow{\partial_p} \triangle_{p-1}(X) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \triangle_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \triangle_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

[3] face map
[4] singular p-simplex
[5] singular p-chain
[6] boundary
[7] boundary operation

که همبافت تکین[۸] X نامیده می‌شود و آن را با $(\triangle_*(X), \partial)$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به تعریف ۶.۱.۱ داریم $\partial_p\partial_{p+1} = 0$.

با در نظر گرفتن همبافت تکین

$$\triangle_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} \triangle_p(X) \xrightarrow{\partial_p} \triangle_{p-1}(X),$$

هسته‌ی[۹] ∂_p را با $Z_p(X)$ نشان می‌دهیم و گروه p ـ دورها[۱۰] می‌نامیم. همچنین تصویر ∂_{p+1} را با $B_p(X)$ نشان داده و آن را گروه p ـ مرزها[۱۱] می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱ برای هر $p \geq 0$، p ـ امین گروه همولوژی از فضای X، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_p(X) = H_p(\triangle_*(X)) = Z_p(X)/B_p(X)$$

تعریف ۸.۱.۱ (همولوژی نسبی)[۱۲] فرض کنید $A \subset X$. در این صورت $\triangle_i(A)$ یک زیر گروه از $\triangle_i(X)$ است، با فرض $\triangle_i(X, A) = \triangle_i(X)/\triangle_i(A)$ آنگاه

$$0 \longrightarrow \triangle_*(A) \longrightarrow \triangle_*(X) \longrightarrow \triangle_*(X, A) \longrightarrow 0$$

یک دنباله دقیق از همبافت‌های زنجیری و نگاشت‌های زنجیری است. همولوژی نسبی از (X, A) به صورت $H_p(X, A) = H_p(\triangle_*(X, A))$ تعریف می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱ (همولوژی باضرایب)[۱۳]فرض کنید G یک گروه آبلی باشد، آنگاه ضرب تانسوری $\triangle_*(X) \otimes G$ یک همبافت زنجیری با دیفرانسیل $\partial \otimes 1$ است. $(\partial_p \otimes 1)(f \otimes g) = \partial_p f \otimes g)$ گروه

[۸] singular complex
[۹] kernel
[۱۰] p-cycles
[۱۱] p-boundaries
[۱۲] relative homology
[۱۳] homology with cofficients

همولوژی با ضرایب در G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_p(X;G) = H_p(\triangle_*(X) \otimes G)$$

اگر A و B گروه‌های آبلی باشند، آنگاه $Hom(A,B)$ گروه آبلی از تمام همریختی‌های $B \longrightarrow A$ را نشان می‌دهد. از دنباله‌ی دقیق $\circ \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow \circ$ دنباله‌ی دقیق $Hom(A',B) \longrightarrow Hom(A,B) \longrightarrow Hom(A'',B) \longrightarrow \circ$ به دست می‌آید؛ حال همبافت زنجیری $(\triangle_*(X),\partial)$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که G یک گروه آبلی باشد، آنگاه $Hom(\triangle_*(X),G)$ نیز یک همبافت زنجیری با دیفرانسیل $\delta = Hom(\partial, ۱)$ می‌باشد. $(\delta(f) = fo\delta)$ اگر همبافت زنجیری

$$\cdots \longrightarrow Hom(\triangle_{p-۱}(X),G) \xrightarrow{\delta_p} Hom(\triangle_p(X),G) \xrightarrow{\delta_{p+۱}} Hom(\triangle_{p+۱}(X),G) \longrightarrow \cdots$$

را در نظر بگیریم، در این صورت گروه کوهمولوژی تکین[۱۴] فضای X با ضرایب در G به صورت $H^p(X;G) = H^p(\triangle^*(X;G)) = ker\delta_{p+۱}/im\delta_p$ تعریف می‌شود که در آن $\triangle^*(X;G) = Hom(\triangle_*(X),G)$.

۱.۱.۱ ضرب ناوی و برخی مطالب دیگر

در این قسمت به تعریف چند ضرب در سطح کوهمولوژی می‌پردازیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ یک گروه مدرج، خانواده‌ای از گروههای آبلی C_i، برای $i \in \mathbb{Z}$ می‌باشد.

[۱۴] singular cohomology

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم A_*، B_*، C_* و D_* گروه‌های مدرج باشند، نگاشت $f : A_* \longrightarrow B_*$ از درجه‌ی d گفته می‌شود اگر آن به ازای هر i، A_i را به B_{i+d} ببرد.

تعریف ۱۲.۱.۱ ضرب تانسوری از دو گروه مدرج A_* و B_* را به صورت گروه مدرج $A_* \otimes B_*$ تعریف می‌کنیم که در آن $(A_* \otimes B_*)_n = \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j$.

اگر $f : A_* \longrightarrow B_*$ و $g : B_* \longrightarrow D_*$ نگاشت‌هایی باشند، آنگاه ضرب تانسوری $f \otimes g : A_* \otimes B_* \longrightarrow C_* \otimes D_*$ با رابطه‌ی $(f \otimes g)(a \otimes b) = (-۱)^{deg(a)deg(g)} f(a) \otimes g(b)$ داده می‌شود. به ویژه برای همبافت‌های زنجیری $\triangle_*(X)$ و $\triangle_*(Y)$، همبافت زنجیری $\triangle_*(X) \otimes \triangle_*(Y)$ را داریم که در آن عملگر مرزی به صورت $\partial_\otimes = \partial \otimes ۱ + ۱ \otimes \partial$ می‌باشد.

قضیه ۱۳.۱.۱ نگاشت زنجیری طبیعی در X و Y به شکل زیر وجود دارد:

$$\theta : \triangle_*(X \times Y) \longrightarrow \triangle_*(X) \otimes \triangle_*(Y)$$

که در آن θ نگاشت طبیعی $x \otimes y \longrightarrow (x, y)$، در درجه‌ی صفر است.

برهان : رجوع شود به مرجع [۱۳] فصل ٦ قضیه‌ی ۲.۱ .

■

اینک، کوهمولوژی با ضرایب در حلقه‌ی تعویض‌پذیر Λ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $f \in \Delta^p(X; \Lambda)$ و $g \in \Delta^q(Y; \Lambda)$. لذا داریم $f : \triangle_p(X) \longrightarrow \Lambda$ و $g : \triangle_q(Y) \longrightarrow \Lambda$. در نتیجه با استفاده از ساختار حلقه‌ای Λ می‌توان نوشت:

$$f \otimes g : \triangle_p(X) \otimes \triangle_q(Y) \longrightarrow \Lambda \otimes \Lambda \longrightarrow \Lambda$$

ضرب عرضی[۱۵] هم‌زنجیرهای f و g را با $f \times g = (f \otimes g) \circ \theta$ تعریف می‌کنیم. در این صورت فرمول عملگر هم‌مرزی برای ضرب عرضی به صورت $\delta(f \times g) = \delta f \times g + (-۱)^{deg(f)} f \times \delta g$ می‌باشد. بنابراین $\times$، ضرب

$$\times : H^p(X;\Lambda) \otimes H^q(Y;\Lambda) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y;\Lambda)$$

را القا می‌کند. ثابت می‌شود که این ضرب به انتخاب θ بستگی ندارد.

حال به معرفی مهمترین ضرب در کوهمولوژی یعنی ضرب **ناوی**[۱۶] می‌پردازیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید $d : X \longrightarrow X \times X$ با $d(x) = (x, x)$ نگاشت قطری باشد در این صورت منظور از ضرب ناوی، همریختی

$$\cup : H^p(X) \otimes H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X)$$

می‌باشد که توسط رابطه‌ی $\alpha \cup \beta = d^*(\alpha \times \beta)$ تعریف می‌شود. با توجه به خواص ضرب عرضی نتیجه می‌شود:

$$\alpha \cup \beta = (-۱)^{pq} \beta \cup \alpha$$

که در آن p و q به ترتیب درجه‌های α و β هستند. از فرمول عملگر هم‌مرزی برای ضرب عرضی، عملگر هم‌مرزی برای ضرب ناوی به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\delta(f \cup g) = \delta f \cup g + (-۱)^{deg(f)} f \cup \delta g \ .$$

در ادامه به برخی قضایایی که در مطالعه‌ی این پایان‌نامه مورد نیاز است اشاره می‌کنیم.

[۱۵] cross product
[۱۶] cup product