وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

عدد تطابقی تحمیلی در گراف‌های فولرن

توسط:
سمیه ماجدی

استادان راهنما:
دکتر بهزاد صالحیان متی‌کلایی
پرفسور سید عبادالله محمودیان

استاد مشاور:
دکتر مصطفی زارع خورمیزی

بهمن ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

عدد تطابقی تحمیلی در گراف‌های فولرن

توسط:

سمیه ماجدی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **بسیار خوب**

دکتر بهزاد صالحیان متی کلایی استادیار ریاضی محض گرایش گراف و ترکیبیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر سید عبادالله محمودیان استاد ریاضی محض گرایش گراف و ترکیبیات دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شریف (استاد راهنما)

دکتر مصطفی زارع خورمیزی استادیار ریاضی محض گرایش منطق ریاضی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر نادر جعفری راد دانشیار ریاضی محض گرایش گراف و ترکیبیات دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود (داور اول)

دکتر حنیف حیدری استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر محمد رمضانپور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به

پیشگاه حضرت ولی عصر (عج)

اقیانوس بی کران علم و دانش

و تقدیم به

پدر عزیز و بزرگوارم

که توفیق اندکم در عرصه ی علم آموزی، مرهون زحمات و حمایت های همیشگی و بی دریغ اوست.

و

مادر فداکار و مهربانم

که وجودش، مایه ی امید و گرمی بخش زندگیم است.

سپاسگزاری

الهی! خودت، یأس و ناامیدی از رحمتت را گناهی بزرگ برشمردی و بر چشم داشتن به روزنه‌های امید، امر فرمودی. خدایا ازصمیم قلبم، تو را برای هدایت خویش می‌خـوانم. به راهی هدایتم کن که سراسرش نور باشد. نوری که از عشق تو می تابد. خدایا، دانائی‌ام را زیاد و جهلم را کم کن و آنچنانم کن که لیاقت داشتن نام انسان، که اشرف مخلوقات توست، داشته باشم و بتوانم دیگران را هم در موهبت‌هائی که به من عطا می‌کنی، سهیم گردانم و رسالت الهی خویش را به انجام برسانم.

با سپاس فراوان از خدایی که درهای رحمتش را بر من گشود و مرا در مسیر علم و دانش قرار داد، اینک که با لطف و عنایت الهی، موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته‌ام، بر خود لازم می‌دانم از کسانی که سختی‌های این راه را برایم هموار کردند، سپاسگزاری نمایم.

در ابتدا از خانواده‌ی عزیزم به خصوص پدر و مادرم که لطف بی‌دریغشان، ره توشه‌ام در این مسیر بود، نهایت تشکر را دارم. از استاد بزرگوارم آقای دکتر بهزاد صالحیان متی کلایی، بسیار سپاسگزارم که در دوران تحصیل و ارائه پایان‌نامه، از راهنمایی‌های ارزنده و علم خویش مرا بهره‌مند نمودند.

از استاد فرهیخته‌ام، پرفسور سید عبادالله محمودیان کمال تشکر را دارم که با نهایت صبر و با کمال اخلاص، مرا در پیشبرد امر پایان‌نامه، یاری رساندند.

همچنین از استاد مشاورم آقای دکتر مصطفی زارع خورمیزی که با نظرات و رهنمودهای ارزشمند خود مرا یاری نمودند سپاسگزارم .

از اساتید محترم آقای دکتر نادر جعفری راد و آقای دکتر حنیف حیدری سپاسگزارم که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند.

چکیده

عدد تطابقی تحمیلی در گراف‌های فولرن

به وسیله‌ی:
سمیه ماجدی

یک مجموعه‌ی تحمیلی برای تطابق کامل M در گراف G، زیرمجموعه‌ی S از M است، به طوری که S در هیچ تطابق کامل دیگری از گراف G واقع نشده باشد. عدد تحمیلی تطابق کامل M در گراف G، اندازه‌ی کوچک‌ترین مجموعه‌ی تحمیلی تطابق M است. مفهوم عدد تحمیلی در گراف‌ها، در سال ۱۹۹۱ توسط هرری و همکارانش برای دستگاه‌های بنزنی مطرح شد و مفهومی مشابه با آن در سال ۱۹۸۷ توسط کلین و رندیک با عنوان درجه‌ی آزادی ذاتی گراف ارائه شده بود. در این پایان نامه، عدد تحمیلی برای گراف‌های فولرن مورد بررسی قرار می‌گیرد. گراف فولرن یک گراف مسطح همبند و ۳-منتظم است که همه‌ی وجه‌هایش پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی هستند. با توجه به ۲-گسترش‌پذیری و همبندی یالی دوری ۵ در گراف‌های فولرن که اخیراً ثابت شده است و ترکیب این نتیجه با نتیجه‌ی قدیمی کوتزیگ درباره‌ی گراف‌هایی که تطابق کامل یکتا دارند، نشان داده می‌شود که عدد تحمیلی برای تطابق‌های کامل در آن‌ها، کم‌تر از ۳ نیست. این کران برای تعداد نامتناهی از گراف‌های فولرن، به دست آمده است.

واژه‌های کلیدی: گراف فولرن، تطابق کامل، عدد تحمیلی، درجه‌ی آزادی

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

گراف‌های فولرن به عنوان رده‌ای از چندوجهی‌های ۳-منتظم برای مدتی طولانی در ریاضیات مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال دوازده‌وجهی گراف فولرنی با ۲۰ رأس است. از دیدگاه شیمی، یک فولرن یک مولکول شکل یافته‌ی کروی است که از اتم‌های کربن تشکیل می‌شود به طوری که هر حلقه‌ی کربن یا یک پنج‌ضلعی بوده یا به صورت یک شش‌ضلعی است و هر اتم کربن با دقیقاً ۳ اتم کربن دیگر پیوند دارد. برای مثال مولکول مشهور C_{60} یکی از فولرن‌هایی است که توسط کروت [1] و همکارانش در سال ۱۹۸۵ کشف شده است. از دیدگاه ریاضی گراف فولرن یک گراف مسطح (یا به شکل کروی) ۳-همبند و ۳-منتظم است که فقط وجه‌های پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی دارد. با استفاده از فرمول اویلر و انجام یک محاسبه‌ی ساده، نشان داده می‌شود که هر گراف فولرن دقیقاً دوازده وجه پنج‌ضلعی دارد. مجموعه‌ای از یال‌های مستقل در گراف فولرن F، تطابق F نامیده می‌شود. تطابق کامل M در گراف F تطابقی است که در آن هر رأس F هم‌وقوع با دقیقاً یک یال M است. تطابق‌های کامل در شیمی، ساختارهای ککوله [2] نامیده می‌شوند. یک مجموعه‌ی تحمیلی برای تطابق کامل M در گراف F، زیرمجموعه‌ی S از M است به طوری که S در هیچ تطابق کامل دیگری از F واقع نشده باشد. اندازه‌ی کوچک‌ترین مجموعه‌ی تحمیلی برای تطابق کامل M در گراف F، عدد تحمیلی یا درجه‌ی آزادی M نامیده می‌شوند و با نماد $f(F;M)$ نشان داده می‌شود. ساختارهای ککوله نقش بسیار مهمی را در انرژی رزونانس مولکولی و ترکیبات آروماتیک مولکول‌های آلی بازی می‌کنند [۲۳]. برای یک فولرن، ساختارهای ککوله به طور برابر در انرژی رزونانس مولکولی سهیم نمی‌شوند [۹]. کارهای اخیر [۲۸، ۲۷، ۲۶، ۲۴] نشان داده است که ساختارهای ککوله‌ی فولرن‌هایی با درجه‌ی آزادی بزرگ مهم‌تر از فولرن‌هایی با درجه‌ی آزادی کوچک‌تر در نظریه‌ی رزونانس هستند. عدد تحمیلی

[1] kroto

[2] Kekulé structure

گراف فولرن F کم‌ترین عدد در بین اعداد تحمیلی همه‌ی تطابق‌های کامل گراف F است و با نماد $f(F)$ نشان داده می‌شود. در این پایان نامه، عدد تطابقی تحمیلی گراف‌های فولرن مورد بررسی قرار می‌گیرد. این پایان نامه در ۵ فصل تنظیم شده است.

- فصل اول مفاهیم و قضایای مقدماتی از نظریه‌ی گراف را بیان می‌کنیم که در فصل‌های دیگر مورد نیاز است.
- در فصل دوم به منظور آشنایی بیش‌تر با گراف‌های فولرن تعدادی از ویژگی‌های ساختاری گراف‌های فولرن مانند همبندی یالی دوری و گسترش‌پذیری آن‌ها را بررسی می‌کنیم.
- فصل سوم تعدادی مسائل باز در مورد فولرن‌ها از لحاظ هندسی و ترکیبیاتی مطرح می‌شود .
- فصل چهارم تطابق‌های تحمیلی را برای گراف‌های دوبخشی مانند شبکه‌های مربعی، چنبره و ابرمکعب و تعدادی رده‌ی خاص از گراف‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم.
- فصل پنجم که قسمت اصلی این پایان نامه را تشکیل می‌دهد با استفاده از دو ویژگی ساختاری گراف‌های فولرن نشان داده می‌شود که اعداد تحمیلی تطابق‌های کامل در گراف‌های فولرن عمومی، کم‌تر از ۳ نیست.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است می‌پردازیم، این فصل شامل ۳ بخش است، در بخش اول مفاهیم اولیه‌ی گراف نظیر همبندی را بیان می‌کنیم، در بخش دوم تعاریف و قضیه‌های مربوط به تطابق و بخش سوم به مفاهیم و ویژگی‌های ابتدایی گراف‌های مسطح می‌پردازیم.

۱-۱ تعریف‌ها و قضیه‌های مقدماتی در مورد گراف و همبندی گراف‌ها

تعریف ۱.۱.۱. گراف G، متشکل از سه تایی مرتب چون $(V(G), E(G), \psi_G)$ است که در آن $V(G)$، مجموعه‌ی رأس‌ها و $E(G)$، مجموعه‌ای مجزا از $V(G)$، به نام مجموعه‌ی یال‌ها می‌باشد و تابع وقوع ψ_G که هر یال G را به جفت نامرتب از رأس‌های G که لزوماً مجزا نیستند، مربوط می‌سازد. اگر e یک یال در G باشد و u و v رأس‌هایی از G باشند، به طوری که $\psi_G(e) = \{u, v\}$، در این صورت گفته می‌شود که یال e، u و v را متصل می‌کند و رأس‌های u و v، دو سر یال e هستند. تعداد رأس‌های G را با n و تعداد یال‌های G را با m نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. دو رأس انتهایی یک یال، رأس‌های هم‌وقوع با آن یال نامیده می‌شوند و دو رأسی را که هم‌وقوع با یک یال مشترک هستند، رأس‌های هم‌جوار یا مجاور می‌گویند و همین طور دو یالی که هم‌وقوع با یک رأس مشترک می‌باشند، دو یال مجاور نامیده می‌شوند. دو یالی که هم‌وقوع با هیچ

رأس مشترکی نیستند، یال‌های مستقل نامیده می‌شوند. دو رأس مجاور مجزا، دو رأس همسایه نامیده می‌شوند. مجموعه‌ی رأس‌های همسایه‌ی v، با نماد $\mathrm{N_G(v)}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. یک یال با نقاط ابتدا و انتهای مساوی را طوقه و یال با نقاط انتهایی مجزا را پیوند می‌نامند.

تعریف ۴.۱.۱. یک جفت یا تعداد بیش‌تری از پیوندهایی را که نقاط ابتدا و انتهایی آن‌ها یکسان هستند، یال‌های موازی می‌گویند.

تعریف ۵.۱.۱. گراف بدون طوقه و یال‌های موازی، گراف ساده نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱. گراف H زیرگراف G است و می‌نویسیم $H \leq G$، اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد و ψ_H تحدید ψ_G به $E(H)$ باشد. وقتی که $H \leq G$ است ولی $H \neq G$ ، می‌نویسیم $H < G$ و H را زیرگراف سره‌ی G می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. H زیرگراف فراگیر G است، هرگاه شامل همه‌ی رأس‌های گراف G باشد. یعنی در واقع داشته باشیم $V(H) = V(G)$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم که V' زیرمجموعه‌ی ناتهی V باشد، زیرگراف G را که مجموعه‌ی رأس‌هایش V' و مجموعه‌ی یال‌هایش، مجموعه‌ای از آن یال‌های G است که هر دو انتهایشان در V' است زیرگراف G القاء شده به وسیله‌ی V' می‌نامند و با نماد $G[V']$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۹.۱.۱. زیرگراف القایی $G[V\backslash V']$ را که به صورت $G - V'$ هم نمایش می‌دهند، زیرگرافی است که از G با حذف رأس‌های V' همراه با یال‌هایی که رأس‌های V' بر آن‌ها واقع‌اند، به دست می‌آید.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم که E' زیرمجموعه‌ی ناتهی از E باشد، زیرگراف G را که مجموعه‌ی رأس‌هایش، مجموعه‌ای از دو انتهای یال‌ها در E' و مجموعه‌ی یال‌هایش، مجموعه‌ی E' است زیرگراف Gی القایی به وسیله‌ی E' می‌نامند و آن را با نماد $G[E']$ نمایش می‌دهند. در واقع $G[E']$ زیرگراف یال-القایی G می‌باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. درجه‌ی رأس v در گراف G که با نماد $\mathrm{d_G(v)}$ نمایش داده می‌شود، تعداد یال‌های گراف G است که رأس v بر آن‌ها واقع شده است. هر طوقه دو یال به حساب می‌آید. کم‌ترین و بیش‌ترین درجه‌ی رأس‌های G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$، نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۲. گراف G، $k-$منتظم است، هرگاه درجه‌ی همه‌ی رأس‌های آن k باشد و گراف منتظم، گرافی است که به ازاء kیی، منتظم باشد. گراف ۳-منتظم را گراف مکعبی می‌نامند.

تعریف ۱.۱.۱۳. گراف دوبخشی، گرافی است که مجموعه‌ی رأس‌های آن را می‌توان به دو بخش مانند X و Y افراز کرد، به طوری که هر یال این گراف، یک سرش در بخش X و سر دیگر آن در بخش Y قرار داشته باشد.

قضیه ۱.۱.۱۴. *برای هر گراف G، اگر m، نمایش تعداد یال‌ها باشد، داریم:* $\sum_{v\in V(G)} \mathrm{d(v)} = ۲m$

اثبات. برای اثبات به مرجع [۳] صفحه‌ی ۱۰ مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱.۱.۱۵. یک $k-$عامل در گراف G یک زیرگراف فراگیر $k-$ منتظم G است.

تعریف ۱.۱.۱۶. حاصلضرب دکارتی دو گراف $G_۱$ و $G_۲$ که با نماد $G = G_۱\square G_۲$ نمایش داده می‌شود، گرافی است که مجموعه‌ی رأس‌های آن به صورت $V(G) = V(G_۱) \times V(G_۲)$ است و دو رأس $(u_۱, u_۲)$ و $(v_۱, v_۲)$ در صورتی مجاورند که $u_۱ = v_۱$ و $u_۲v_۲ \in E(G_۲)$؛ یا $u_۲ = v_۲$ و $u_۱v_۱ \in E(G_۱)$ باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. یک گشت یا راه در گراف G، دنباله‌ی ناتهی به صورت $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲ \dots e_kv_k$ است که جمله‌های آن متناوباً رأس‌ها و یال‌ها هستند، به قسمی که برای $۱ \leq i \leq k$، دو انتهای یال e_i، رأس‌های $v_{i-۱}$ و v_i هستند. می‌گوییم W گشتی از $v_۰$ به v_k یا یک $(v_۰, v_k)-$گشت است. رأس‌های $v_۰$ و v_k را به ترتیب مبدأ و انتهای W و $v_۱$ و $v_۲$، $\dots$، $v_{k-۱}$ را رأس‌های داخلی‌اش می‌نامند. در یک گشت، لزومی ندارد که یال‌ها، متمایز باشند، بنابراین رأس‌ها نیز ممکن است متمایز نباشند. عدد صحیح k، طول W می‌باشد. در گراف ساده‌ی G یک گشت را به صورت دنباله‌ای از رأس‌های مجاور می‌نویسیم.

تعریف ۱.۱.۱۸. اگر یال‌های $e_۱, e_۲, \dots, e_k$ در گشت W مجزا باشند، در این صورت گشت W را یک گذر می‌نامند. با وجود متمایز بودن یال‌ها، به دلیل امکان وجود یال‌های موازی در گراف G ، ممکن است رأس‌ها متمایز نباشند. تعداد یال‌ها، طول W را مشخص می‌کنند.

تعریف ۱.۱.۱۹. اگر در گشت W، علاوه بر یال‌ها، رأس‌های $v_۰, v_۱, \dots, v_k$، مجزا باشند W را یک مسیر می‌نامند. بنابراین در گراف ساده‌ی G، یک مسیر به صورت دنباله‌ای از رأس‌های دو به دو متمایز نوشته می‌شوند، به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله، در گراف G، مجاور هستند. طول یک مسیر، تعداد یال‌های آن مسیر است. یک مسیر به طول k را یک $k-$مسیر می‌نامیم.

تعریف ۲۰.۱.۱. می‌گوییم دو رأس u و vی گراف G همبندند هرگاه یک $(u,v)-$ مسیر بین آن‌ها وجود داشته باشد. رابطه‌ی همبندی، یک رابطه‌ی هم‌ارزی در مجموعه‌ی رأس‌های V است. بنابراین افرازی از V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_1, V_2, \dots, V_w$ وجود دارد، به طوری که دو رأس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v، هر دو متعلق به یک مجموعه‌ی V_i باشند.
زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_w]$ را مؤلفه‌های همبندی G می‌نامند. هرگاه گراف G دقیقاً یک مؤلفه‌ی همبندی داشته باشد، همبند است در غیر این صورت، G ناهمبند می‌باشد. تعداد مؤلفه‌های G را با $\omega(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۱.۱.۱. اگر رأس‌های u و v در گراف G همبند باشند آن‌گاه فاصله‌ی بین u و v در G را که با $\mathrm{d}_G(u,v)$ نشان می‌دهند، طول کوتاه‌ترین مسیر (u,v) در G است. اگر هیچ مسیری موجود نباشد که u و v را به هم وصل کند آن‌گاه $\mathrm{d}_G(u,v)$ را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۲.۱.۱. قطر گراف G، بزرگ‌ترین فاصله‌ی بین هر دو رأس G تعریف می‌شود. قطر G را با $\mathrm{diam}(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۱.۱. گشت بسته است اگر طول مثبت داشته باشد و مبدأ و انتهای آن یکی باشند. گذر بسته‌ای که رأس‌های داخلی و مبدأ آن مجزا باشند، دور است. طول یک دور، تعداد یال‌های آن دور می‌باشد. دور به طول k را یک $k-$دور می‌نامیم. ۳-دور را یک مثلث می‌گوییم و ۴-دور از یک مربع، ۵-دور از یک پنج‌ضلعی و ۶-دور از یک شش‌ضلعی تشکیل شده‌اند.

تعریف ۲۴.۱.۱. کمر گراف G، طول کوتاه‌ترین دور در گراف G است. اگر G دارای هیچ دوری نباشد، کمر G را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم.

قضیه ۲۵.۱.۱. *گراف G، دوبخشی است اگر و تنها اگر شامل هیچ دوری به طول فرد نباشد.*

اثبات. برای اثبات به مرجع [۳] ، صفحه‌ی ۱۴ مراجعه شود. □

تعریف ۲۶.۱.۱. گراف همبند بدون دور را درخت می‌نامیم.

قضیه ۲۷.۱.۱. در یک درخت، *داریم:* $m = n - 1$

اثبات. برای اثبات به مرجع [۳] ، صفحه‌ی ۲۵ مراجعه شود. □

تعریف ۲۸.۱.۱. هر گراف بدون دور، جنگل نامیده می‌شود. در واقع هر مؤلفه‌ی یک جنگل، درخت است.

قضیه ۲۹.۱.۱. *اگر G یک جنگل باشد، در این صورت $m = n - \omega$ که ω تعداد مؤلفه‌های جنگل G است.*

اثبات. چون هر مؤلفه‌ی یک جنگل ،درخت است، در این صورت برای تعداد یال‌های هر مؤلفه، رابطه‌ی $(n_i - ۱)$ ، به ازای $(i = ۱, ۲, \ldots, \omega)$ برقرار است و داریم:

$$m = (n_۱ - ۱) + (n_۲ - ۱) + \cdots + (n_\omega - ۱) = (n_۱ + n_۲ + \cdots + n_\omega) - \omega = n - \omega$$

$\square$

تعریف ۳۰.۱.۱. یال e را یک پل یا یال برشی می‌گوییم هرگاه $\omega(G - e) > \omega(G)$

قضیه ۳۱.۱.۱. *e یک یال برشی است اگر و تنها اگر e در هیچ دور G، واقع نباشد.*

اثبات. برای اثبات، به مرجع [۳] ، صفحه‌ی ۲۷ مراجعه شود. $\square$

تعریف ۳۲.۱.۱. رأس v از G رأس برشی است اگر E بتواند به دو زیرمجموعه‌ی ناتهی $E_۱$ و $E_۲$ افراز شود به طوری که $G[E_۱]$ و $G[E_۲]$ تنها در رأس v مشترک باشند. اگر G بدون طوقه و نابدیهی باشد، آن‌گاه v رأس برشی G است اگر و تنها اگر $\omega(G - v) > \omega(G)$

تعریف ۳۳.۱.۱. برش رأسی G، زیرمجموعه‌ی V' از V است، به طوری که $G - V'$ ناهمبند باشد. یک مجموعه‌ی برش $k-$رأسی، برش رأسی k عضوی است.

تعریف ۳۴.۱.۱. اگر گراف G، حداقل یک جفت رأس نامجاور متمایز داشته باشد، همبندی $\kappa(G)$، کم‌ترین مقدار k است که به ازای آن G، برش $k-$رأسی دارد. در غیر این صورت $\kappa(G)$ را برابر با $n - ۱$ تعریف می‌کنیم. پس $\kappa(G) = ۰$، اگر G یک گراف شامل یک رأس(بدیهی) یا ناهمبند باشد.

تعریف ۳۵.۱.۱. گراف G را گراف $k-$همبند می‌گویند اگر $k \leq \kappa(G)$ باشد. به بیان دیگر همبندی گراف G ، یعنی $\kappa(G)$، بزرگ‌ترین مقدار k است که به ازای آن گراف G، $k-$ همبند می‌باشد.

تعریف ۳۶.۱.۱. برای زیرمجموعه‌های S و S' از $V(G)$، مجموعه‌ی یال‌هایی که یک انتهایشان در S و انتهای دیگرشان در S' است را به وسیله‌ی $[S, S']$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۷.۱.۱. برش یالی G، زیرمجموعه‌ای از E به صورت $[S, \overline{S}]$ است که در آن S، زیرمجموعه‌ی سره‌ی ناتهی از $V(G)$ و $\overline{S} = V(G) \backslash S$ است. در واقع اگر G بدیهی نباشد و E' یک برش یالی باشد، آن‌گاه $G - E'$، ناهمبند است. یک برش $k-$یالی، برش یالی k عضوی است.

تعریف ۳۸.۱.۱. همبندی یالی $\kappa'(G)$، کم‌ترین مقدار k است که به ازای آن گراف G، یک برش $k-$ یالی دارد. اگر G بدیهی یا ناهمبند باشد، $\kappa'(G)$ صفر است.

تعریف ۳۹.۱.۱. گراف G را $k-$همبند یالی می‌گوییم هرگاه $k \leq \kappa'(G)$ باشد.

قضیه ۴۰.۱.۱. $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

اثبات. برای اثبات به مرجع [۳] صفحه‌ی ۴۳ مراجعه شود. □

تعریف ۴۱.۱.۱. خانواده‌ای از مسیرها را در G درونی-مجزای رأسی می‌گویند اگر هیچ رأس G، یک رأس درونی برای بیش از یک مسیر خانواده نباشد.

قضیه ۴۲.۱.۱. (*قضیه‌ی ویتنی*) [۱] *: گراف G با $n \geq 3$ رأس، ۲-همبند است اگر و تنها اگر هر دو رأس G، به وسیله‌ی حداقل دو مسیر درونی-مجزا به هم متصل باشند.*

اثبات. برای اثبات به مرجع [۳] صفحه‌ی ۴۵ مراجعه شود. □

از قضیه‌ی ۴۲.۱.۱ ، نتیجه‌ی زیر در مورد گراف‌های ۲-همبند حاصل می‌شود:

نتیجه ۴۳.۱.۱. *اگر گراف G ، ۲-همبند باشد، آن‌گاه هر دو رأس G روی یک دور مشترک قرار می‌گیرد.*

و به طور معادل قضیه‌ی زیر را می‌توان در مورد گراف‌های ۲-همبند بیان کرد.

قضیه ۴۴.۱.۱. *اگر $n \geqslant 3$، شرایط زیر معادلند و مشخص‌کننده‌ی گراف‌های ۲-همبند هستند.*

- *G همبند است و دارای هیچ رأس برشی نیست.*
- *به ازای هر $x, y \in V(G)$، بین x و y، مسیرهای مجزا- درونی وجود دارد.*
- *به ازای هر دو رأس $x, y \in V(G)$ ، یک دور بین x و y وجود دارد.*
- *$\delta(G) \geqslant 1$ و هر جفت از یال‌های G، روی یک دور مشترک قرار می‌گیرند.*

تعریف ۴۵.۱.۱. مجموعه‌ی k یال که برداشتن آن‌ها گراف G را به دو مؤلفه تبدیل می‌کند، به طوری که هر مؤلفه شامل یک دور باشد، یک مجموعه‌ی $k-$برش یالی دوری نامیده می‌شود. این مجموعه‌ی برشی بدیهی است اگر حداقل یکی از این دو مؤلفه شامل دور منفردی به طول k باشد.

تعریف ۴۶.۱.۱. گراف G را به طور دوری $k-$همبند یالی می‌گوییم، اگر حداقل k یال را باید حذف کرد تا گراف G به دو مؤلفه‌ی همبندی تبدیل شود، به طوری که هر یک از این مؤلفه‌ها، شامل یک دور باشد.

[۱] Whitney