دانشگاه الزهراء(س)
دانشکده علوم پایه

جلسه دفاعیه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضیات کاربردی

عنوان

روش‌های عددی در حل معادلات انتگرال—دیفرانسیل با هسته‌های منفرد ضعیف

استاد راهنما

دکتر یداله اردوخانی

استاد مشاور

دکتر علی مردان شاه رضائی

دانشجو

سمیه میرشکاری بنده قرایی

اسفند ۱۳۸۸

قدردانی و تشکر

سپاس فراوان خدایی را که اول است بدون آنکه پیش از او اولی باشد و آخر است بدون آنکه پس از او آخری باشد، دیده‌ها از دیدنش فرومانده و اندیشه‌ها از وصفش عاجز شده‌اند.

((**من لم یشکر المخلوق ، لم یشکر الخالق**))

در این جا وظیفه خود می‌دانم که از استاد راهنمای گرامی‌ام، جناب آقای دکتر اردوخانی و استاد مشاور بزرگوارم، جناب آقای دکتر شاه‌رضائی که در طول پایان نامه صبورانه یاریم کردند، کمال قدردانی و تشکر را نمایم.

هم‌چنین از اساتید محترم جناب آقای دکتر شمسی و سرکار خانم دکتر تجویدی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

در پایان از مادر مهربانم، که تا به امروز مشوق اصلی من در تمامی موفقیت هایم بوده و همه عزیزانی که در طول این مسیر یاری‌ام نمودند، قدردانی می نمایم.

چکیده

هدف اصلی در این پایان نامه حل معادلات انتگرال–دیفرانسیل فردهلم با هسته منفرد ضعیف به شکل

$$u^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)u^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^b k_i(t,s)u^{(i)}(s)ds + f(t) \ \ ; \ 0 \leqslant t \leqslant b \ , \ b > 0$$

با شرایط آمیخته

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{ij}u^{(i)}(0) + \beta_{ij}u^{(i)}(b)] = 0 \ ; \quad j = 1, \cdots, n \ .$$

به کمک روش اسپلاین هم محلی و روش گالرکین گسسته می‌باشد که در آن داریم:

$$n \in \mathbb{N}, \ i = 0, \cdots, n-1, \ j = 1, \cdots, n, \ \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}, \ a_i \ , \ f \ \in C^{m,\nu}(0,b), \ K_i \in W^{m,\nu}(\Delta).$$

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال–دیفرانسیل با هسته‌های منفرد ضعیف، روش چندجمله‌ای قطعه‌ای هم محل، روش گالرکین گسسته، افراز مدرج.

فهرست مندرجات

مقدمه

یکی از شاخه‌های علم ریاضی که کاربردهای فراوانی در مسائل مهندسی، فیزیک، شیمی و بیولوژی دارد، معادلات انتگرال است. نوعی از معادلات انتگرال، معادلات انتگرال منفرد به طور ضعیف می‌باشد که در مسائل فراوانی نظیر انتقال گرما، رشد کریستالها و مکانیک سیالات ظاهر می‌شوند. با توجه به این که حل بسیاری از این معادلات با روش های تحلیلی امکان پذیر نیست، در نتیجه روشهای عددی مختلفی برای حل آنها بیا ن شده است.
پروفسور جیانگ [1] از جمله کسانی است که معادلات انتگرال با هسته ضعیف را مورد بررسی قرار داد[1]. در [4 − 2] روش هم محلی برای حل معادلات انتگرال ولترا و فردهلم با هسته ضعیف بیان شده است. در سال‌های اخیر، استفاده از روش‌های مختلف نظیر، روش تاو [2] در [5]، روش تیلور [3] در [6]، روش اسپلاین قوی در [7] و روش تجزیه آدومیان [4] بهبود یافته در [14] برای حل معادلات انتگرال−دیفرانسیل توجه خاصی را در بین محققین جلب نموده است و شاهد گسترش بعضی از این روش‌ها در حل معادلات انتگرال−دیفرانسیل با هسته‌ی منفرد ضعیف در [24 − 21] می‌باشیم.
همچنین تحلیل پایداری و همگرایی این روش‌ها در [26 − 25] مورد بررسی قرار گرفته است.
این پایان‌نامه مشتمل بر ۴ فصل می‌باشد. در فصل اول، مقدماتی از آنالیز حقیقی، آنالیز عددی و آنالیز تابعی ارائه می‌گردد که مورد نیاز فصل‌های بعدی می‌باشند. در فصل دوم، به بررسی معادلات انتگرال و انواع آن می‌پردازیم. در فصل سوم، روش‌های تصویر و کاربرد آن در حل

Jiang[1]
Tau[2]
Taylor[3]
Adomian[4]

معادلات انتگرال بیان می‌شود. در فصل چهارم، به بررسی روش اسپلاین هم‌محلی و گالرکین گسسته و همگرایی این روش‌ها می‌پردازیم و در انتها با ارائه مثال‌هایی، روش‌های نامبرده را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز از آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی می‌پردازیم [8 − 11] که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۱ مفاهیم اولیه در آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه X از عنصرها روی مجموعه اعداد حقیقی را یک فضای برداری (فضای خطی حقیقی یا فضای برداری خطی) روی $\mathbb{R}$ گویند هر گاه تابع $(+) : X \times X \to X$ و تابع $(\times) : \mathbb{R} \times X \to X$ وجود داشته باشند که در شرطهای زیر صدق کنند:

1 • $\forall x, y \in X \quad , \quad x + y \in X.$

2 • $\forall x, y, z \in X \quad , \quad (x + y) + z = x + (y + z)\cdot$

3 • $\exists 0 \in X \quad , \quad \forall x \in X \quad ; \quad x + 0 = 0 + x = x\cdot$

4 • $\forall x \in X \ , \ \exists u \in X \ ; \ x + u = u + x = 0.$

5 • $\forall x, y \in X \quad ; \quad x + y = y + x\cdot$

6 • $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in X \ , \ \alpha x \in X.$

7 • $\forall x, y \in X \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad ; \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y\cdot$

8 • $\forall x, y \in X \quad , \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad ; \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x\cdot$

9 • $\forall x \in X \quad , \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad ; \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)\cdot$

10 • $\forall x \in X \quad , \quad 1x = x\cdot$

عنصر 0 معرفی شده در رابطه (۳)منحصر به فرد بوده و آن را صفر فضا می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ تابع حقیقی و نامنفی $\| \cdot \|$ روی فضای برداری X نرم نامیده می‌شود هرگاه،

$$1\bullet \quad \forall x \in X \quad ; \quad \| x \| \geqslant 0 \ , \ \|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$
$$2\bullet \quad \forall x \in X \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad ; \quad \| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|,$$
$$3\bullet \quad \forall x, y \in X \quad ; \quad \| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \| \cdot$$

برای بردار مفروض x نرم p که با نماد $\| \cdot \|_p$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف میشود:

$$\| x \|_p = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p)^{\frac{1}{p}}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

تعریف ۳.۱.۱ فضای متریک (X, ρ) عبارت است از یک فضای برداری X و یک تابع حقیقی ρ که روی $X \times X$ تعریف شده باشد و برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

$$1\bullet \quad \rho(x, y) \geqslant 0,$$
$$2\bullet \quad x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(x, y) = 0,$$
$$3\bullet \quad \rho(x, y) = \rho(y, x),$$
$$4\bullet \quad \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)\cdot$$

تابع ρ را متریک گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ به فضای خطی X که دارای یک نرم است، فضای خطی نرم دار گوییم.

مثال ۱.۱.۱ یک مثال بدیهی از فضاهای متریک، مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ با $\rho(x, y) = | x - y |$ می‌باشد. از مثال‌های دیگر فضاهای متریک، فضای خطی نرم‌دار با متر $\rho(x, y) = \| x - y \|$ می‌باشد که به ρ متر تولید شده توسط نرم گوییم.

تعریف ۵.۱.۱ فضای خطی (مختلط) X را یک فضای ضرب داخلی گوییم هرگاه یک تابع مختلط (یاحقیقی)روی$X \times X$ وجود داشته باشد به طو ری که برای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$

داشته باشیم:

$$
\begin{aligned}
1 \bullet \quad & (x+y,z)=(x,z)+(y,z),\\
2 \bullet \quad & (x,y)=\overline{(y,x)},\\
3 \bullet \quad & (\alpha x,y)=\alpha(x,y),\\
4 \bullet \quad & (x,x)\geqslant 0\ ,\ (x,x)=0 \Longleftrightarrow x=0\cdot
\end{aligned}
$$

(x,y) ضرب داخلی x و y نامیده می‌شود. این ضرب داخلی نرم x، یعنی $\parallel x \parallel = \sqrt{(x,x)}$ را تعریف می‌کند.

قضیه ۱.۱.۱ اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد آن‌گاه به ازای هر x و y داریم:

۱) نامساوی کشی ـ شوارتز[1]: $|(x,y)| \leqslant \parallel x \parallel \parallel y \parallel$،

۲) نامساوی مثلث: $\parallel x+y \parallel \leqslant \parallel x \parallel + \parallel y \parallel$،

۳) اتحاد متوازی الاضلاع: $\parallel x+y \parallel^2 + \parallel x-y \parallel^2 = 2 \parallel x \parallel^2 + 2 \parallel y \parallel^2$.

تعریف ۶.۱.۱ دنباله‌ی $\{x_n\}$ را در فضای خطی نرم دار به عنصر x از این فضا همگرا گوییم هرگاه:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad ; \quad \forall n > n_0 \qquad \parallel x_n - x \parallel < \epsilon \cdot$$

در صورت همگرایی x_n به x می‌نویسیم،

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

تعریف ۷.۱.۱ دنباله $\{x_n\}$ در یک فضای خطی نرم‌دار یک دنباله کشی است هر گاه،

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad ; \quad \forall n,m \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad \parallel x_n - x_m \parallel < \epsilon \cdot$$

به آسانی می‌توان نشان داد هر دنباله همگرا یک دنباله کشی است.

[1] Cauchy-Schwarz

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای متری بوده، $E \subset X$، $p \in E$ و f مجموعه‌ی E را بتوی Y بنگارد. در این صورت f را در p پیوسته نامیم هرگاه،

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad ; \quad d_X(x,p) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon \cdot$$

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم f یک نگاشت از فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد. می‌گوییم f بر X به طور یکنواخت پیوسته است هرگاه،

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall p,q \in X \quad ; \quad d_X(p,q) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(p), f(q)) < \epsilon \cdot$$

تعریف ۱۰.۱.۱ خانواده $\mathcal{F}$ از توابع مختلط مانند f را که بر مجموعه‌ی E در فضای متری X تعریف شده‌اند، بر E هم‌پیوسته خوانند هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، δی مثبتی باشد به طوری که هر وقت $d(x,y) < \delta$، $x \in E$، $y \in E$ و $f \in \mathcal{F}$، داشته باشیم:

$$\mid f(x) - f(y) \mid < \epsilon \cdot$$

در اینجا d نشان دهنده‌ی متر X است.

قضیه ۲.۱.۱ هرگاه k فشرده بوده، $f_n \in \mathcal{C}(k)$ و به ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $\{f_n\}$ بر k نقطه به نقطه کراندار و هم‌پیوسته باشد، آن‌گاه $\{f_n\}$ شامل زیردنباله‌ای به طور یکنواخت همگرا می‌باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ هرگاه هر دنباله‌ی کشی در فضای متریک X به نقطه‌ای در X همگرا باشد، X را فضای کامل گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱ فضای خطی نرم دار X را یک فضای باناخ[2] گوییم هرگاه، X نسبت به متریک تولید شده کامل باشد یعنی، هر دنباله‌ی کشی در X همگرا باشد.

---

[2] Banach

مثال ۲.۱.۱ فضای اعداد مختلط روی $\mathbb{C}$ با متریک $d(x,y)=|x-y|$ یک فضای باناخ می‌باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ برای $1 \leqslant p \leqslant \infty$، فضای متشکل از تمام توابع اندازه‌پذیر $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ که $\int_a^b |f(t)|^p\, dt < \infty$، را فضای $L^p(a,b)$ گوییم. پس

$$L^p[a,b] = \{f | f:[a,b] \to \mathbb{C}\ ,\ \text{f اندازه پذیر}\ ,\ \ \int_a^b |f(x)|^p\, dx < \infty\}.$$

توجه: $L^p(a,b)$ فضای برداری است و با نرم زیر یک فضای باناخ است:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad .$$

در حالت خاص، $L^2(a,b)$ یعنی

$$L^2[a,b] = \{f | f:[a,b] \to \mathbb{C}\ ,\ \text{f اندازه پذیر}\ ,\ \ \int_a^b |f(x)|^2\, dx < \infty\},$$

با نرم $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۱۴.۱.۱ فضای ضرب داخلی H را یک فضای هیلبرت[3] گوییم هرگاه H نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی یک فضای باناخ باشد.

مثال ۳.۱.۱ فضای L^2 با ضرب داخلی $< u, \nu >= \int_a^b u(t)\overline{\nu(t)}dt$ یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۱۵.۱.۱ تابع ω را بر $[a,b]$ یک تابع وزن گوییم هرگاه داشته باشیم:

۱) ω بر (a,b) نامنفی باشد،

۲) ω بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد،

---

[3] Hilbert

۳) ω بر هیچ زیربازه (a,b) متحد صفر نباشد.

قبلاً در L^2 ضرب داخلی را تعریف کردیم، حال ضرب داخلی وزن‌دار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< u,\nu >= \int_a^b \omega u \nu$$

که در آن ω تابع وزن نام دارد.

۲.۱ تعامد

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی بوده و $x,y \in X$ متمایز باشند x را بر y عمود گوییم هرگاه برای $x \neq y$ داشته باشیم $(x,y) = 0$ و آن را با نماد $x \perp y$ نمایش می‌دهیم.
اگر به ازای هر $x,y \in A$ داشته باشیم:

$$(x,y) = \begin{cases} 0 \;; & x \neq y, \\ \alpha > 0 \;; & x = y, \end{cases}$$

در این صورت $A \subset X$ را متعامد گوییم. اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| = 1$، مجموعه A را متعامد یکه یا نرمال گوییم[12].

قضیه ۱.۲.۱ اگر A یک زیر مجموعه‌ی متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آن‌گاه سری فوریه $\sum\limits_{x\in A} (y,x)x$ مستقل از ترتیب جملات همگراست.

تعریف ۲.۲.۱ اگر X یک فضای ضرب داخلی و A یک زیر مجموعه متعامد یکه از X باشد، آنگاه A را یک پایه متعامد یکه برای X گوییم هرگاه به ازای هر $y \in X$ داشته باشیم:

$$y \doteq \sum_{x\in A} (y,x)x \quad .$$

که در آن $\doteq$ به مفهوم تقریباً همه جا می‌باشد.

قضیه ۲.۲.۱ اگر A یک مجموعه ی متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

۱) برای هر $y \in H$ داریم $\|y\|^2 = \sum\limits_{x\in A} |(y,x)|^2$ (اتحاد پارسوال[4])،

۲) A کامل است،

۳) A یک پایه متعامد یکه است.

با توجه به این قضیه، اگر A یک زیر مجموعه متعامد یکه کامل از فضای هیلبرت H باشد، آنگاه هر عضو $y \in H$ را می‌توان به صورت سری فوریه $\sum\limits_{x\in A}(y,x)x$ بسط داد که سری فوریه مذکور مستقل از ترتیب جملات به y همگراست.

لم ۱.۲.۱ دنباله‌ی توابع متعامد، مستقل خطی هستند[13].

۳.۱ عملگر

در این بخش به بیان تعاریفی از عملگرها می‌پردازیم که در بحث روش‌های موجود در حل عددی معادلات انتگرال—دیفرانسیل مورد استفاده قرار می گیرند.

تعریف ۱.۳.۱ نگاشت T از فضای برداری X بتوی فضای برداری Y با میدان یکسان را یک نگاشت خطی (تبدیل خطی) گوییم، در صورتی که به ازای هر x_1 و x_2 از X و هر α و β از میدان مشترک داشته باشیم:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \; Tx_1 + \beta \; Tx_2.$$

مثال ۱.۳.۱ فرض کنیم X فضای برداری تمام چندجمله‌ای‌های تعریف شده روی فاصله $[a,b]$ باشد. می‌توان عملگر $T : X \longrightarrow X$ را چنین تعریف کرد $T(p(x)) = p'(x)$ که در آن

[4] Parseval

$X \ni p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی دلخواه n است و $p'(x)$، نمایش مشتق تابع $p(x)$ نسبت به x است.

می‌دانیم $\mathbb{C}([a,b])$ مجموعه‌ی تمام توابع مختلط پیوسته بر $[a,b]$ است و به همین ترتیب $\mathbb{C}^n([a,b])$ مجموعه‌ی تمام توابع مختلط تعریف شده بر $[a,b]$ است که مشتق مرتبه nام آنها موجود و پیوسته است و $\mathbb{C}^\infty$ مجموعه‌ی تمام توابع مشتق‌پذیر و پیوسته با هر مرتبه‌ای است و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\mathbb{C}^\infty([a,b]) \subseteq \mathbb{C}^n([a,b]) \subseteq \mathbb{C}([a,b])$$

می‌توان عملگر خطی مشتق $T : \mathbb{C}^\infty([a,b]) \longrightarrow \mathbb{C}([a,b])$ را به صورت $Tf(x) = f'(x)$ نیز تعریف کرد.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای برداری نرم‌دار باشند. آن گاه تبدیل خطی $T : X \longrightarrow Y$ را کراندار گوییم، اگر عدد ثابتی مانند M باشد به طوری که $\| Tx \| \leqslant M \| x \|$. کمترین مقدار چنین Mی را می‌توان نرم تبدیل خطی تعریف نمود. بنابراین می‌یابیم:

$$\| T \| = \sup \quad \left\{ \quad \frac{\| Tx \|}{\| x \|} \quad : \quad 0 \neq x \in X \quad \right\},$$

و در نتیجه همواره $\| Tx \| \leqslant \| T \| \| x \|$. چون T خاصیت همگنی دارد، یعنی $T(\alpha x) = \alpha Tx$، لذا داریم:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| < 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ ; 0 \neq x \in X.$$

تعریف ۳.۳.۱ مجموعه‌ی تمام تبدیلات خطی کراندار از فضای نرم‌دار X به فضای نرم‌دار Y با میدان مشترک را با $\mathcal{B}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{B}(X,Y)=\{T:X\longrightarrow Y\ ,\ \text{تبدیل خطی و کراندار } T\ \}.$$

در حالت خاص که $Y=X$، $\mathcal{B}(X,X)$ را با $\mathcal{B}(X)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱.۳.۱

۱) اگر $A,B\in\mathcal{B}(H,K)$ آن‌گاه $A+B\in\mathcal{B}(H,K)$.

۲) اگر $\alpha\in F$ و $A\in\mathcal{B}(H,K)$ آن‌گاه $\alpha A\in\mathcal{B}(H,K)$.

۳) اگر $A\in\mathcal{B}(H,K)$ و $B\in\mathcal{B}(K,L)$ آن‌گاه $BA\in\mathcal{B}(H,L)$.

تعریف ۴.۳.۱ تبدیل خطی $T:H\longrightarrow K$ فشرده است اگر بستار $T(ballH)$ فشرده باشد که $ballH=\{\ x\in H\ \ |\ \ \|x\|<1\}$. مجموعه‌ی عملگرهای فشرده از H به K را با $\mathcal{B}_0(H,K)$ نمایش می‌دهند و $\mathcal{B}_0(H,H)=\mathcal{B}_0(H)$.

گزاره ۲.۳.۱

عملگر T فشرده است اگر و تنها اگر هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\}$ در X شامل یک زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ باشد به طوری که $\{Tx_{n_k}\}$ همگرا به نقطه‌ای در Y باشد.

گزاره ۳.۳.۱

۱) $\mathcal{B}_0(H,K)\subseteq\mathcal{B}(H,K)$.

۲) $\mathcal{B}_0(H,K)$ یک فضای خطی است و اگر $\{T_n\}\subseteq\mathcal{B}_0(H,K)$ و $T\in\mathcal{B}(H,K)$ باشد به طوری که $\|T_n-T\|\to 0$ آن‌گاه $T\in\mathcal{B}_0(H,K)$.

۳) اگر $A\in\mathcal{B}(H)$ و $B\in\mathcal{B}(K)$ و $T\in\mathcal{B}_0(H,K)$ باشد آن‌گاه TA و BT عملگرهایی فشرده خواهند بود.

فصل ۲

معادلات انتگرال

در این فصل به معرفی و دسته‌بندی معادلات انتگرال می‌پردازیم و بعضی از روش‌های نظری لازم برای حل این‌گونه معادلات را معرفی خواهیم کرد [15 − 14].

یک معادله‌ی انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. نام معادله‌ی انتگرال برای هر معادله شامل تابع مجهول تحت علامت انتگرال، توسط پروفسور بویس ریموند [1] در سال ۱۸۸۸ مطرح شد. اگر چه، قبل از آن لاپلاس [2] اولین کسی بود که در سال ۱۷۸۲ این معادلات را برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی به کار برد. بعد از آن، استفاده از سری‌های مثلثاتی در حل مسائل رسانش گرمایی، موجب شد که فوریه [3] در سال ۱۸۲۲ با این معادلات روبرو شود. آبل [4] نیز در سال ۱۸۲۶ به حل فرم خاصی از معادلات انتگرال پرداخت. در همان سال پوآسن [5] اولین کسی بود که در نظریه‌ی مغناطیس، معادله انتگرالی را که متغیر x در یکی از حدود انتگرال وجود داشت، بیان نمود. او معادله انتگرال را به وسیله‌ی بسط تابع مجهول در توانهایی از پارامتر λ، اما بدون اثبات همگرایی این سری‌ها، حل نمود. بعدها، اثبات

[1] Bois Reymond
[2] Laplace
[3] Fourier
[4] Abel
[5] Poisson

همگرایی چنین سری‌هایی در سال ۱۸۷۳ توسط لیوویل [6] بیان شد. در سال ۱۸۷۰، نیومن [7] با تبدیل مسأله‌ی دیریکله به یک معادله انتگرال از دیگر کسانی بود که نقش موثری در تکامل نظریه معادلات انتگرال داشت. در سال ۱۸۹۶ ولترا [8]، به بررسی رفتار کلی یک دسته‌ی دیگر از معادلات انتگرال خطی پرداخت، که نامگذاری و مشخصه‌ی این معادلات به متغیر x ظاهر شده در حد بالایی انتگرال وابسته بود.

یک کلاس کلی‌تر از معادلات انتگرال خطی به شکل:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,s)\varphi(s)d(s),$$

می‌باشد که در آن k را هسته آن می‌نامند وبا توجه به این که در معادلات انتگرال ولترا برای $s > x$ داریم $k(x,s) = 0$، می‌توان گفت معادلات انتگرال ولترا حالت خاصی از این دسته از معادلات می‌باشند. که این شکل از معادلات توسط فردهلم [9] در سال ۱۹۰۰ و توسعه‌ی نظریه‌ی او تحت یک مقاله کلاسیک در سال ۱۹۰۳ بیان شد.

۱.۲ دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف ۱.۱.۲ معادله انتگرال فردهلم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(x)f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t,f(t))dt \quad ; \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{۱}$$

که در آن λ یک پارامتر ثابت، $h(x)$ و$g(x)$ و k توابع معلوم و $f(x)$ تابع مجهول است.

تعریف ۲.۱.۲ به معادلات انتگرالی که در آنها حد بالای انتگرال‌گیری متغیر باشد، معادلات انتگرال ولترا گویند. فرم کلی معادله انتگرال ولترا به صورت زیر می‌باشد:

---

[6] Liouville
[7] Neuman
[8] Volterra
[9] Fredholm

$$h(x)f(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,t,f(t))dt \quad . \tag{۲}$$

تعریف ۳.۱.۲ معادلات انتگرالی را که در آن‌ها تابع مجهول بیرون علامت انتگرال ظاهر نشده باشد معادلات انتگرال نوع اول گویند. در غیر این صورت، معادله انتگرال نوع دوم خواهیم داشت. به عنوان مثال، اگر در معادله (۱) و (۲) داشته باشیم $h(x) = 0$ آن‌گاه به ترتیب معادله انتگرال فردهلم نوع اول و معادله انتگرال ولترا نوع اول خواهیم داشت و اگر در معادله (۱) و (۲)، $h(x) = 1$ باشد آن‌گاه، به ترتیب معادله انتگرال فردهلم نوع دوم ومعادله انتگرال ولترا نوع دوم خواهیم داشت.

تعریف ۴.۱.۲ در صورتی که تابع سمت راست در معادله انتگرال (۱) یا (۲) صفر باشد یعنی $g(x) \equiv 0$، معادله انتگرال را همگن، در غیر این صورت ناهمگن گویند.

تعریف ۵.۱.۲ به معادلات انتگرالی‌ای که در آن‌ها تابع مجهول زیر علامت انتگرال‌گیری به صورت خطی ظاهر شود، معادلات انتگرال خطی گویند. شکل کلی این معادلات به صورت زیر می‌باشد:

$$h(x)f(x) = g(x) + \lambda \int_D k(x,t)f(t)dt \quad .$$

تعریف ۶.۱.۲ به معادلات انتگرالی‌ای که در آن‌ها تابع مجهول زیر علامت انتگرال‌گیری به صورت غیرخطی ظاهر شود، معادلات انتگرال غیرخطی گویند. شکل کلی این معادلات به صورت زیر است:

$$h(x)f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b F(x,t,f(t))dt \quad .$$