دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

تجزیه ضربگرهای بابرد بسته روی جبرهای باناخ

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

حسین جوانشیری

استاد راهنما

دکتر رسول نصراصفهانی

۱۳۸۶

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض آقای حسین جوانشیری

تحت عنوان

تجزیه ضربگرهای بابرد بسته روی جبرهای باناخ

در تاریخ ۱۳۸٦/۱۲/۲٦ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ – استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر رسول نصراصفهانی

۲ – استاد مشاور پایان‌نامه ....

۳ – استاد داور ۱ دکتر....

(دانشکده ریاضی دانشگاه)

۴ – استاد داور ۲ دکتر ....

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر رسول نصر اصفهانی

تشکر و قدردانی

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه مفهوم تجزیه ضربگرهای با برد بسته روی جبرهای باناخ را معرفی و مطالعه، می‌کنیم. همچنین ثابت می‌کنیم که اگر جبر باناخ با همانی تقریبی کران‌دار A دارای این خاصیت باشد که هر ایده‌آل بسته و محض آن درون یک ایده‌آل بسته و محض با همانی تقریبی کران‌دار قرار بگیرد، آن گاه برد ضربگر T روی A بسته است اگر و تنها اگر T برابر ترکیب یک ضربگر خودتوان و یک ضربگر معکوس‌پذیر باشد.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل، به طور مختصر تعاریف و قضایایی از آنالیز تابعی، آنالیز حقیقی و نظریه‌ی جبرهای باناخ را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می‌کنیم. بیشتر نتایج این فصل مبتنی بر مطالب ارایه شده در مراجع [۵]، [۳]، [۱۷] و [۲۱] می‌باشد. در نهایت تاریخچه‌ای از موضوع مورد بحث را بیان می‌کنیم.

فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. $B(X,Y)$ فضای همه‌ی عملگرهای خطی و کران‌دار T از X به Y را نشان می‌دهد که در آن $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| \leq ۱\}$. در حالت $Y = \mathbb{C}$، $B(X,Y)$ را با X^* و مقدار $f \in X^*$ را در $x \in X$ با $f(x)$ یا $\langle f, x\rangle$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که $B(X,Y)$ کامل است اگر و تنها اگر Y کامل باشد.

۱.۱ قضیه (هان– باناخ) . فرض کنید M زیرفضایی از فضای خطی نرم‌دار X و $x_۰ \in X$، هرگاه $x_۰$ در بستار M نباشد، آن‌گاه تابعک خطی و پیوسته‌ی f روی X وجود دارد به طوری‌که $f(x_۰) = ۱$ و به‌ازای هر $x \in M$، $f(x) = ۰$.

اثبات. به قضیه‌ی ۵.۳ از [۲۱] رجوع کنید. ■

۲.۱ قضیه (نگاشت باز). فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی، پیوسته و پوشا باشد. در این‌صورت T یک نگاشت باز است. به‌عبارت دیگر برای هر مجموعه‌ی باز G در X، $T(G)$ در Y باز است.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۱ از فصل ۲ در [۲۱] رجوع کنید. ■

۳.۱ نتیجه. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی و پیوسته باشد. در این‌صورت

(الف) عدد حقیقی مثبتی مانند b وجود دارد به طوری‌که به‌ازای هر $x \in X$ داریم $\|Tx\| \leq b\|x\|$.

(ب) به‌علاوه اگر T یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه عدد حقیقی مثبتی مانند a وجود دارد به طوری‌که برای هر $x \in X$ $a\|x\| \leq \|Tx\|$.

اثبات. به نتیجه‌ی ۱۲ از فصل ۲ در [۲۱] رجوع کنید. ■

۴.۱ نتیجه. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی، پیوسته و برد T، یعنی $T(X)$، در Y بسته باشد. در این‌صورت عدد حقیقی مثبتی مانند c وجود دارد به طوری‌که

$$T(B_X) \supseteq cB_{T(X)}$$

که در آن B_X گوی یکه‌ی بسته‌ی فضای باناخ X و $B_{T(X)}$ نظیر آن در فضای باناخ $T(X)$ است.

اثبات. به لم ۲.۳.۱ از مرجع [۵] رجوع کنید. ■

۵.۱ نتیجه. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی و پیوسته باشد. در این‌صورت عدد مثبتی مانند c وجود دارد به طوری‌که $\|Tx\| \geq c\|x\|$ اگر وتنها اگر نگاشت T یک‌به‌یک باشد و به‌علاوه $T(X)$ زیرفضای بسته‌ای از فضای باناخ Y باشد.

۶.۱ قضیه (نمودار بسته). فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت T پیوسته است اگر و تنها اگر $G(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y = T(x)\}$ در فضای نرمدار $X \times Y$ بسته باشد.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۵ از فصل ۲ در [۲۱] رجوع کنید. ■

فرض کنید D یک مجموعه باشد و رابطه‌ای مانند $>$ روی D وجود داشته باشد که $(D,>)$،

(الف) متعدی باشد؛ یعنی اگر $\beta > \alpha$ و $\gamma > \beta$، آن‌گاه $\gamma > \alpha$.

(ب) ارشمیدسی باشد؛ یعنی برای هر $\alpha, \beta \in D$، عنصر $\gamma \in D$ موجود باشد که $\gamma > \alpha$ و $\gamma > \beta$.

در این صورت D را جهت‌دار می‌نامیم.

منظور از یک تور در مجموعه‌ی S تابعی است مانند $f : D \longrightarrow S$ که در آن D یک مجموعه‌ی جهت‌دار است. با فرض $f(\alpha) = s_\alpha$ برای هر $\alpha \in D$، تور f را با $(s_\alpha)_{\alpha\in D}$ یا به اختصار با (s_α) نمایش می‌دهیم. فرض کنید E و D مجموعه‌هایی جهت‌دار باشند. در این صورت تور $(t_\beta)_{\beta\in E}$ را یک زیرتور $(s_\alpha)_{\alpha\in D}$ نامیم اگر تابعی مانند $g : E \longrightarrow D$ موجود باشد، به طوری‌که

(الف) $t_\beta = s_{g(\beta)}$ برای هر $\beta \in E$.

(ب) برای هر $\alpha \in D$، $\beta \in E$ موجود باشد که $g(\gamma) > \alpha$ برای هر $\gamma \in E$ با شرط $\gamma > \beta$.

فرض کنید S یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم تور $(s_\alpha)_{\alpha\in D}$ در S به s همگراست اگر برای هر همسایگی U از s در S عنصر $\alpha_\circ \in D$ موجود باشد به‌طوری که $s_\alpha \in U$ برای هر $\alpha > \alpha_\circ$ و می‌نویسیم $s_\alpha \to s_\circ$ یا $\lim_\alpha s_\alpha = s_\circ$.

در صفحه‌ی ۱۴ از [۲۵] مشاهده می‌کنیم که برای هر $A \subseteq S$، اگر $\overline{A}$ بستار A در S را نشان دهد، آن‌گاه

(الف) $s \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر یک تور (s_α) در A موجود باشد که $s_\alpha \longrightarrow s$.

(ب) A فشرده است اگر و تنها اگر هر تور در A، دارای یک زیرتور همگرا باشد.

به‌علاوه اگر T نیز یک فضای توپولوژیک و $\varphi : S \longrightarrow T$ یک تابع باشد، آن‌گاه φ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور (s_α) همگرا به s در S داشته باشیم $\varphi(s_\alpha) \longrightarrow \varphi(s)$.

۷.۱ تعریف. فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد.

(۱) منظور از توپولوژی ضعیف روی X، کوچکترین توپولوژی روی X است که تحت آن هر $f \in X^*$ پیوسته است. این توپولوژی را با $\sigma(X, X^*)$ نمایش می‌دهیم. همگرایی تور (x_α) به x در X در توپولوژی ضعیف را همگرایی ضعیف (x_α) به x می‌نامیم و با $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ یا $x = w - \lim\limits_\alpha x_\alpha$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ اگر و تنها اگر $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$ برای هر $f \in X^*$.

(۲) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. نگاشت $\Phi : X \longrightarrow X^{**}$ را با ضابطه‌ی $x \mapsto \hat{x}$ تعریف

می‌کنید که در آن،

$$\hat{x}(f) = f(x) \qquad (f \in X^*).$$

توجه کنید که Φ خطی و طولپاست. لذا یک‌به‌یک نیز هست. منظور از توپولوژی ضعیف* روی X^*، کوچکترین توپولوژی روی X^* است که خانواده‌ی $\Phi(X)$ را پیوسته می‌سازد. این توپولوژی را با $\sigma(X^*, X)$ نمایش می‌دهیم. همگرایی تور (f_α) به f در این توپولوژی را همگرایی ضعیف* (f_α)، به f می‌نامیم و با نمادهای $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ یا $f = w^* - \lim\limits_{\alpha} f_\alpha$ نمایش می‌دهیم که معادل است با این‌که $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$ برای هر $x \in X$.

در ضمن یادآوری می‌کنیم که یک پایه‌ی همسایگی نقطه‌ی $f_\circ \in X^*$ برای توپولوژی $\sigma(X^*, X)$ با در نظر گرفتن تمام مجموعه‌های به شکل

$$V = \Big\{ f \in X^* \ : \ |\langle f - f_\circ, x_i \rangle| < \varepsilon \ \text{،} \ i \in I \ \text{برای هر} \Big\}$$

به‌دست می‌آید که در آن I متناهی است و $x_i \in X$ و $\varepsilon > \circ$.

۸.۱ تذکر. چون هر $f \in X^*$ درواقع عضوی در $B(X, \mathbb{C})$ است و ضعیف توپولوژی کوچکترین توپولوژی بر X با این خاصیت است که هر $f \in X^*$ تحت آن پیوسته شود لذا بوضوح می‌توان گفت که ضعیف‌توپولوژی ضعیف‌تر از توپولوژی حاصل از نرم روی فضای باناخ X است. یعنی اگر توپولوژی حاصل از نرم فضای باناخ X را با τ و ضعیف‌توپولوژی روی X را با τ_w نمایش دهیم آن‌گاه $\tau_w \subseteq \tau$.

۹.۱ قضیه (باناخ — آلااُغلو). فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. در این‌صورت گوی یکه‌ی B_{X^*} از X^*، فشرده‌ی ضعیف* است.

اثبات. مرجع [۲۱] مراجعه کنید. ■

۱۰.۱ لم (گلدشتاین) فرض کنید X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. در این‌صورت X در X^{**}، ضعیف*−چگال است.

اثبات. مرجع [۲۱] را ببینید. ■

۱۱.۱ تعریف (فناسازها.) فرض کنید X یک فضای باناخ، M زیرفضایی از X و N زیرفضایی از X^* باشد. فناسازهای $M^\perp$ و $^\perp N$ بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$M^\perp = \Big\{f \in X^* \ : \ \langle x, f\rangle = 0 \ , \ x \in M \text{ به ازای هر}\Big\}$$
$$^\perp N = \Big\{x \in X \ : \ \langle x, x^*\rangle = 0 \ , \ x^* \in N \text{ به ازای هر}\Big\}.$$

واضح است که $M^\perp$ و $^\perp N$ فضاهایی برداری‌اند. چون $M^\perp$ اشتراک فضاهای پوچ تابعک‌های $\hat{x} \in X^{**}$ با دستور $\hat{x}(f) = f(x)$ برای هر $f \in X^*$ هستند. لذا $M^\perp$ یک زیرفضای ضعیف* بسته‌ی X^* است. همچنین $^\perp N$ یک زیرفضای نرم بسته‌ی X است.

۱۲.۱ قضیه. تحت مفروضات تعریف فوق داریم

(الف) $^\perp(M^\perp)$ بستار M در X است،

(ب) $(^\perp N)^\perp$ بستار ضعیف* N در X^* است.

اثبات. قضیه‌ی ۷ از فصل ۴ در [۲۱] را ببینید. ■

۱۳.۱ تعریف هرگاه M یک زیرفضای بسته‌ی فضای باناخ X باشد، آن‌گاه فضای برداری $X/M = \{x + M;\ x \in X\}$ همراه با نرم $\|x + M\| = \inf\{\|x - y\| :\ y \in M\}$ یک فضای باناخ است. توجه کنید که دوگان‌های M و X/M را می‌توان به کمک فناساز $M^\perp$ از M توصیف کرد؛ در واقع،

$$\big(X/M\big)^* \simeq M^\perp, \quad M^* \simeq X^*/M^\perp.$$

که در آن $\simeq$ به معنی یکریختی طولپاست [۲۱].

اکنون به هر $T \in B(X, Y)$ الحاقی آن را اختصاص می‌دهیم، که یک عملگر $T^* \in B(Y^*, X^*)$ است و نقش اساسی در نتایج اصلی این پایان‌نامه دارد.

۱۴.۱ قضیه. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. به هر $T \in B(X, Y)$ یک عملگر یکتای $T^* \in B(Y^*, X^*)$، نظیر می‌شود که در رابطه‌ی

$$\langle Tx, g\rangle = \langle x, T^*g\rangle$$

به‌ازای هر $x \in X$ و هر $g \in Y^*$ صدق می‌کند. به‌علاوه، $\|T^*\| = \|T\|$، $T^{**}|_X = T$ و $T^*g = g \circ T$.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۰ از فصل ۴ در [۲۱] رجوع کنید. ■

۱۵.۱ نماد گذاری. اگر T فضای X را به توی Y بنگارد، فضای پوچ و برد T را به‌ترتیب با $\ker(T)$ و $T(X)$ نمایش می‌دهیم

$$\ker(T)=\Big\{x\in X\ :\ Tx=0\Big\},$$

$$T(X)=\Big\{y\in Y\ :\ Tx=y\ ,\ \ \text{به‌ازای یک } x \text{ در } X\Big\}.$$

۱۶.۱ قضیه. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $T\in B(X,Y)$. در این‌صورت

$$\ker(T)={}^{\perp}[T^*(Y^*)],\quad \ker(T^*)=[T(X)]^{\perp}.$$

اثبات. به قضیه‌ی ۱۲ از فصل ۴ در [۲۱] رجوع کنید. ■

۱۷.۱ نتیجه. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $T\in B(X,Y)$ در این صورت

(الف) $\ker T^*$ ضعیف* بسته در Y^* است.

(ب) $T(X)$ در Y چگال است اگر و فقط اگر T^* یک به یک باشد.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۳ از فصل ۴ در [۲۱] رجوع کنید. ■

۱۸.۱ قضیه. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $T\in B(X,Y)$، در این صورت شرایط زیر معادلند.

(الف) $T(X)$ در Y بسته است.

(ب) $T^*(Y^*)$، در X^* ضعیف* بسته است.

(ج) $T^*(Y^*)$، در X^* نرم بسته است.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۵ از فصل ۴ در [۲۱] رجوع کنید. ■

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی ۱۲، ملاحظه می‌کنید که هر زیرفضای نرم بسته‌ی، فضای باناخ X، فناساز فناساز خودش است و همین امر در مورد هر زیرفضای ضعیف* بسته‌ی X^* درست

می‌باشد. بنابراین با کمک گرفتن از قضایای ۱۶ و ۱۸ به‌سادگی دیده می‌شود که هرگاه $T \in B(X,X)$ یک عملگر با برد بسته باشد، آن‌گاه $(\ker T)^{\perp} = T^*(X^*)$.

۱۹.۱ تعریف. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند، گوییم نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ فشرده است اگر بستار $T(B_X)$ در Y فشرده باشد. واضح است که در این‌صورت T کراندار است. لذا $T \in B(X,Y)$.

۲۰.۱ قضیه. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند.

(الف) هرگاه $T \in B(X,Y)$ و $\dim T(X) < \infty$، آن‌گاه T فشرده است.

(ب) $T \in B(X,Y)$ فشرده است اگر وتنها اگر T^* فشرده باشد.

(ج) $T \in B(X,Y)$ فشرده است اگر وتنها اگر هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\}$ در X، شامل زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_i}\}$ باشد به طوری‌که $\{Tx_{n_i}\}$ به نقطه‌ای از Y همگرا باشد.

۲۱.۱ تعریف . (الف) منظور از یک جبر A، یک فضای خطی روی $\mathbb{C}$ همراه با عمل ضرب $A \times A \longrightarrow A$: **.** است به طوری‌که برای هر $a,b,c \in A$ و $t \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱) $(a.b).c = a.(b.c)$؛

۲) $(a+b).c = a.c + b.c$؛

۳) $a.(b+c) = a.b + a.c$؛

۴) $t(a.b) = (ta).b = a.(tb)$.

(ب) $B \subseteq A$ یک زیرجبر از جبر A است هر گاه همراه با اعمال A یک جبر باشد.

(ج) زیرجبر I از A یک ایده‌آل راست (چپ) A است هر گاه $IA \subseteq I$ $(AI \subseteq I)$. و ایده‌آل چپ(راست) I را دوری نامیم هرگاه یک $a \in I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $I = Aa$ $(I = aA)$.

(د) جبر A نرم‌دار است هر گاه یک فضای خطی نرم‌دار باشد به طوری که برای هر $a,b \in A$ داشته باشیم $\|a.b\| \leqslant \|a\|\,\|b\|$. در این حالت $\|.\|$ را یک نرم جبری می‌نامیم. واضح است که این خاصیت نرم، باعث پیوستگی عمل ضرب جبر A می‌شود.

(ه) جبر نرم‌دار A یک جبر باناخ است هرگاه به عنوان یک فضای خطی نرم‌دار کامل باشد.

(و) جبر نرم‌دار A را یکدار نامیم، هرگاه تحت عمل ضرب عنصر همانی داشته باشد؛ یعنی عنصری یکتا مثل e در A وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $a \in A$

$$ae = ea = a.$$

به‌علاوه اگر $\|e\| = 1$، آن‌گاه A را یک جبر یکانی نامیم.

(ی) جبر A را جابه‌جایی نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $ab = ba$.

(ز) جبر A یک $*$−جبر است هر گاه مجهز به یک برگشت $*$ باشد؛ یعنی یک نگاشت $* : A \longrightarrow A$ به طوری که برای هر $a, b \in A$ و $t \in \mathbb{C}$،

$$(a^*)^* = a, \quad (a+b)^* = a^* + b^*,$$

$$(ta)^* = \bar{t}a^*, \quad (ab)^* = b^*a^*.$$

(ح) جبر نرم‌دار A یک $*$−جبر نرم‌دار است هرگاه مجهز به یک برگشت پیوسته‌ی $*$ با شرط $\|a^*\| = \|a\|$ برای هر $a \in A$ باشد.

(خ) $*$−جبر باناخ A یک C^*−جبر است، هرگاه $\|a^*a\| = \|a\|^2$ برای هر $a \in A$.

(ط) به ازای یک جبر باناخ A، منظور از A−مدول باناخ، فضای باناخ X مجهز به نگاشت‌های $a.\, x \mapsto (a, x)$ از $A \times X$ به X و $x.\, a \mapsto (x, a)$ از $X \times A$ به X است به طوری‌که برای هر $a, b \in A$، $x, y \in X$ و $t \in \mathbb{C}$ داریم

(۱) $(tx+y).\, a = t(x.\, a) + y.\, a$ و $a.\, (tx+y) = t(a.\, x) + a.\, y$؛

(۲) $x.(ab) = (x.\, a).b$ ، $(ab).x = a.(b.\, x)$ و $a.(x.\, b) = (a.\, x).b$؛

(۳) یک مقدار ثابت و نامنفی $c = c_X$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $a \in A$ و $x \in X$،

$$\|a.\, x\| \leqslant c\|a\|\,\|x\|, \quad \|x.\, a\| \leqslant c\|a\|\,\|x\|.$$

در این پایان‌نامه، منظور ما از یک A−مدول، یک A−مدول باناخ است.

۲۲.۱ تعریف. فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد. ایده‌آل I در جبر A را مدولار نامیم هرگاه عضوی چون u متعلق به I موجود باشد به طوری‌که برای هر $a \in A$،

$$a - ua \in I, \quad a - au \in I.$$

بوضوح با توجه به تعریف ایده‌آل مدولار در می‌یابیم که هر ایده‌آل شامل یک ایده‌آل مدولار نیز یک ایده‌آل مدولار است. همچنین به‌سادگی از لم زُرن می‌توان نتیجه گرفت که هر ایده‌آل محض و مدولار I در جبر باناخ A، درون یک ایده‌آل ماکسیمال مدولار مثل J قرار می‌گیرد. به این معنی که J یک ایده‌آل محض جبر A است که درون هیچ ایده‌آل محض و مدولار A، جز خودش قرار نمی‌گیرد.

۲۳.۱ قضیه. فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد. دراین‌صورت هر ایده‌آل ماکسیمال و مدولار جبر A، فضای پوچ یک تابعک خطی ضربی است.

اثبات. به صفحه‌ی ۷۹ از مرجع [۳] رجوع کنید. ■

۲۴.۱ تذکر. اگر J یک ایده‌آل بسته‌ی جبر نرم‌دار A باشد، آن‌گاه فضای A/J همراه با ضرب برداری

$$(a+J)(b+J)=ab+J \qquad (a,b\in A)$$

و نرم $\|a+J\|=\inf\{\|a+b\| \;:\; b\in J\}$ یک جبر نرم‌دار است. در حالتی که A کامل باشد، آن‌گاه A/J نیز کامل است.

۲۵.۱ قضیه (تجزیه‌ی کوهن) . فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک $A-$مدول باناخ باشد. اگر تور کران‌دار (e_α) در A وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $x\in X$ داشته باشیم $e_\alpha.x\longrightarrow x$ و $x.e_\alpha\longrightarrow x$، آن‌گاه $X=A.X$ و $X=X.A$.

اثبات. به صفحه‌ی ٦۱ از مرجع [۳] رجوع کنید. ■

۲٦.۱ تعریف . فرض کنید A یک جبر نرم‌دار باشد. گوییم تور (e_α) در A یک همانی تقریبی چپ (راست) است هرگاه برای هر $a\in A$ داشته باشیم $e_\alpha a\longrightarrow a$ $(ae_\alpha\longrightarrow a)$. در حالتی که تور (e_α) کران‌دار باشد، آن را همانی تقریبی چپ (راست) کران‌دار می‌نامیم.

۲۷.۱ قضیه. فرض کنید I ایده‌آلی بسته از C^*-جبر A باشد. در این‌صورت توری مثل $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ موجود است به طوری‌که برای هر $a\in A$ داریم $ae_\alpha\longrightarrow a.$ و $e_\alpha a\longrightarrow a$.

اثبات. به صفحه‌ی ۷۳ در [۱۷] رجوع کنید. ■

۲۸.۱ قضیه. فرض کنید A یک جبر باناخ یکانی با عنصر همانی e باشد و a عضوی متعلق به A باشد به طوری‌که $\|a\|<۱$، آن‌گاه $e-a$، در A معکوس‌پذیر است؛ یعنی عنصری چون b در A موجود است به طوری‌که $b(e-a)=e$.

اثبات. به صفحه‌ی ۷ در [۱۷] رجوع کنید. ■

۲۹.۱ تعریف. فرض کنید A و B دو جبر باناخ باشند. در این‌صورت نگاشت خطی $\phi : A \longrightarrow B$ را ضربی نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

۳۰.۱ تعریف. فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی دلخواه باشد. دراین‌صورت طیف جبر A را با $\Delta(A)$ نمایش می‌دهیم و آن را برابر مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی ضربی و پیوسته روی A تعریف می‌کنیم. اگر a عضوی دلخواه در A باشد، آن‌گاه تابع $\hat{a} : \Delta(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ را که برای هر $\phi \in \Delta(A)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم نگاشت گلفاند A می‌نامیم

$$\hat{a}(\phi) = \phi(a).$$

توپولوژی گلفاند را کوچکترین توپولوژی روی $\Delta(A)$ درنظر می‌گیریم به طوری‌که همه‌ی توابع $\hat{a}$، به‌ازای هر عنصر a در A، پیوسته شود توجه کنید که توپولوژی گلفاند، توپولوژی القایی از توپولوژی ضعیف*، A^* به $\Delta(A)$ است.

۳۱.۱ تعریف. فرض کنید S یک فضای توپولوژیک باشد. منظور از $C(S)$، مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط—مقدار روی S است که همراه با اعمال نقطه‌ای توابع یک فضای خطی تشکیل می‌دهد، به‌علاوه $C_\circ(S)$ معرف زیرفضای $C(S)$ متشکل از توابع $f \in C(S)$ است که در بینهایت صفر می‌شوند. یعنی برای هر $\varepsilon > \circ$، زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی K از S وجود دارد به طوری‌که $|f(s)| < \varepsilon$ برای هر $s \in S - K$. همچنین مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط مقدار کران‌دار روی S را با $C_b(S)$ نشان می‌دهیم.

۳۲.۱ تذکر. با توجه به مفروضات دو تعریف فوق بوضوح می‌توان دید که برای هر $\varepsilon > \circ$، مجموعه‌ی $\{f \in \Delta(A) \ : \ |f(a)| \geq \varepsilon\}$ در گوی یکه‌ی بسته‌ی A^*، ضعیف* بسته است و لذا طبق قضیه‌ی باناخ آلااُغلو یک مجموعه‌ی ضعیف* فشرده است. از این‌رو می‌توان گفت که به‌ازای هر a متعلق به A داریم

$$\hat{a} \in C_\circ(\Delta(A)).$$

جز توپولوژی گلفاند، توپولوژی دیگری نیز روی $\Delta(A)$، که در آن A یک جبر باناخ است، موجود است به طوری‌که راهگشای اثبات بسیاری از قضایای بحث جبرهای باناخ است، که نمونه‌هایی از آن را در این پایان‌نامه نیز خواهیم دید.

از توپولوژی مقدماتی به یاد داریم که عمل بستار در یک فضای توپولوژیک؛ یعنی عملی که هر زیرمجموعه‌ی A در فضای توپولوژیک S را به بستارش یعنی $\overline{A}$ در فضای توپولوژیک S ببرد، در

خاصیت‌های زیر صدق می‌کند

(الف) $E \subseteq \overline{E}$،

(ب) $\overline{(\overline{E})} = \overline{E}$،

(ج) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(د) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

همچنین به یاد داریم که این خواص عمل بستار در یک فضای توپولوژیک (S, τ)، باعث می‌شود که بتوانیم توپولوژی τ را برحسب زیرمجموعه‌های بسته‌ی فضای S نیز معرفی کنید. لذا طبیعی به‌نظر می‌رسد که اگر عملی مانند $A \longrightarrow \overline{A}$ را روی تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه S داشته باشیم، آن‌گاه این عمل S را به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌کند که بسته‌هایش دقیقاً زیرمجموعه‌هایی مانند A از S است که برای آن‌ها داریم $A = \overline{A}$.

۳۳.۱ قضیه. فرض کنید S یک مجموعه‌ی دلخواه باشد و نگاشتی مثل $A \longrightarrow \overline{A}$ از مجموعه‌ی توانی $P(S)$ به $P(S)$ موجود باشد به طوری‌که در خواص (الف) تا (د) فوق صدق کند. در این‌صورت نگاشت $A \longrightarrow \overline{A}$ یک توپولوژی روی S معرفی می‌کند که مجموعه‌های بسته‌ی فضای توپولوژیک S، دقیقاً زیرمجموعه‌هایی چون A از S است که برای آن داریم $A = \overline{A}$.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۷ در [۲۵] مراجعه کنید. ■

اکنون می‌خواهیم به کمک توضیحات بالا، یک توپولوژی روی $\Delta(A)$ معرفی کنید که به $hk-$ توپولوژی معروف است.

۳۴.۱ تعریف. فرض کنید A یک جبر باناخ و $S \subseteq \Delta(A)$ و $J \subseteq A$، در این‌صورت تعریف می‌کنید

(الف) $k(S) := \{a \in A \ : \ \varphi(a) = \circ \ , \ \varphi \in S \ \text{برای هر}\} = \bigcap\{\ker(\varphi) \ : \ \varphi \in E\}$ ؛

(ب) $h(J) := \{\varphi \in \Delta(A) : \ \varphi(a) = \circ, a \in J \ \text{برای هر}\} = \{\varphi \in \Delta(A) : J \subseteq \ker(\varphi)\}$ ؛

(ج) در نهایت برای زیرمجموعه‌ی دلخواه S از $\Delta(A)$ ، $hk-$بستار، S را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\overline{S} := hk(S) := h(k(S)) = \{\varphi \in \Delta(A) : \ \hat{a}(\varphi) = \circ \ , \ \hat{a}|_S = \circ \ \text{که} \ a \in A \ \text{برای هر}\}.$$

۳۵.۱ قضیه. فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی روی میدان اعداد مختلط باشد. دراین‌صورت مجموعه‌هایی به فرم $hk(S)$، که در آن S روی تمام زیرمجموعه‌های $\Delta(A)$ تغییر می‌کند، مجموعه‌های بسته‌ی یک توپولوژی روی $\Delta(A)$ است که آن را $hk-$توپولوژی $\Delta(A)$ می‌نامیم به طوری‌که

(الف) برای هر $S \subseteq \Delta(A)$، بستار S در hk−توپولوژی دقیقاً $hk(S)$ است؛

(ب) hk−توپولوژی $\Delta(A)$ ضعیف‌تر از گلفاند توپولوژی $\Delta(A)$ است.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۱۵ از مرجع [۳] را ببینید. ■

۳۶.۱ قضیه (نمایش گلفاند). فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد به طوری‌که برای آن $\Delta(A)$ یک مجموعه‌ی ناتهی است. دراین‌صورت نگاشت $\rho : A \longrightarrow C_\circ(\Delta(A))$ با دستور $\rho(a) = \hat{a}$ یک همریختی است.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۵ در [۱۷] رجوع کنید. ■

۳۷.۱ نمادگذاری. نگاشت تعریف شده در قضیه‌ی فوق را نمایش گلفاند جبر باناخ A می‌نامیم.

۳۸.۱ تعریف. فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد. فضای پوچ نمایش گلفاند جبر A را، رادیکال A می‌نامیم و با $\mathrm{rad}A$ نمایش می‌دهیم. و جبر A را رادیکال نامیم هرگاه $\mathrm{rad}A = A$ و نیم‌ساده نامیم هرگاه $\mathrm{rad}A = \{\circ\}$؛ یعنی نمایش گلفاند آن یک‌به‌یک باشد.

۳۹.۱ تذکر. با توجه به تعریف بالا، اگر A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد بوضوح می‌توان دید که

$$\mathrm{rad}A = \{a \in A : \ f(a) = \circ \ , \ \text{برای هر } f \text{ در} \Delta(A)\} = \ker(\rho).$$

۴۰.۱ تعریف. جبر باناخ جابه‌جایی A را نیم‌اول می‌نامیم اگر $J = \{\circ\}$ تنها ایده‌آل دوطرفه‌ای در A باشد به طوری‌که برای آن داریم $J^2 = \{\circ\}$.

۴۱.۱ تذکر. به‌سادگی می‌توان دید که جبر باناخ A نیم‌اول است اگر و تنها اگر ایده‌آل aAa فقط به‌ازای $a = \circ$، برابر صفر شود.

۴۲.۱ گزاره. هر جبر باناخ نیم‌ساده، نیم‌اول است.

اثبات. صفحه‌ی ۱۵۵ در [۳] را ببینید. ■

۴۳.۱ گزاره. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. در این‌صورت جبر باناخ خارج قسمتی $A/\mathrm{rad}A$ یک جبر باناخ نیم‌ساده است.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۲۶ در [۳] رجوع کنید. ■

۴۴.۱ قضیه. فرض کنید A یک جبر باناخ نیم‌ساده و جابه‌جایی باشد. در این‌صورت اگر عضوی مانند $u \in A$ وجود داشته باشد به طوری‌که $\delta(u) = \inf\{|f(u) : f \in \Delta(A)|\} > 0$، آن‌گاه A یکدار است.

اثبات. به صفحه‌ی ۸۴ در [۳] رجوع کنید. ■

۴۵.۱ نتیجه. فرض کنید A یک جبر باناخ نیم‌ساده، جابه‌جایی و غیر یکدار باشد. در این‌صورت فضای توپولوژیک $\Delta(A)$ با توپولوژی گلفاند نمی‌تواند فشرده باشد.

۴۶.۱ تعریف. جبر باناخ A را باوفا می‌نامیم هرگاه $aA = \{0\}$ نتیجه دهد $a = 0$.

۴۷.۱ نتیجه. بوضوح می‌توان دید که هر جبر باناخ نیم‌ساده، باوفاست. همچنین هر جبر باناخ که همانی و یا همانی تقریبی کران‌دار داشته باشد.

۴۸.۱ قضیه. فرض کنید A و B دو جبر باناخ نیم‌ساده و تعویض‌پذیر باشند. در این‌صورت هر نگاشت ضربی مثل $\psi : A \longrightarrow B$ پیوسته است.

اثبات. برای اثبات قضیه‌ی ۱۱ از فصل ۱۰ مرجع [۲۱] را ببینید. ■

در ادامه به بررسی و مطالعه‌ی خواص ضربگر روی یک جبر باناخ جابه‌جایی و باوفای دلخواه A می‌پردازیم.

۴۹.۱ تعریف. فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی دلخواه باشد، در این‌صورت تابع $T : A \longrightarrow A$ را یک ضربگر نامیم، هرگاه برای هر a و b در A داشته باشیم

$$a(Tb) = (Ta)b$$

و مجموعه‌ی همه‌ی ضربگرهای روی A را با $M(A)$ نشان می‌دهیم.

۵۰.۱ تذکر. بوضوح به‌ازای هر عضو دلخواه a در جبر باناخ A، با تعریف $L_a : A \longrightarrow A$ به‌صورت،

$$L_a(u) = au \qquad (u \in A)$$

یک ضربگر خواهیم داشت. اما نکته‌ی جالب توجه این است که اگر جبر باناخ A، دارای عنصر همانی e باشد، بجز ضربگرهای فوق ضربگری نداریم. زیرا اگر T یک ضربگر روی چنین جبری باشد، آن‌گاه برای هر u متعلق به A داریم

$$T(u) = eT(u) = T(e)u$$

لذا با انتخاب $a := T(e)$، خواهیم داشت $T = L_a$.

در حالتی که جبر باناخ A را دلخواه درنظر می‌گیریم، اطلاعات شناخته شده‌ای در مورد ضربگرهایش موجود نیست. اما با اعمال شرط باوفا بودن روی جبر A، خواصی اساسی و بسیار مهم در مورد ضربگرهای جبر A به‌دست می آید. از جمله این‌که می‌توان گفت، هرگاه جبر باناخ A باوفا باشد، هر ضربگر T روی جبر A، یک تبدیل خطی است، زیرا به‌ازای هر $a, b, c \in A$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داریم

$$a(T(\alpha b + \beta c) - \alpha T(b) - \beta T(c)) = (T(a))(\alpha b + \beta c - \alpha b - \beta c) = ۰.$$

اما از آن‌جا که جبر A باوفاست، برای هر $a, b \in A$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داریم

$$T(\alpha a + \beta b) = \alpha T(a) + \beta T(b).$$

مطلب را با ارایه قضیه‌ی زیر که قضیه‌ای سودمند در این پایان‌نامه است، ادامه می‌دهیم.

۵۱.۱ گزاره. فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی و باوفا باشد. در این‌صورت هر ضربگر دلخواه روی A، عملگری پیوسته است.

اثبات. فرض کنید T یک ضربگر دلخواه روی A باشد. برای اثبات کافی است به کمک باوفا بودن جبر A، نشان دهیم که گراف ضربگر T بسته است. ■

۵۲.۱ قضیه. فرض کنید A یک جبر باناخ باوفا باشد. در این‌صورت $M(A)$ یک زیرجبر جابه‌جایی و بسته از $B(A)$ است.

اثبات. فرض کنید $\{T_n\} \subseteq M(A)$ دنباله‌ای است که به عملگر T روی A همگراست. در این‌صورت واضح است که برقراری رابطه‌ی زیر برای هر x و y در A، تضمین می‌کند که T یک ضربگر روی جبر A است