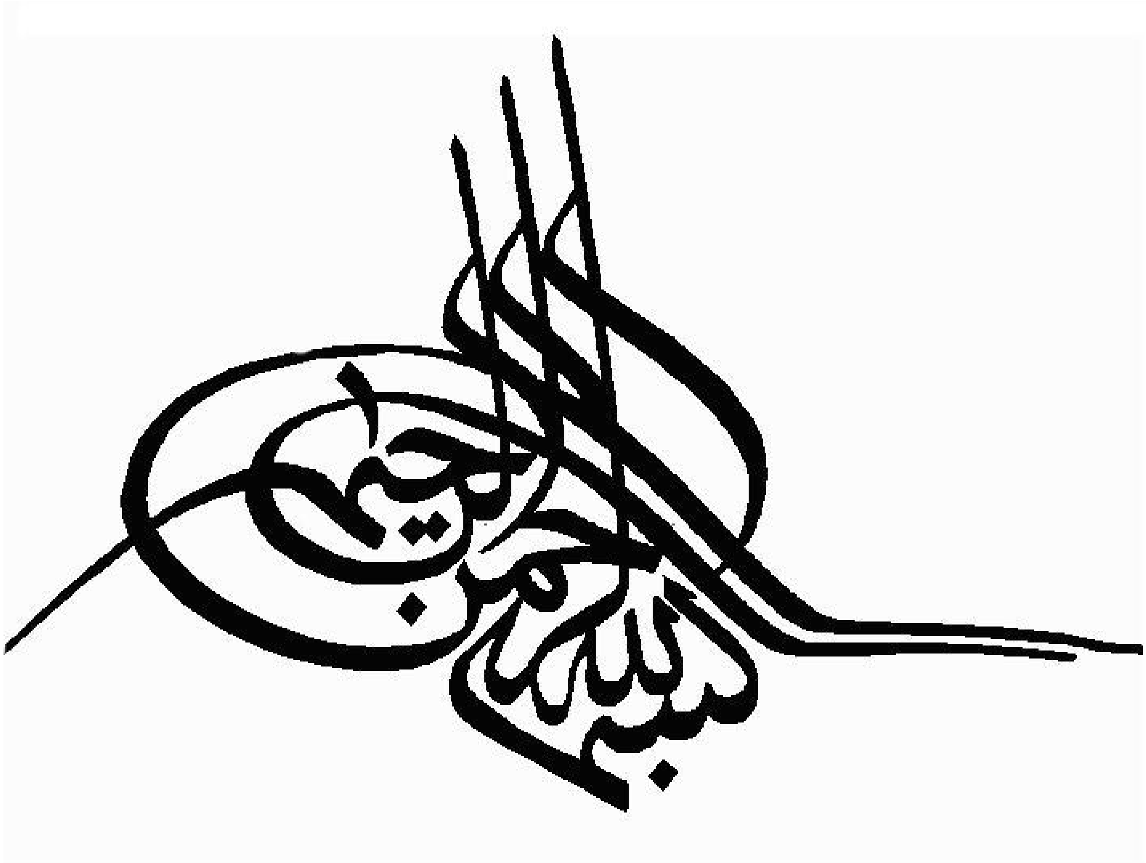
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پوچ ساز ضعیف روی حلقه‌های توسیعی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

ندا زمانی گندمانی

استاد راهنما

دکتر محمدرضا وداد

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض خانم ندا زمانی گندمانی

تحت عنوان

پوچ ساز ضعیف روی حلقه‌های توسیعی

در تاریخ ۹۲/۶/۲۳ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنما دکتر محمد رضا ودادی

۲- استاد مشاور دکتر حسین خبازیان

۳- استاد داور۱ دکتر محمود بهبودی

۴- استاد داور۲ دکتر عاطفه قربانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

سپاس خدای راعزّوجل.

و با تشکر از راهنمایی های استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر محمدرضا وادادی و تشکر از همه ی کسانی که مرا در به انجام رساندن این پایان نامه کمک نمودند.

و متشکرم از حمایت های بی دریغ خانواده ی عزیزم مخصوصاً پدر و مادر بزرگوارم.

شهریور ۱۳۹۲

کلیه حقوق مادی مترتّب بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه
متعلّق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

فهرست مطالب

چکیده

برای یك زیرمجموعه‌ی X در حلقه‌ی R، مجموعه‌ی $\{a \in R \mid xa \in \mathrm{nil}(R) \ \ \forall x \in X\}$ را پوچ‌ساز ضعیف X در R گوییم و به $\mathrm{N}_R(X)$ نشان می‌دهیم. در این پایان‌نامه خواص پوچ‌ساز ضعیف روی حلقه‌ی توسیعی اور $R[x;\alpha,\delta]$ را بررسی می‌کنیم. با فرض این که R یك حلقه‌ی (α,δ)-سازگار باشد و $\mathrm{P}(R) = \mathrm{nil}(R)$، نشان می‌دهیم هر عنصر پوچ‌توان در $R[x;\alpha,\delta]$ دقیقاً عنصری از $R[x;\alpha,\delta]$ است که ضرایب آن در R پوچ‌توان هستند و نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌ی عناصر پوچ‌توان $R[x;\alpha,\delta]$ یك ایده‌آل در $R[x;\alpha,\delta]$ است. نشان می‌دهیم اگر برای هر زیرمجموعه‌ی X در R که $X \not\subseteq \mathrm{nil}(R)$، $N_R(X)$ به عنوان یك ایده‌آل راست توسط یك عضو پوچ‌توان تولید شود، آنگاه برای هر زیرمجموعه‌ی U در $R[x;\alpha,\delta]$ که $U \not\subseteq \mathrm{nil}(R[x;\alpha,\delta])$، $\mathrm{N}_{R[x;\alpha,\delta]}(U)$به عنوان یك ایده‌آل راست توسط یك عضو پوچ‌توان تولید می‌شود.

کد رده بندي: ۱۳B۲۵ و ۱۶N۶۰.

کلمات کلیدي: پوچ‌ساز ضعیف، ایده‌آل اول وابسته‌ی پوچ‌توان و چندجمله‌ای خوب پوچ‌توان.

فصل ۱
مقدمه

۱.۱ مقدمه

در این پایان‌نامه همه‌ی حلقه‌ها یکدار و همه‌ی زیرمجموعه‌ها را ناتهی در نظر می‌گیریم.
اگر R یك حلقه باشد و $X \subseteq R$، مجموعه‌ی $\{a \in R \mid xa = 0 \quad \forall x \in X\}$ را پوچ‌ساز راست X در R گویند و به $\mathrm{r}_R(X)$ نشان می‌دهند. پوچ‌ساز چپ X در R به طور مشابه تعریف می‌شود و به $\mathrm{l}_R(X)$ نشان می‌دهند.
اگر $X = \{x\}$ تک عضوی باشد $\mathrm{r}_R(X)$ $(\mathrm{l}_R(X))$ را به طور ساده به $\mathrm{r}_R(x)$ $(\mathrm{l}_R(x))$ نمایش می‌دهند.
ایده‌آل I از R را پوچ‌ساز راست (چپ) گویند هرگاه زیرمجموعه‌ی X از R موجود باشد به طوری‌که $I = \mathrm{r}_R(X)$ $(I = \mathrm{l}_R(X))$.

مطالعه‌ی پوچ‌سازهای راست (چپ) در یك حلقه و سپس تعمیم آن به مدول‌ها، از قدیمی‌ترین مباحث نظریه حلقه‌هاست.
مطالعه‌ی شرط زنجیر صعودی (نزولی) روی پوچ‌سازهای یك حلقه پیشتر توسط گلدی[۱] وارد نظریه‌ی حلقه‌ها شد و چون این خاصیت از حلقه‌ها به زیرحلقه‌ها به ارث می‌رسد، لذا هر زیرحلقه‌ی یك حلقه‌ی نوتری دارای شرط زنجیر افزاینده روی پوچ‌سازهاست.
یك قضیه از مك‌کوی[۲] بیان می‌کند که اگر R یك حلقه‌ی جابجایی و $f(x)$ یك چند جمله‌ای در حلقه‌ی $R[X]$ با هر تعداد متغیر باشد (X، یك مجموعه از نامعین‌ها روی R است)، به طوری‌که پوچ‌ساز $f(x)$

---

[۱] Goldie

[۲] McCoy

در $R[X]$ ناصفر باشد آنگاه اشتراك پوچساز $f(x)$ و R نیز ناصفر است. این قضیه به طور طبیعی مطالعه‌ی مشخص سازی پوچسازها در حلقه‌ی چند جمله‌ای‌ها را به دنبال دارد.
سوال: فرض کنید $S = R[X] \supseteq C$ و A پوچساز C در حلقه‌ی S باشد، آیا زیرمجموعه‌ی $D \subseteq R$ وجود دارد به طوری‌که $\mathrm{A} = \mathrm{B}[X]$ که در آن B پوچساز D در حلقه‌ی R است؟ در زیر به چند پاسخ آن اشاره می‌کنیم.

۱. اگر $L = \mathrm{Max}\{\mathrm{r}_S(C) \mid \circ \neq C \subseteq S\}$ پس $L = P[X]$ که $P = \mathrm{Max}\{\mathrm{r}_R(D) | \circ \neq D \subseteq R\}$ ([۹] را ببینید.)

۲. اگر $f(x) = a_\circ + a_\backslash x + \ldots + a_n x^n \in S$ و $f(x)$ یك چند جمله‌ای خوب باشد آنگاه

$$\mathrm{r}_S(f(x)) = \bigcap_{i=\circ}^{n} \mathrm{r}_R(a_i[X]).$$

([۱۴] صفحه‌ی ۲۳۴ لم (۶۷-۶) را ببینید.)

خواص پوچسازها در [۲،۸،۹،۱۶،۱۷] به صورت گسترده‌تری مطالعه شده است.

در این پایان‌نامه مفهوم پوچساز ضعیف یك زیرمجموعه در یك حلقه را معرفی کرده و خواص پوچساز ضعیف روی حلقه‌ی توسیعی اور $R[x;\alpha,\delta]$ را بررسی می‌کنیم.
فصل دوم شامل مطالبی از نظریه‌ی حلقه‌ها و مدول‌ها است که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده می‌کنیم.
در فصل سوم ابتدا تعریف حلقه‌های (α,δ)-سازگار را از [۱۱] بیان می‌کنیم، سپس مفهوم پوچساز ضعیف یك زیرمجموعه در یك حلقه را معرفی کرده و بعضی خواص آن را بررسی می‌کنیم. اگر R یك حلقه باشد و $X \subseteq R$، آنگاه مجموعه‌ی $\{a \in R \mid xa \in \mathrm{nil}(R) \quad \forall x \in X\}$ را پوچساز ضعیف X در R گوییم و به $\mathrm{N}_R(X)$ نشان می‌دهیم. در صورتی که $X = \{x\}$ تك عضوی باشد، $\mathrm{N}_R(X)$ را به طور ساده به $\mathrm{N}_R(x)$ نشان می‌دهیم.
در فصل چهارم لمی از لم[۳]، لرویی[۴] و ماتژاك[۵] در [۱۵] را اثبات می کنیم که در بسیاری از قضیه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. با فرض این‌که R یك حلقه‌ی (α,δ)–سازگار باشد و $\mathrm{P}(R) = \mathrm{nil}(R)$، برای

Lam[۳]
Leroy[۴]
Matczuk[۵]

هر $f(x)=a_\circ+a_1x+\ldots+a_nx^n\in R[x;\alpha,\delta]$ نشان می‌دهیم که $f(x)\in \mathrm{nil}(R[x;\alpha,\delta])$ اگر و تنها اگر برای هر $\circ\leqslant i\leqslant n$، $a_i\in \mathrm{nil}(R)$ و دو نتیجه‌ی مهم زیر را به دست می‌آوریم:

۱. $\mathrm{nil}(R[x;\alpha,\delta])$ یك ایده‌آل $R[x;\alpha,\delta]$ است.

۲. $\mathrm{nil}(R[x;\alpha,\delta])=\mathrm{nil}(R)[x;\alpha,\delta]$.

با فرض‌های بالا نشان می‌دهیم که اگر برای هر زیرمجموعه X در R که $X\nsubseteq \mathrm{nil}(R)$، $N_R(X)$ به عنوان یك ایده‌آل راست توسط یك عضو پوچ‌توان تولید شود آنگاه برای هر زیرمجموعه‌ی U در $R[x;\alpha,\delta]$ که $U\nsubseteq \mathrm{nil}(R[x;\alpha,\delta])$، $\mathrm{N}_{R[x;\alpha,\delta]}(U)$به عنوان یك ایده‌آل راست توسط یك عضو پوچ‌توان تولید می‌شود. در فصل پنجم مثال‌های مختلف از پوچ‌ساز ضعیف را بیان می‌کنیم.

در فصل ششم تعریف ایده‌آل اول وابسته را از [۱] بیان می‌کنیم. این ایده‌آل‌ها در جبر جابجایی به دلیل نقش مهمی که در تجزیه‌ی اولیه دارند به خوبی شناخته شده هستند و در سال‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده اند. در [۷] برور[۶] و هینزر[۷] با استفاده از نظریه‌ی موضعی کردن، ثابت کردند که در حلقه‌ی جابجایی R ایده‌آل‌های اول وابسته با حلقه‌ی چند جمله‌ای $R[x]$ توسعه یافته هستند، یعنی هر $A\in \mathrm{Ass}(R[x])$ به صورت $A=A_\circ[x]$ است که $A_\circ=A\cap R\in \mathrm{Ass}(R)$. فیس[۸] در [۱۰] با استفاده از نتایجی که شاك[۹] در [۱۶] در مورد چند جمله‌ای‌های خوب به دست آورد، همان نتایج بالا را بدون کاربرد موضعی کردن یا دیگر ابزارهای جبر جابجایی اثبات کرد. در [۱] آنین[۱۰] نشان داد که نتایج برور و هینزر در حالت کلی‌تر، در یك مدول چند جمله‌ای $M[x]$ روی حلقه‌ی $R[x,\alpha]$ که حلقه‌ی R می‌تواند ناجابجایی باشد، برقرار هستند. بنابراین خواص ایده‌آل‌های اول وابسته در یك حلقه‌ی جابجایی می‌توانند به حالت ناجابجایی تعمیم یابند. با استفاده از نتایج [۱،۷،۱۰] به مطالعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی پوچ‌توان روی حلقه‌ی توسیعی اور که تعمیمی از ایده‌آل‌های اول وابسته هستند، می‌پردازیم. فرض کنید I یك ایده‌آل راست ناصفر حلقه R باشد. گوییم I یك ایده‌آل شبه-اول راست است اگر $I\nsubseteq \mathrm{nil}(R)$ و برای هر ایده‌آل راست $I'\subseteq I$ که $I'\nsubseteq \mathrm{nil}(R)$، داشته باشیم $\mathrm{N}_R(I)=\mathrm{N}_R(I')$.

فرض کنید $\mathrm{nil}(R)$ یک ایده‌آل حلقه R باشد. ایده‌آل A از R اول وابسته‌ی پوچ‌توان R گوییم در صورتی

[۶] Brewer

[۷] Heinzer

[۸] Faith

[۹] Shock

[۱۰] Annin

که ایده‌آل راست شبه-اول I وجود داشته باشد به طوری‌که $A = \mathrm{N}_R(I)$. مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی پوچ‌توان R را به وسیله ی $\mathrm{NAss}(R)$ مشخص می‌کنیم. در پایان با فرض این‌که R یك حلقه‌ی (α, δ)−سازگار باشد و $\mathrm{P}(R) = \mathrm{nil}(R)$، نشان می‌دهیم که:

$$\mathrm{NAss}(R[x; \alpha, \delta]) = \{A[x; \alpha, \delta] \mid A \in \mathrm{NAss}(R)\}.$$

که $A[x; \alpha, \delta]$ یك ایده‌آل از $R[x; \alpha, \delta]$ است و برای هر چندجمله‌ای

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in R[x; \alpha, \delta]$$

$f(x) \in A[x; \alpha, \delta]$ اگر و تنها اگر برای هر $0 \leq i \leq n$، $a_i \in A$.

فصل ۲

پیش نیازها

۱.۲ عناصر پوچ‌توان و ایده‌آل اول

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید R یك حلقه باشد. اگر برای $a \in R$، عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری‌که $a^n = 0$، a را عنصر پوچ‌توان حلقه‌ی R گویند.
مجموعه‌ی عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی R را با $\mathrm{nil}(R)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۲ فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر برای هر $a \in R$ که $a^2 = 0$ نتیجه دهد $a = 0$، حلقه‌ی R را تقلیل یافته گویند.
به وضوح برای هر حلقه تقلیل یافته‌ی R داریم $\mathrm{nil}(R) = 0$.

لم ۳.۱.۲ *فرض کنید R و S دو حلقه باشند. اگر $R \cong S$ و $\mathrm{nil}(R) = 0$ آنگاه $\mathrm{nil}(S) = 0$.*

اثبات. فرض کنیم $R \cong S$. پس یکریختی حلقه‌ای به صورت

$$\begin{cases} \varphi : R \to S \\ r \mapsto s \end{cases}$$

وجود دارد. فرض کنیم $s \in \mathrm{nil}(S)$. از این رو عدد طبیعی n وجود دارد که $s^n = 0$. از آنجا که φ یکریختی است، پس $r \in R$ وجود دارد که $s = \varphi(r)$. لذا $\varphi^n(r) = s^n = 0$ و ازین‌رو $\varphi(r^n) = 0$. پس $r^n = 0$ و از آنجا که $\mathrm{nil}(R) = 0$، داریم $r = 0$. بنابراین $s = \varphi(r) = 0$ و لذا $\mathrm{nil}(S) = 0$. ■

تعریف ۴.۱.۲ ایده‌آل سره‌ی P از حلقه‌ی R را اول گویند، هرگاه برای هر دو ایده‌آل A و B از R که $AB \subseteq P$ نتیجه دهد که $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

تعریف ۵.۱.۲ ایده‌آل سره‌ی P از حلقه‌ی R را نیم‌اول گویند، هرگاه برای هر ایده‌آل A از R که $A^{۲} \subseteq P$ نتیجه دهد که $A \subseteq P$.
واضح است که هر ایده‌آل اول، نیم‌اول نیز است.
اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اول R را به $\mathrm{P}(R)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۶.۱.۲ *فرض کنید R یک حلقه باشد.*

۱. *ایده‌آل I در R نیم‌اول است اگر وتنها اگر I اشتراکی از ایده‌آل‌های اول R باشد.*

۲. $\mathrm{P}(R) \subseteq \mathrm{nil}(R)$.

اثبات. ۱. [۱۳] صفحه ۱۶۸ قضیه‌ی (۱۱-۱۰) را ببینید.

۲. [۱۳] صفحه ۱۶۸ تعریف (۱۳-۱۰) را ببینید.

■

تعریف ۷.۱.۲ اگر $\mathrm{P}(R) = \mathrm{nil}(R)$ آنگاه حلقه‌ی R را ۲-اولیه گویند.

مثال ۸.۱.۲ به وضوح هر حلقه‌ی تقلیل یافته، ۲-اولیه است.

از آنجا که $\mathrm{P}(R)$ یک ایده‌آل حلقه‌ی R است، پس در حلقه‌ی ۲-اولیه‌ی R، $\mathrm{nil}(R)$ نیز یک ایده‌آل R است. در مثال (۱۶.۱.۲) نشان خواهیم داد که اگر $\mathrm{nil}(R)$ ایده‌آل حلقه‌ی R باشد آنگاه لزوماً R، ۲-اولیه نیست.
برای مطالعه‌ی مثال‌ها و خواص بیشتر حلقه‌های ۲-اولیه [۳،۴،۵،۶] را ببینید.

تعریف ۹.۱.۲ فرض کنید R یک حلقه باشد. مجموعه‌ی $S \subseteq R$ را پوچ‌توان موضعی گویند هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی $\{s_1, s_2, ..., s_n\} \subseteq S$، عدد طبیعی m وجود داشته باشد به طوری که حاصلضرب هر m عنصر از مجموعه‌ی $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ صفر شود . جمع همه‌ی ایده‌آل‌های پوچ‌توان موضعی R را رادیکال لویتزکی R می‌نامند و با $\mathrm{L} - \mathrm{rad}(R)$ نمایش می‌دهند.

برای یك زیرمجموعه‌ی T در حلقه‌ی R، منظور از $T^n = 0$ که $n \in \mathbb{N}$، یعنی ضرب هر n عنصر از مجموعه‌ی T برابر صفر است.

تعریف ۱۰.۱.۲ فرض کنید I یك ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد. اگر $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $I^n = 0$ آنگاه I را ایده‌آل پوچ‌توان R گویند.

گزاره ۱۱.۱.۲ *فرض کنید A و B ایده‌آل‌های پوچ‌توان موضعی R باشند. پس $A+B$ نیز یك ایده‌آل پوچ‌توان موضعی R است.*

اثبات. به وضوح $A+B$ یك ایده‌آل R است. فرض کنید $F = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ زیرمجموعه‌ای از $A+B$ باشد. لذا برای هر $i = 1, 2, ..., n$، $x_i = a_i + b_i$ که $a_i \in A$ و $b_i \in B$. قرار دهید $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ و $H = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. چون $G \subseteq A$ و A پوچ‌توان موضعی است، پس $N_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $G^{N_1} = 0$ و به همین ترتیب $N_2 \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $H^{N_2} = 0$. قرار دهید $K = \{a_{i_1}...a_{i_k}b_j |\ j = 1, .., n\}$ و $L = \{b_{i_1}...b_{i_k}a_j |\ j = 1, .., n\}$ که $a_{i_1}, ..., a_{i_k} \in G$، $k \leq N_1$، $b_{i_1}, ..., b_{i_k} \in G$ و $k \leq N_2$. چون A و B ایده‌آل‌های R هستند، پس $L \subseteq A$ و $H \subseteq B$. از این رو $G \cup L \subseteq A$ و $H \cup K \subseteq B$. از آنجا که A و B پوچ‌توان موضعی هستند، پس $N_3, N_4 \in \mathbb{N}$ وجود دارند که $(G \cup L)^{N_3} = 0$ و $(H \cup K)^{N_4} = 0$. اکنون فرض کنیم $N = 2\mathrm{Max}(N_3, N_4)$. در حاصل‌ضرب هر N عنصر F که به صورت $(a_{i_1}+b_{i_1})...(a_{i_N}+b_{i_N})$ است، اگر برای هر $j = 1, 2, ..., N$ تعداد a_{i_j}ها را با $|\ a\ |$ و تعداد b_{i_j}ها را با $|\ b\ |$ نشان دهیم که آنگاه در هر جمله از بسط این حاصل‌ضرب داریم $|\ a\ | + |\ b\ |= N$. بنابراین $|\ a\ |\geq \frac{1}{2}N$ یا $|\ b\ |\geq \frac{1}{2}N$ و از این رو $|\ a\ |\geq N_3$ یا $|\ b\ |\geq N_4$. با بررسی ساده می‌توان دید که اگر $|\ a\ |\geq N_3$ آنگاه هر تك جمله‌ای شامل حداقل N_3 عنصر از $G \cup L$ است و لذا برابر صفر خواهد شد. به طور مشابه اگر $|\ b\ |\geq N_4$ آنگاه هر تك جمله‌ای شامل حداقل N_4 عنصر از $H \cup K$ است و لذا برابر صفر خواهد شد. از این رو $F^N = 0$ و بنابراین $A + B$ پوچ‌توان موضعی است. ■

گزاره ۱۲.۱.۲

۱. $\mathrm{L-rad}(R)$ *بزرگترین ایده‌آل پوچ‌توان موضعی R است.*

۲. $\mathrm{L-rad}(R)$ *ایده‌آل نیمه اول R است.*

اثبات. ۱. فرض کنیم

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq \mathrm{L-rad}(R)$$

با توجه به این که $\mathrm{L-rad}(R) = \sum A$ که A ایده‌آل پوچ‌توان موضعی R است، بنابراین برای هر $j = 1, 2, ..., n$ داریم $x_j \in \sum A$ و از این رو

$$x_j = y_{i_{j_1}} + ... + y_{i_{jr(j)}}$$

که برای هر $h = 1, 2, ..., r(j)$ ، $y_{i_{j_h(j)}} \in A_{i_{j_h(j)}}$ و $A_{i_{j_h(j)}}$ ایده‌آل پوچ‌توان موضعی R است. پس برای هر $j = 1, 2, ..., n$ ، $x_j \in A_{i_{j_1}} + ... + A_{i_{jr(j)}}$. لذا

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq \sum_{j=1}^{n} A_{i_{j_1}} + ... + A_{i_{jr(j)}}$$

طبق گزاره‌ی (۲.۱.۱۱) و با استفاده از استقرا نتیجه می‌گیریم که $\sum_{j=1}^{n} A_{i_{j_1}} + ... + A_{i_{jr(j)}}$ ایده‌آل پوچ‌توان موضعی R است. لذا $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد که ضرب هر m عضو از مجموعه‌ی $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ برابر صفر شود. بنابراین $\mathrm{L-rad}(R)$ پوچ‌توان موضعی است و با توجه به تعریف (۲.۱.۹) نتیجه‌ی مورد نظر به دست می‌آید.

۲. اگر A ایده‌آلی از R باشد که $A^2 \subseteq \mathrm{L-rad}(R)$ آنگاه A^2 ایده‌آل پوچ‌توان موضعی R است. برای این منظور فرض کنیم $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ یك زیرمجموعه از A باشد. اگر برای هر $i, j = 1, 2, ..., n$ قرار دهیم $a_{ij} = a_i a_j$، آنگاه $\{a_{ij} \mid i, j = 1, 2, ..., n\} \subseteq A^2$. چون A^2 ایده‌آل پوچ‌توان موضعی است، لذا $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $a_{ij_1} a_{ij_2} ... a_{ij_m} = 0$ به طوری که برای هر $k = 1, 2, ..., m$، $a_{ij_k} \in \{a_{ij} \mid i, j = 1, 2, ..., n\}$. با توجه به این که $a_{ij} = a_i a_j$، داریم $a_{i_1} a_{j_1} a_{i_2} a_{j_2} ... a_{i_m} a_{j_m} = 0$ که برای هر $k = 1, 2, ..., m$، $a_{i_k}, a_{j_k} \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. پس ضرب هر m^2 عنصر از مجموعه‌ی $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ برابر صفر است. بنابراین A نیز ایده‌آل پوچ‌توان موضعی است و از این رو $A \subseteq \mathrm{L-rad}(R)$. لذا $\mathrm{L-rad}(R)$ ایده‌آل نیم‌اول R است و با توجه به گزاره‌ی (۲.۱.۱۱) داریم:

$$\mathrm{P}(R) \subseteq \mathrm{L-rad}(R)$$

■

تعریف و نماد گذاري ۱۳.۱.۲ حلقه‌ی توسیعی اور که عناصر آن چند جمله‌ای‌ها با ضرایب در R هستند و به $R[x;\alpha,\delta]$ نشان می‌دهند. جمع به صورت معمولی تعریف می‌شود و برای هر $a \in R$ ضرب تحت رابطه‌ی $xa = \alpha(a)x + \delta(a)$ انجام می‌پذیرد که α یك درون ریختی و δ یك $\alpha-$مشتقگیر R است، یعني یك نگاشت جمعی که $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$.

در حالتی که $\delta = \circ$، حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ را به $R[x;\alpha]$ و در حالتی که α همانی است آن را به $R[x;\delta]$ نشان می‌دهند. اگر $\delta = \circ$ و α همانی باشد آنگاه حلقه‌ی توسیعی اور همان حلقه‌ی $R[x]$ است.

فرض کنید I یک زیر مجموعه از R باشد. $I[x;\alpha,\delta]$ یعنی

$$\{u_\circ + u_۱x + ... + u_nx^n \in R[x;\alpha,\delta] \mid u_i \in I\}$$

در واقع برای هر چند جمله‌ای $f(x) = a_\circ + a_۱x + ... + a_nx \in R[x;\alpha,\delta]$، $f(x) \in I[x;\alpha,\delta]$ اگر و تنها اگر برای هر $\circ \leq i \leq n$، $a_i \in I$.

فرض کنید R یك حلقه و $T = \{t_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ که t_i ها با یکدیگر و با عناصر R جابجا می‌شوند، در حلقه‌ی چند جمله‌ای $R[T]$ عناصر به صورت $\sum_{r=۱}^{m} \alpha_j t_{i_۱}^{n_۱} t_{i_۲}^{n_۲} ... t_{i_r}^{n_r}$ هستند به طوری‌که $m \in \mathbb{N}$، $\{i_۱, i_۲, ..., i_r\} \subseteq \mathbb{Z}$، $\{n_۱, n_۲, ..., n_r\} \subseteq \{\mathbb{N} \cup \{\circ\}\}$ و $j = ((i_۱, n_۱), (i_۲, n_۲), ..., (i_r, n_r))$.

تعریف ۱۴.۱.۲ فرض کنید α یك خود ریختی حلقه‌ی R باشد. عنصر $r \in R$ را α- پوچ‌توان گویند، اگر برای هر $m \in \mathbb{N}$، عدد طبیعی $n = n(m) > ۲$ وجود داشته باشد به طوری‌که

$$r\alpha^m(r)...\alpha^{m(n-۱)}(r) = \circ \tag{۱.۲}$$

و r را α- پوچ‌توان با مرتبه‌ی کراندار گویند، اگر $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $m \in \mathbb{N}$، n در معادله‌ی (۱.۲) صدق کند.

نماد گذاري ۱۵.۱.۲ فرض کنید $A = \{a_۱, a_۲, ..., a_g \mid g \in \mathbb{N}\}$ یك دنباله‌ی اکیداً صعودی از اعداد صحیح باشد. کوچکترین عدد طبیعی g، که A شامل یك تصاعد حسابی k-جمله‌ای است به طوری‌که برای هر $۱ \leq j \leq g$، $a_{j+۱} - a_j \leq r$، را با $\mathrm{G}(k,r)$ نشان می‌دهند .

مثال ۱۶.۱.۲ فرض کنید K یك میدان، $T = \{t_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$، $K[T]$ حلقه‌ی چند جمله‌ای‌ها روی میدان K، I ایده‌آل تولید شده توسط $\{t_{n_۱}t_{n_۲}t_{n_۳} \mid n_۳ - n_۲ = n_۲ - n_۱ > \circ, n_۱, n_۲, n_۳ \in \mathbb{Z}\}$ در $K[T]$،

$S=\dfrac{K[T]}{I}$ و $R=S[x;\alpha]$ باشد که در آن α يك خودريختی روی S است به طوری‌که برای هر $i\in\mathbb{Z}$، $\alpha(t_i)=t_{i+1}$. نشان مي دهيم که $\mathrm{nil}(R)$ یک ایده‌آل R است و $\mathrm{P}(R)\neq\mathrm{nil}(R)$.
برای این منظور ابتدا قضیه‌ی زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۷.۱.۲ *فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی و α يك خودريختی R باشد. اگر $r\in R$ يك عنصر α-پوچ‌توان با مرتبه‌ی کراندار باشد آنگاه $(rxR)[x;\alpha]$ يك ایده‌آل راست پوچ‌توان موضعی در حلقه‌ی $R[x;\alpha]$ است.*

اثبات. به وضوح $(rxR)[x;\alpha]$ یک ایده‌آل راست $R[x;\alpha]$ است. فرض کنیم S زیر حلقه‌ی بدون عنصر یک در $(rxR)[x;\alpha]$، تولید شده توسط $H=\{rs_1x^{i_1},...,rs_nx^{i_n}\}$ باشد که برای هر $j=1,...,n$، $s_j\in R$ و $i_j\in\mathbb{N}$. باید نشان دهیم که S پوچ‌توان است. فرض کنیم $m=\mathrm{Max}\{i_1,...,i_n\}$ و مرتبه‌ی α-پوچ‌توانی r برابر با k باشد. قرار می‌دهیم $l=\mathrm{G}(k,m)$ و ادعا می‌کنیم که $S^l=0$. چون عناصر S توسط اعضای مجموعه‌ی H تولید می‌شوند، کافی است نشان دهیم که ضرب هر l عنصر H صفر می‌شود. قرار می‌دهیم $p=(rs_{t_1}x^{i_1})(rs_{t_2}x^{i_2})...(rs_{t_l}x^{i_l})$ و لذا

$$p=(r\alpha^{i_1}(r)\alpha^{i_1+i_2}(r)...\alpha^{i_1+...+i_l}(r))(s_{t_1}s_{t_2}...s_{t_l})x^{i_1+i_2+...+i_l}$$

$0,i_1,i_1+i_2,...,i_1+i_2+...+i_l$ يك دنباله‌ی اکیداً صعودی از اعداد صحیح است. از طرفی برای هر دو جمله متوالي $j_y,j_{y-1}\in\{0,i_1,i_1+i_2,...,i_1+i_2+...+i_l\}$ که $y=1,...,l$، داریم $j_y-j_{y-1}=i_m$ و از آنجا که $l=\mathrm{G}(m,k)$ پس $\{0,i_1,i_1+i_2,...,i_1+i_2+...+i_l\}$ شامل يك دنباله‌ی حسابی k-جمله‌ای است. چون مرتبه‌ی α-پوچ‌توانی r برابر k است، لذا $p=0$ و حکم ثابت می‌شود.

■

اکنون به مثال (۱۶.۱.۲) برمی‌گردیم.
ابتدا نشان می‌دهیم که $\mathrm{P}(R)=(0)$. فرض کنیم (0) ایده‌آل اول R نباشد. لذا

$$f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n, g(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m\in R$$

وجود دارند که $a_n,b_m\neq 0$ و $f(x)Rg(x)=0$. بنابراین برای هر $j\geq 0$، $f(x)x^jg(x)=0$. در حاصل‌ضرب اخیر $a_nx^nx^jb_mx^m$ جمله‌ی با بزرگترین درجه است. لذا برای هر $j\geq 0$، $a_n\alpha^{n+j}(b_m)=0$.
بنابراین عناصر ناصفر $a=a_n$ و $b=b_m$ در S وجود دارند به طوری که برای هر $k\geq n$، $a\alpha^k(b)=0$.

اما با انتخاب عدد طبیعی به اندازه‌ی کافی بزرگ k به راحتی می‌توان دید که ضرب هر دو تك جمله‌ای در $a\delta^k(b)$، شامل سه نامعین که اندیس‌هایشان تشکیل تصاعد حسابی دهد، نیست. پس $a\alpha^k(b) \neq 0$ که تناقض است. لذا (0) ایده‌آل اول R است و از این رو $\mathrm{P}(R) = (0)$.

برای هر $t_i \in R$ داریم $t_i\alpha(t_i)\alpha^2(t_i) = t_it_{i+1}t_{i+2} = 0$. لذا برای هر $i \in \mathbb{Z}$، مرتبه‌ی α- پوچ‌توانی t_i برابر ۳ است. از این رو باتوجه به قضیه‌ی (۱۷.۱.۲) نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{L}-rad(R) \neq (0)$.

حال $\mathrm{L}-\mathrm{rad}(R)$ را به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که $\mathrm{nil}(R)$ یک ایده‌آل R است. قرار می‌دهیم $M = \sum t_iS$. داریم $\frac{S}{M} \simeq K$. در واقع برای هر $h \in \frac{S}{M}$، $h = s + M$ که $s \in S$. لذا $s = p + I$ که $p \in K[T]$. از این رو

$$p = \sum_{r=1}^{m} \alpha_j t_{i_1}^{n_1}t_{i_2}^{n_2}...t_{i_r}^{n_r}$$

که $m \in \mathbb{N}$، $\{i_1, i_2, ..., i_r, n_1, n_2, ..., n_r\} \in \mathbb{Z}$ و $j = ((i_1, n_1), (i_2, n_2), ..., (i_r, n_r))$. بنابراین می‌توانیم p را به صورت

$$\alpha_u + \sum_{r=1, j\neq u}^{m} \alpha_j t_{i_1}^{n_1}t_{i_2}^{n_2}...t_{i_r}^{n_r}$$

بنویسیم که در هر جمله‌ی $\sum_{r=1, j\neq u}^{m} \alpha_j t_{i_1}^{n_1}t_{i_2}^{n_2}...t_{i_r}^{n_r}$، $1 \leq d \leq r$ وجود دارد که n_d ناصفر است. از آنجا که $\alpha_j \in K$ داریم

$$\sum_{r=1, j\neq u}^{m} \alpha_j t_{i_1}^{n_1}t_{i_2}^{n_2}...t_{i_r}^{n_r} \in \sum_{i\in\mathbb{Z}} t_iS$$

و از این رو

$$\sum_{r=1, j\neq u}^{m} \alpha_j t_{i_1}^{n_1}t_{i_2}^{n_2}...t_{i_r}^{n_r} + I \in M$$

لذا اگر $h \in \frac{S}{M}$ آنگاه $h = \alpha + M$ که $\alpha \in K$. س به راحتی می‌توان دید که نگاشت ψ به صورت

$$\begin{cases} \psi : \dfrac{S}{M} \to K \\ \\ \alpha + M \mapsto \alpha \end{cases}$$

يك يكريختی است. فرض کنیم

$$A = MxR = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (t_iS)(xR)$$