بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

توابع قویاً ستاره‌گون

استاد راهنما

دکتر علی آبکار

استاد مشاور

دکتر عبدالرحمن رازانی

نگارش

مهری برغمدی

پاییز ۱۳۹۲

چکیده

در این پایان‌نامه توابع را از دیدگاه هندسی بررسی می‌کنیم و رابطه‌ای تحلیلی بین تابع f و ویژگی‌های هندسی تصویر f را بیان می‌کنیم. هم‌چنین توصیفی تحلیلی برای توابع محدب و ستاه‌گون بر حسب f و مشتق‌های آن بیان خواهیم کرد. عبارت $\frac{z(f'(z) - 1)}{f(z)}$ را که درآن f با دو شرط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ نرمال شده است را مطالعه می‌کنیم و شرایط کافی برای ستاره‌گونی و تک‌ارزی توابع را در قرص یکه‌ی باز نتیجه می‌گیریم.

کلمات کلیدی: تابع تحلیلی، تابع ستاره‌گون، تابع قویاً ستاره‌گون، تابع محدب، تبعیت دیفرانسیلی.

مقدمه

نظریه‌ی هندسی توابع تحلیلی شاخه‌ای از آنالیز مختلط است. در این نظریه به دنبال یافتن رابطه‌ای تحلیلی بین تابع f و مشتق‌های آن از یک طرف و تصویر تابع از طرف دیگر می‌باشیم. فرض کنیم $\mathbb{D}$ قرص یکه‌ی باز در صفحه‌ی مختلط باشد. تابع تحلیلی f را محدب نامیم هرگاه تصویر $\mathbb{D}$ تحت f مجموعه‌ای محدب باشد. به‌طور مشابه f را ستاره‌گون نامیم هرگاه تصویر $\mathbb{D}$ تحت f مجموعه‌ای ستاره‌گون باشد، در این‌جا f تابعی تحلیلی بر قرص یکه‌ی باز است که در شرایط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می‌کند. مشهور است که چنین تابع fای محدب است اگر و تنها اگر $Re\ (1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)}) > 0$. این گزاره نشان می‌دهد که بین ویژگی‌های هندسی f یعنی محدب بودن $f(\mathbb{D})$ و مثبت بودن عبارتی بر حسب مشتق f یعنی $Re\ (1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)})$ رابطه‌ای برقرار است. به‌طور مشابه ملاحظه خواهیم کرد که ستاره‌گون بودن f هم‌ارز مثبت بودن $Re(\dfrac{zf'(z)}{f(z)})$ است. رابطه‌ای اساسی بین رده‌ی توابع محدب و ستاره‌گون وجود دارد به این صورت که f محدب است اگر و تنها اگر $zf'(z)$ ستاره‌گون باشد.

در این پایان‌نامه هدف مطالعه‌ی ویژگی‌های هندسی تابع تحلیلی f و رابطه‌های دیفرانسیلی مانند بالا است. برای بررسی این‌گونه روابط دیفرانسیلی ابتدا مفهوم تبعیت دیفرانسیلی را بیان می‌کنیم. گوییم f از g تبعیت می‌کند و می‌نویسیم $f(z) \prec g(z)$ اگر تابعی مانند $w \in H(\mathbb{D})$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $z \in \mathbb{D}$ داشته باشیم $f(z) = g(w(z))$ ، $w(0) = 0$ و $|w(z)| < 1$. در ادامه مفهوم غالب بودن را بیان کرده و بهترین غالب‌ها را معرفی خواهیم کرد. رابطه‌ای مهم بین ویژگی‌های هندسی توابع و نابرابری‌های دیفرانسیلی وجود دارد. هدف ما بررسی ویژگی‌های هندسی توابعی تحلیلی مانند f است که در نابرابری $Re\{\dfrac{z(f'(z) - 1)}{f(z)}\} > 0$ صدق می‌کنند.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد که در فصل نخست ما به معرفی توابع تک‌ارز، محدب، ستاره‌گون و قویاً ستاره‌گون در قرص یکه‌ی باز می‌پردازیم و ارتباط بین توابع محدب و ستاره‌گون را بیان می‌کنیم. هم‌چنین مفاهیم تبعیت دیفرانسیلی و غالب بودن را معرفی کرده و به بررسی تبعیت‌های دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول می‌پردازیم.

چند قضیه و لم اساسی در این فصل بیان کرده و در فصل‌های بعدی به‌طور مکرر از آن‌ها استفاده می‌کنیم. در فصل دوم با بررسی قدرمطلق و قسمت حقیقی عبارت $\frac{z(f'(z)-۱)}{f(z)}$ به شرایطی دست می‌یابیم که منجر به تک‌ارزی، ستاره‌گونی و قویاً ستاره‌گونی توابع تحلیلی می‌شود. برای رسیدن به این هدف قدرمطلق و قسمت حقیقی عبارت‌های $f'(z)-۱$ و $\frac{f(z)}{z}$ را نیز مطالعه می‌کنیم. مطالب فصل اول و دوم از مراجع [۱]، [۲]، [۵]، [۶]، [۷]، [۹]، [۱۰]، [۱۷]، [۱۹]، [۲۰]و [۲۱] اخذ شده است. در فصل سوم رده‌ای از توابع به‌نام $S^*(a,b)$ را معرفی کرده که با قرار دادن مقادیر ثابت و مخصوص برای a و b این رده از توابع به چندین رده از توابع ستاره‌گون تبدیل می‌شود و به شرایطی برای ستاره‌گونی و قویاً ستاره‌گونی توابع تحلیلی می‌انجامد. مطالب این فصل از مراجع [۳]، [۴]، [۷]، [۱۱]، [۱۳]و [۱۴] اخذ شده است. در فصل چهارم و پایانی از روش نابرابری‌های دیفرانسیلی استفاده می‌کنیم و با معرفی رده‌ی توابع $H(\alpha)$ نتایجی را برای رده‌ی مشخصی از توابع قویاً ستاره‌گون به‌دست می‌آوریم. مطالب این فصل از مراجع [۴]، [۸]، [۱۲]، [۱۵]، [۱۶]و [۱۸] اخذ شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

نظریه‌ی هندسی توابع

نظریه‌ی هندسی توابع[1] بخشی از آنالیز مختلط است که ویژگی‌های هندسی توابع را از لحاظ نگاشت مورد بحث و بررسی قرار می‌دهد. به‌عبارت دیگر، در نظریه‌ی هندسی توابع به دنبال یافتن رابطه‌ای تحلیلی بین تابع f و ویژگی‌های هندسی تصویر f می‌باشیم.

۱.۱ پیش‌نیازها

فرض کنیم Ω یک مجموعه‌ی باز در صفحه‌ی مختلط[2] باشد، تابع $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ را تحلیلی[3] نامیم هرگاه f در هر نقطه از Ω مشتق‌پذیر باشد یعنی

$$\lim_{\triangle z\to 0}\frac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$$

موجود باشد.

[1] Geometric function theory

[2] Complex plane

[3] Analytic

به هر مجموعه‌ی باز و همبند در $\mathbb{C}$ یک حوزه می‌گویند. در این پایان‌نامه حوزه‌ی مورد نظر ما

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

قرص یکه‌ی باز[۴] در صفحه‌ی مختلط است. رده‌ی[۵] توابع تحلیلی بر $\mathbb{D}$ را با $H(\mathbb{D})$ نشان خواهیم داد.
در این پایان‌نامه توابعی تحلیلی مانند $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ را در نظر می‌گیریم که در دو ویژگی $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می‌کنند. در این‌صورت می‌گوییم f تحت شرایط بالا نرمال شده[۶] است.
رده‌ی این توابع را با

$$\mathcal{A} = \{f \in H(\mathbb{D}) \ : \ f(0) = 0 \ , \ f'(0) = 1\}$$

نشان خواهیم داد.
روشن است که هر $f \in \mathcal{A}$ دارای یک سری تیلور به شکل

$$f(z) = z + \Sigma_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

است.

تعریف ۱.۱.۱. *تابع $f \in \mathcal{A}$ را محدب[۷] می‌نامیم هرگاه $f(\mathbb{D})$ مجموعه‌ای محدب باشد.*

تعریف ۲.۱.۱. *تابع $f \in \mathcal{A}$ را ستاره‌گون[۸] می‌نامیم هرگاه $f(\mathbb{D})$ مجموعه‌ای ستاره‌گون (نسبت به مبدا) باشد، یعنی به ازای هر $w \in f(\mathbb{D})$ و هر $0 \leq t \leq 1$، $tw \in f(\mathbb{D})$.*

---

[۴] Open unit disk

[۵] Class

[۶] Normalized

[۷] Convex

[۸] Starlike

توصیف تحلیلی توابع محدب و ستاره‌گون بر حسب f و مشتق‌های آن (بر حسب یک نابرابری دیفرانسیلی[۹]) به‌صورت زیر است.

قضیه ۱.۱.۱. *تابع* $f \in \mathcal{A}$ *محدب است اگر و فقط اگر به‌ازای هر* $z \in \mathbb{D}$،

$$Re\,\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > 0$$

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم که f تابعی محدب باشد. ادعا می‌کنیم که تصویر حوزه‌ی

$$D_\rho = \{z \ : \ |z| < \rho\}$$

تحت f مجموعه‌ای محدب است. برای نشان دادن این امر، نقاط z_1 و z_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$|z_1| \leq |z_2| < \rho$$

فرض کنیم $w_1 = f(z_1)$ و $w_2 = f(z_2)$ و

$$w_0 = tw_1 + (1-t)w_2 \qquad\qquad 0 < t < 1$$

چون f نگاشتی محدب است، نقطه‌ی منحصر به فردی مانند $z_0 \in \mathbb{D}$ وجود دارد که $f(z_0) = w_0$. باید نشان دهیم که $|z_0| < \rho$.
تعریف می‌کنیم $g(z) = tf(\frac{z\,z_1}{z_2}) + (1-t)f(z)$ که در $\mathbb{D}$ تحلیلی است و $g(0) = 0$ و $g(z_2) = w_0$.
حال چون f تابعی محدب است، تابع $h(z) = f^{-1}(g(z))$ خوش‌تعریف است. از طرف دیگر، چون $h(0) = 0$ و $|h(z)| \leq 1$ با استفاده از لم شوارتز داریم $|h(z)| \leq |z|$. لذا

$$|z_0| = |h(z_2)| \leq |z_2| < \rho$$

بنابراین f هر قرص $|z| = \rho < 1$ را به‌روی منحنی C_ρای می‌نگارد که در حوزه‌ای محدب، کراندار است.

[۹]Differential inequality

تحدب باعث می‌شود که شیب مماس بر C_ρ صعودی باشد به این معنی که منحنی مسیر مثبتی را می‌پیماید. اگر فرض کنیم $z = \rho e^{i\theta}$ و $f(z) = Re^{i\varphi}$ باشد، آن‌گاه $f(\rho e^{i\theta}) = Re^{i\varphi}$. لذا تحلیل این شرایط به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(\rho e^{i\theta})\}) \geq ۰$$

بنابراین داریم

$$Im\,\{\frac{\partial}{\partial\theta}\ \log\ (i\rho e^{i\theta}f'(\rho e^{i\theta}))\} \geq ۰$$

توجه کنیم که چون $z = \rho e^{i\theta}$ پس

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dz}{d\theta} \times \frac{d}{dz} = i\rho e^{i\theta}\frac{d}{dz} = iz\frac{d}{dz}$$

لذا داریم

$$Im\,\{\frac{\partial}{\partial\theta}\ \log\ (i\rho e^{i\theta}f'(\rho e^{i\theta}))\} =$$

$$Im\,\{iz\frac{d}{dz}\log\ (izf'(z))\} = Im\,\{iz\frac{d}{dz}(\log\ i + \log\ z + \log\ f'(z))\}$$

$$= Im\,\{iz(\frac{۱}{z} + \frac{f''(z)}{f'(z)})\} = Im\,\{i(۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)})\}$$

بنابراین

$$Im\,\{i(۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)})\} \geq ۰$$

به‌عبارت دیگر

$$Re\,\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} \geq ۰\,.$$

برعکس فرض کنیم f تابع تحلیلی نرمال شده باشد که $Re\,\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} \geq ۰$. محاسبات بالا نشان می‌دهد که شیب مماس بر منحنی C_ρ به‌طور یکنواخت افزایش می‌یابد. اما از آن‌جا که هر نقطه یک مدار کامل C_ρ می‌سازد، آرگومان شیب بردار دارای تغییرات زیر است

$$\int_{\circ}^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\theta}(\arg(\frac{\partial}{\partial\theta}f(\rho e^{i\theta})))d\theta = \int_{\circ}^{2\pi} Re\ (1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)})d\theta$$
$$= Re\ (\int_{|z|=\rho}(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)})\frac{dz}{iz}) = 2\pi$$

که این نشان می‌دهد C_ρ یک منحنی ساده‌ی بسته است که در حوزه‌ای محدب، کراندار می‌شود. بنابراین برای $\rho < 1$، f تابعی تک‌ارز با برد محدب است. □

قضیه ۲.۱.۱. *تابع $f \in \mathcal{A}$ ستاره‌گون است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $z \in \mathbb{D}$،*

$$Re\ \{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > \circ$$

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که اگر f ستاره‌گون باشد، تصویر حوزه‌ی $D_\rho = \{z\ :\ |z| < \rho\}$ تحت f مجموعه‌ای ستاره‌گون است.

فرض کنیم $z = \rho e^{i\theta}$ و $f(z) = Re^{i\varphi}$ بنابراین $f(\rho e^{i\theta}) = Re^{i\varphi}$. چون f نگاشتی همدیس است پس جهت و زاویه را حفظ می‌کند، بنابراین داریم $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \geq \circ$.
یا به‌طور معادل

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(arg\ f(z)) \geq \circ$$

(عکس این حکم نیز درست است، یعنی اگر این عبارت نامنفی باشد خم بالا باید ستاره‌گون باشد.)
از طرف دیگر

$$\log\ f(z) = \log\ R + i\varphi$$

لذا

$$\varphi = Im\ \log\ f(z)$$

پس باید داشته باشیم

$$Im\ \{\frac{\partial}{\partial\theta}\ \log\ f(z)\} \geq \circ$$

توجه کنیم که چون $z = \rho e^{i\theta}$ پس

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dz}{d\theta} \times \frac{d}{dz} = i\rho e^{i\theta} \frac{d}{dz} = iz \frac{d}{dz}$$

بنابراین

$$Im\,\{iz \frac{d}{dz}\ \log\ f(z)\} \geq 0$$

لذا داریم

$$Im\,\{iz \frac{f'(z)}{f(z)}\} \geq 0$$

به‌عبارت دیگر

$$Re\,\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} \geq 0\,.$$

□

تعریف ۳.۱.۱. *تابع تحلیلی $f \in H(\mathbb{D})$ را تک‌ارز[10] می‌نامیم هرگاه f یک‌به‌یک باشد.*

رده‌ی توابع محدب را با C، رده‌ی توابع ستاره‌گون را با S^* و رده‌ی توابع تک‌ارز را با S نشان می‌دهیم. قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که رابطه‌ای اساسی بین رده‌ی توابع محدب و ستاره‌گون وجود دارد.

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنیم $f \in \mathcal{A}$ باشد. در این‌صورت f محدب است اگر و فقط اگر $zf'(z)$ ستاره‌گون باشد.*

اثبات. قرار می‌دهیم $g(z) = zf'(z)$. در این‌صورت داریم

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = z\frac{f'(z) + zf''(z)}{zf'(z)} = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

[10] Univalent

از این‌رو، $g \in S^*$ اگر و تنها اگر

$$Re\,\{z\frac{g'(z)}{g(z)}\} > ۰$$

که هم‌ارز است با این‌که

$$Re\,\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\} > ۰$$

که این هم، هم‌ارز محدب بودن f است. $\square$

رده‌ی دیگری از توابع که در نظریه‌ی هندسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد، رده‌ی توابع نزدیک-به-محدب[۱۱] است.

تعریف ۴.۱.۱. *تابع $f \in \mathcal{A}$ را نزدیک-به-محدب می‌نامیم هرگاه تابع محدب g یافت شود به‌طوری‌که*

$$Re\,\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\} > ۰ \qquad\qquad z \in \mathbb{D}$$

روشن است که هر تابع محدب، تابعی نزدیک-به-محدب است، کافی است قرار دهیم $g = f$.

رده‌ی همه‌ی توابع نزدیک-به-محدب را با K نشان می‌دهیم. ازاین‌رو، همواره داریم

$$C \subseteq S^* \subseteq K$$

[۱۱] Close-to-convex

۲.۱ توابع محدب از مرتبه‌ی α و ستاره‌گون از مرتبه‌ی α

با الهام از تعریف‌های گفته شده در بخش قبل، روبرتسون[۱۲] رده‌های تعمیم یافته‌ی زیر را در سال ۱۹۳۶ معرفی کرد.

تعریف ۱.۲.۱. *تابع $f \in \mathcal{A}$ را ستاره‌گون از مرتبه‌ی α[۱۳] گوییم، هرگاه برای $0 \leq \alpha < 1$ داشته باشیم*

$$Re\,\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > \alpha \qquad\qquad z \in \mathbb{D}$$

بنابراین رده‌ی همه‌ی توابع ستاره‌گون از مرتبه‌ی α را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$S^*(\alpha) = \{f \in \mathcal{A} \;:\; Re\,\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > \alpha \;\;,\;\; z \in \mathbb{D}\}$$

تعریف ۲.۲.۱. *تابع $f \in \mathcal{A}$ را محدب از مرتبه‌ی α[۱۴] نامیم هرگاه*

$$Re\,\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > \alpha \qquad\qquad z \in \mathbb{D}$$

حال به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که به قضیه‌ی مارکس-استروهکر[۱۵] معروف است.

قضیه ۱.۲.۱. *فرض کنید $f \in \mathcal{A}$ باشد و به‌ازای هر $z \in \mathbb{D}$،*

$$Re\,\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > 0$$

در این صورت

$$Re\,\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > \frac{1}{2} \qquad\qquad z \in \mathbb{D}$$

[۱۲] M.S.Robertson

[۱۳] Starlike of order α

[۱۴] Convex of order α

[۱۵] Marx-Strohhacker

به‌عبارت دیگر، یک تابع محدب از مرتبه‌ی صفر تابعی ستاره گون از مرتبه‌ی حداقل $\frac{۱}{۲}$ است.

اثبات. به [۲] رجوع شود. □

همین‌طور مشهور است که اگر

$$Re\,\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > \alpha$$

آن‌گاه

$$Re\,\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > \beta(\alpha)$$

که در آن

$$\beta(\alpha) \geq \frac{۲\alpha - ۱ + \sqrt{۹ - ۴\alpha + ۴\alpha^۲}}{۴} \geq \frac{۱}{۲}$$

در واقع

$$\beta(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{۱ - ۲\alpha}{۲^{۲-۲\alpha}(۱ - ۲^{۲\alpha-۱})} & \alpha \neq \dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{۱}{۲\ \log ۲} & \alpha = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

قضیه ۲.۲.۱. *فرض کنید $f \in \mathcal{A}$ باشد، اگر*

۱) $\Sigma_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$ *باشد، آن‌گاه* $f \in S^*(\alpha)$.

۲) $\Sigma_{n=۲}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$ *باشد، آن‌گاه* $f \in C(\alpha)$.

اثبات. به [۲] رجوع شود. □

حال پا را کمی فراتر گذاشته و دسته‌ای از توابع به‌نام قویاً ستاره‌گون[۱۶] و قویاً محدب[۱۷] را تعریف می‌کنیم.

[۱۶] Strongly starlike

[۱۷] Strongly convex

تعریف ۳.۲.۱. *تابع $f \in \mathcal{A}$ را قویاً ستاره‌گون از مرتبه‌ی α و نوع β می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $z \in \mathbb{D}$* **داشته** *باشیم*

$$|\arg\ (\frac{zf'(z)}{f(z)} - \beta)| < \frac{\alpha\pi}{۲}$$

که در آن $۰ \leq \beta < ۱$ و $۰ < \alpha \leq ۱$.

این رده از توابع را با $S^*(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهیم.

اگر $\beta = ۰$ باشد، f را قویاً ستاره‌گون از مرتبه‌ی α می‌گوییم و می‌نویسیم $f \in \tilde{S}^*(\alpha)$. اگر $\beta = ۰$ و $\alpha = ۱$، یعنی

$$|\arg\ \frac{zf'(z)}{f(z)}| < \frac{\pi}{۲}$$

f را قویاً ستاره‌گون می‌گوییم.

به‌ویژه $S^* \equiv \tilde{S}^*(۱) \equiv S^*(۰)$ رده‌ای از توابع ستاره‌گون می‌باشد.
این رده‌ها زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی توابع تک ارز هستند. یعنی $S^* \subset S$ چون اگر $f \in S^*$ باشد آن‌گاه خواهیم داشت $f'(۰) = ۱$ لذا $f'(۰) \neq ۰$ پس f تابعی یک‌به‌یک و در نهایت تک‌ارز است.

تعریف ۴.۲.۱. *تابع $f \in \mathcal{A}$ را قویاً محدب از مرتبه‌ی α و نوع β می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $z \in \mathbb{D}$* **داشته باشیم**

$$|\arg\ (۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \beta)| < \frac{\alpha\pi}{۲}$$

این رده از توابع را با $C(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهیم.

می‌توان **نشان داد که** *$f \in C(\alpha,\beta)$ اگر و فقط اگر $zf'(z) \in S^*(\alpha,\beta)$.*

۳.۱ موضوع پایان‌نامه

هدف این پایان‌نامه مطالعه‌ی توابع محدب تک‌ارز و ستاره‌گون تک‌ارز است. به‌عبارت دیگر، ما وارد بررسی توابع برخه‌ریخت- محدب[۱۸] و توابع برخه‌ریخت- ستاره‌گون[۱۹] نمی‌شویم.
همان‌گونه که دیدیم، رابطه‌ای مهم بین ویژگی‌های هندسی توابع و نابرابری‌های دیفرانسیلی وجود دارد.
هدف ما بررسی ویژگی‌های هندسی توابعی مانند $f \in \mathcal{A}$ است که در نابرابری

$$Re\{\frac{z(f'(z)-۱)}{f(z)}\} > ۰$$

صدق می‌کنند.
در این پایان‌نامه شرایطی را اعمال می‌کنیم که منجر به ویژگی‌هایی از $\frac{f(z)}{z}$ و $f'(z) - ۱$ و هم‌چنین ضوابطی برای تک‌ارزی، ستاره‌گونی و ستاره‌گونی قوی از مرتبه‌ی α می‌شود.
توجه داشته باشید که عبارت‌های $\frac{f(z)}{z}$ و $f'(z) - ۱$ در اکثر شرایط و ضوابط برای ستاره‌گونی یا تک‌ارزی تابع f ظاهر خواهد شد.
حال به بیان چند قضیه و لم اساسی می‌پردازیم که دانستن آنها برای بررسی قدرمطلق[۲۰] و قسمت حقیقی[۲۱] عبارت

$$\frac{z(f'(z)-۱)}{f(z)} \tag{۱.۱}$$

در بخش‌های بعدی الزامی است.

[۱۸] Meromorphically convex

[۱۹] Meromorphically starlike

[۲۰] Modulus

[۲۱] Real part

قضیه ۱.۳.۱. فرض کنیم $C^{\circ}(\overline{\mathbb{D}})$ رده‌ی توابع پیوسته[۲۲] در قرص یکه‌ی بسته[۲۳] باشد و $b \in H(\mathbb{D}) \cap C^{\circ}(\overline{\mathbb{D}})$ و $b(\circ) = \circ$ و $\sup_{z\in\mathbb{D}} |b(z)| = ۱$ و $c = \sup_{z\in\mathbb{D}} \int_{\circ}^{۱} |b(tz)|dt$. برای $\alpha \in (\circ, ۱]$، قرار می‌دهیم

$$\lambda(\alpha) = \frac{\sin(\frac{\alpha\pi}{۲})}{\sqrt{۱ + ۲c\ \cos(\frac{\alpha\pi}{۲}) + c^{۲}}}$$

حال اگر $f \in \mathcal{A}$ و

$$|f'(z) - ۱| \leq \lambda(\alpha)|b(z)| \qquad z \in \mathbb{D}$$

آن‌گاه

$$f(z) \in \tilde{S}^{*}(\alpha)$$

علاوه بر این اگر

$$b(t) = \max_{\circ\leq\theta\leq ۲\pi} |b(te^{i\theta})| \qquad t \in [\circ, ۱]$$

ثابت $\lambda(\alpha)$ بزرگترین مقداری است که به‌ازای آن نتیجه‌ی بالا برقرار است.

اثبات. به [۱۹] رجوع شود. □

قضیه ۲.۳.۱. اگر $f \in \mathcal{A}$ و

$$Re\ (\frac{zf'(z)}{f(z)}) > \frac{۱}{۲} \qquad z \in \mathbb{D}$$

آن‌گاه

$$Re\ (\frac{f(z)}{z}) > \frac{۱}{۲} \qquad z \in \mathbb{D}$$

اثبات. به [۲۱] رجوع شود. □

برای رسیدن به هدف، از نظریه‌ی تبعیت‌های دیفرانسیلی[۲۴] استفاده می‌کنیم.

ابتدا مفهوم تبعیت[۲۵] را معرفی می‌کنیم.

[۲۲] Continuous

[۲۳] Close unit disk

[۲۴] Differential subordinations

[۲۵] Subordination

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $f,g \in \mathcal{A}$ گوییم f از g تبعیت می‌کند[۲۶] و می‌نویسیم $f(z) \prec g(z)$ اگر تابعی مانند $w \in H(\mathbb{D})$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $z \in \mathbb{D}$،

$$w(0)=0 \quad , \quad |w(z)|<1 \quad , \quad f(z)=g(w(z))$$

به‌ویژه اگر $g(z)$ در قرص یکه‌ی $\mathbb{D}$ تک‌ارز باشد آن‌گاه

$$f(z) \prec g(z)$$

اگر و فقط اگر

$$f(0)=g(0) \quad , \quad f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$$

نظریه‌ی کلی تبعیت‌های دیفرانسیلی شامل تبعیت‌های دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول می‌باشد، مثلاً اگر $\mathbb{C}$ صفحه‌ی مختلط باشد و $\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ در حوزه‌ی D تحلیلی باشد و $h(z)$ در $\mathbb{D}$ تک‌ارز و $p(z)$ در $\mathbb{D}$ تحلیلی باشد و هم‌چنین

$$(p(z), zp'(z)) \in D \qquad z \in \mathbb{D}$$

آن‌گاه $p(z)$ یک تبعیت دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول[۲۷] است هرگاه

$$\varphi(p(z), zp'(z)) \prec h(z) \; . \tag{۲.۱}$$

تابع تک‌ارز $q(z)$ یک غالب[۲۸] تبعیت دیفرانسیلی (۲.۱) است اگر برای همه‌ی $p(z)$ هایی که در (۲.۱) صدق می‌کنند داشته باشیم $p(z) \prec q(z)$.

حال اگر $q_1(z)$ غالبی از (۲.۱) باشد و برای همه‌ی غالب‌های (۲.۱) داشته باشیم $q_1(z) \prec q(z)$ آن‌گاه می‌گوییم $q_1(z)$ بهترین غالب[۲۹] تبعیت دیفرانسیلی (۲.۱) می‌باشد.

[۲۶] f is subordinate to g

[۲۷] First-order differential subordination

[۲۸] Dominant

[۲۹] Best dominant

با استفاده از نظریه‌ی تبعیت‌های دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۳.۱. فرض کنیم $q(z)$ در قرص یکه‌ی $\mathbb{D}$ تک‌ارز باشد و $\theta(w)$ و $\varphi(w)$ در حوزه‌ی D شامل $q(\mathbb{D})$ تحلیلی باشند به‌طوری‌که وقتی $w \in q(\mathbb{D})$، $\varphi(w) \neq 0$.

قرار می‌دهیم $Q(z) = zq'(z)\varphi(q(z))$ و $h(z) = \theta(q(z)) + Q(z)$ و فرض می‌کنیم که

۱) $Q(z)$ در قرص یکه‌ی $\mathbb{D}$ ستاره‌گون باشد.

۲) برای هر $z \in \mathbb{D}$

$$Re\,(\frac{zh'(z)}{Q(z)}) = Re\,(\frac{z\theta'(q(z))q'(z) + zQ'(z)}{zq'(z)\varphi(q(z))}) = Re\,(\frac{\theta'(q(z))}{\varphi(q(z))} + \frac{zQ'(z)}{Q(z)}) > 0$$

اگر $p(z)$ در $\mathbb{D}$ تحلیلی باشد و $p(0) = q(0)$ و $p(\mathbb{D}) \subseteq D$ و

$$\theta(p(z)) + zp'(z)\varphi(p(z)) \prec \theta(q(z)) + zq'(z)\varphi(q(z)) = h(z) \qquad (۳.۱)$$

آن‌گاه $p(z) \prec q(z)$ و $q(z)$ بهترین غالب (۳.۱) است.

اثبات. به [۷] رجوع شود. □

با استفاده از لم ۱.۳.۱، لم زیر را اثبات خواهیم کرد که در بخش‌های بعدی برای مطالعه‌ی قدرمطلق و قسمت حقیقی عبارت (۱.۱) استفاده خواهد شد.

لم ۲.۳.۱. فرض کنیم $q(z)$ در قرص یکه‌ی $\mathbb{D}$ تک‌ارز باشد و برای هر $z \in \mathbb{D}$ ، $q(0) = 0$ و $q(z) \neq -1$ و داشته باشیم

۱) $z \in \mathbb{D}$ $\qquad Re\,\{1 + \frac{zq''(z)}{q'(z)} - \frac{zq'(z)}{1 + q(z)}\} > 0$

۲) $z \in \mathbb{D}$ $\qquad Re\,\{1 + \frac{zq''(z)}{q'(z)} - \frac{zq'(z) - 1}{1 + q(z)}\} > 0$

اگر $f \in \mathcal{A}$ و برای هر $z \in \mathbb{D}$، $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ و

$$\frac{z(f'(z) - 1)}{f(z)} \prec \frac{zq'(z) + q(z)}{1 + q(z)} \qquad (۴.۱)$$