دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

گروه‌های متناهی با زیرگروه‌های مینیمال c-تکمیل

استاد راهنما

دکتر حمید موسوی

استاد مشاور

دکتر محمد شهریاری

پژوهشگر

محمد زارع اخیجهانی

۱۳۹۰

خدایا...

ای فریادرس بی پناهان و ای نور دیده در ظلمت ماندگان. نمی‌دانم تو را با چه واژه‌ای می‌توان وصف کرد که همانا تو بالاتر از واژه‌هائی هستی که برای تعریف و توصیفت می‌توان بکار برد. حال تو را شاکرم با تمام وجودم و با تمام توانی که دارم، ولی مگر می‌شود بدون تشکر از بندگانت، شکر تو را به جای آورد که همانا

لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق.

پس بر خود واجب می‌دانم در این راه، تشکر از همه کسانی که مرا همراهی کردند. به ویژه از استاد راهنمای پایان‌نامه‌ام جناب آقای دکتر حمید موسوی که از خداوند منان خواستار موفقیت روز افزون ایشان در همه مراحل زندگی و بخصوص عرصه علم و دانش می‌باشم. چه بسا اگر ایشان صبر و البته لطف مخصوص به بنده را نداشتند، اکنون من در این عرصه حضور نداشتم. از جناب آقای دکتر محمد شهریاری که زحمت مشاوره پایان‌نامه بنده بر عهده ایشان بود نیز کمال امتنان را دارم. همچنین از کلیه اساتیدی که در طول این چند سال زحمات بی دریغی در عرصه آشنایی من با ریاضیات و جبر را داشتند، کمال تشکر را دارم.

در پایان بوسه می‌زنم بر دستان تک‌تک اعضای خانواده‌ام که همواره یاریگر و پشتیبانم در این ایام بوده و هستند و از خداوند خواستار دوام سایه آنها بر سرم هستم.

نام خانوادگی: زارع اخیجهانی نام: محمد

عنوان پایان‌نامه: گروه‌های متناهی با زیرگروه‌های مینیمال c-تکمیل

استاد راهنما: دکتر حمید موسوی

استاد مشاور: دکتر محمد شهریاری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحه:۶۴

کلیدواژه‌ها: c-تکمیل، زیرگروه فیتینگ تعمیم یافته، تشکل، زبرحلپذیر.

چکیده زیرگروه H از گروه متناهی G، c-تکمیل نامیده می‌شود، هرگاه زیرگروه K از G چنان موجود باشد که $G = HK$ و $H \cap K$ مشمول در $Core_G(H)$ باشد. ما ساختار گروه G را بر اساس زیرگروه مینیمال c-تکمیل در G، از زیرگروه فیتینگ تعمیم یافته‌ی یک زیرگروه نرمال G، تعیین می‌کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه . . . . ج

۱ مفاهیم و مفروضات اولیه ۱

۱.۱ مفاهیم مقدماتی نظریه‌ی گروه‌ها ۱

۲.۱ گروه‌های پوچتوان ۶

۳.۱ گروه‌های حلپذیر و زبرحلپذیر ۱۰

۴.۱ گروه‌های c-نرمال، متمم‌دار و c-تکمیل ۱۱

۲ تشکل‌ها ۱۴

۱.۲ تعاریف ۱۴

۲.۲ قضایا ۱۷

۳ c-تکمیلی و زیرگروه فیتینگ تعمیم یافته ۲۳

۱.۳ مقدمات ۲۳

۲.۳ دو خاصیت از زیرگروه‌های فراتینی ۲۷

۴ c-تکمیلی عناصر مرتبه‌ی اول یا چهارم زیرگروه فیتینگ تعمیم یافته با حلپذیری و پوچتوانی گروه G ۳۸

۱.۴ مقدمه ۳۸

۲.۴ ارتباط c-تکمیلی عناصر مرتبه‌ی اول یا چهارم زیرگروه فیتینگ تعمیم یافته با حلپذیری و پوچتوانی گروه G ۳۸

۵ تعمیم به تشکل‌ها **۴۷**
۱.۵ مقدمه ۴۷
۲.۵ تعمیم به یک تشکل دلخواه شامل رده‌ی حلپذیرها ۴۷

مراجع **۵۸**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۶۰**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۶۲**

مقدمه

براي اولين بار بوکلی[۱] در سال ۱۹۷۰ ثابت کرد که یک گروه از مرتبه فرد زبرحلپذیر است، هرگاه زیرگروه‌های مینیمال آن نرمال باشند.

بعد از او سرینیواسان[۲] در سال ۱۹۸۰ نشان داد که گروه G زبرحلپذیر است، هرگاه زیرگروه نرمالی مانند N با گروه خارج‌قسمتی زبرحلپذیر G/N داشته باشد، بطوریکه همه زیرگروه‌های ماکسیمال زیرگروه‌های سیلوی N در G نرمال باشند.

رمضان[۳] در سال ۱۹۹۲ ثابت کرد که اگر G یک گروه حلپذیر و همه زیرگروه‌های ماکسیمال هر زیرگروه سیلوی $F(G)$در G نرمال باشند، آنگاه G زبرحلپذیر است.

وانگ[۴] در سال ۱۹۹۵ نتایج بدست آمده توسط بوکلی (۱۹۷۰) وسرینیواسان (۱۹۸۰) را با جایگزینی عبارت "c-نرمال بودن" به جای عبارت "نرمال بودن" تعمیم داد.

درسال ۱۹۹۸ لی[۵] وگو[۶] نتایج مشابهی را با اتخاذ c-نرمال بودن زیرگروه‌های مینیمال یا ماکسیمال زیرگروه فیتینگ یک گروه حلپذیر بدست آوردند.

وی[۷] در سال ۲۰۰۱ با استفاده از نظریه تشکل‌ها اکثر نتایج بدست آمده توسط نویسندگان قبلی را به تشکل‌های اشباع‌شده، شامل رده گروه‌های زبرحلپذیر $\mathcal{U}$، تعمیم داد. وانگ در سال ۲۰۰۰ ابتکار جالب دیگری را بکار برده و با معرفی و ارائه تعریف واژه زیرگروه‌های

[۱] Buckley
[۲] Srinivasan
[۳] Ramadan
[۴] Wang
[۵] Li
[۶] Gua
[۷] Wei

c-تکمیل در [۱۳] باب جدیدی جهت بررسی ساختار گروه متناهی G معرفی کرد.

این پایان نامه براساس [۱۶] تهیه شده و شامل ۵ بخش می‌باشد. در بخش اول مفاهیم و مقدمات نظریه گروه‌ها که پیش نیاز مطالعه‌ی این پایان نامه می‌باشد، آورده شده است. در بخش دوم به معرفی مبحث تشکل‌ها پرداخته و قضایای مورد نیاز و بکار برده شده در این پایان نامه ملحوظ گردیده است. در فصل سوم علاوه بر بیان دو خاصیت از زیرگروه‌های فراتینی، به ارتباط بین مفهوم c-تکمیلی و حلپذیری گروه G پرداخته شده است. در فصل چهارم مباحث کمی عمیق‌تر شده و پوچتوانی و حلپذیری گروه‌های c-تکمیل بررسی شده است. نهایتا در فصل پنجم به تعمیم قضایای مذکور در فصل‌های قبل از تشکل حلپذیرها به یک تشکل دلخواه که شامل حلپذیرهاست، پرداخته شده است.

فصل ۱
مفاهیم و مفروضات اولیه

همه گروه‌های مد نظر در این پایان‌نامه متناهی در نظر گرفته شده‌اند.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی نظریه‌ی گروه‌ها

نماد گذاری. فرض کنیم $x, y \in G$. در این صورت عنصر $x^{-1}y^{-1}xy$ را با $[x, y]$ نشان می‌دهیم. اگر $H, K \leq G$ آنگاه زیرگروه $\langle [h, k] | h \in H, k \in K \rangle$ را زیرگروه جابجاگر H و K نامیده و آن را با $[H, K]$ نشان می‌دهیم.

نماد گذاری. اگر G یك گروه و M زیرگروه ماکسیمال آن باشد، در این صورت برای نشان دادن این حالت از نماد $M \lessdot G$ استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای غیرخالی از گروه G باشد. مقطع همه‌ی زیرگروه‌های نرمال شامل X را بستار نرمال X نامیده و آن را با $\overline{X}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱. به ازای n زیرگروه H_1، H_2، ... و H_n از G ، زیرگروه جابجاگر $[H_1, H_2, \ldots, H_n]$

را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم:

$$[H_1, H_2, \ldots, H_n] = [[H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}], H_n]$$

تعریف ۳.۱.۱. دنباله‌ی $\{G^{(n)}\}_{n\geq 0}$ از زیرگروه‌های G را چنین تعریف می‌کنیم:

$$G^{(0)} = G, \qquad G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \qquad (n \geq 1)$$

طبق قرار داد، $G^{(1)}$ را با G' نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. p- گروه آبلی متناهی G را مقدماتی گوییم هرگاه مرتبه‌ی هر عضو غیرهمانی آن عدد اول p باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و $N \leqslant G$. در اینصورت N را زیرگروه نرمال مینیمال G گویند هرگاه $N \trianglelefteq G$ و اگر $H \leqslant N$ و $H \trianglelefteq G$ آنگاه $H = N$ یا $H = 1$. همچنین زیرگروه تولیدشده توسط زیرگروه‌های نرمال مینیمال G را با $Soc(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۶.۱.۱. گروه G را یك PN- گروه گویند هرگاه هر زیرگروه مینیمال آن در G نرمال باشد.

تعریف ۷.۱.۱. زیرگروه H از گروه G را ناهنجار[۱] گوییم هرگاه به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $g \in \langle H, H^g \rangle$.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{X}$ رده‌ای از گروه‌ها باشد. گروه G را $\mathcal{X}$-بحرانی[۲] گوییم هرگاه $G \notin \mathcal{X}$، ولی هر زیرگروه حقیقی G به $\mathcal{X}$ متعلق باشد.

[۱] abnormal
[۲] critical

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت کوچکترین عدد صحیح و مثبت n که به ازای هر $x \in G$ داشته باشیم $x^n = 1$ vh با نماد $exp(G)$ نشان می‌دهند و نمای می‌خوانند. اگر چنین nای موجود نباشد، $exp(G) = \infty$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم $H \leq G$. زیرگروه H از G را مشخص گوییم هرگاه به ازای هر $\tau \in Aut(G)$، $H^\tau \leq H$. در این صورت می‌نویسیم $H \text{ ch } G$. واضح است که هر زیرگروه مشخص G یک زیرگروه نرمال G است.

قضیه ۱۱.۱.۱. *(سیلو) فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه‌ی n باشد که در آن $n = p^\alpha n'$، $\alpha \geq 0$ و p عدد اولی است که $p \nmid n'$. در این صورت داریم:*

i) G حداقل یک p- زیرگروه از مرتبه‌ی p^α است که به آن p- زیرگروه سیلو گویند؛

ii) هر p- زیرگروه مشمول در یک p- زیرگروه سیلوی G است؛

iii) هر دو p- زیرگروه سیلوی G مزدوجند؛

iv) تعداد همه‌ی p- زیرگروه‌های سیلوی G، همنهشت 1 به پیمانه‌ی p است.

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۷.۱.۴ رجوع شود. □

قضیه ۱۲.۱.۱. *(استدلال فراتینی) فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $H \lhd G$. در اینصورت اگر $P \in Syl_p(G)$، آنگاه $G = \mathcal{N}(P)H$.*

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۱۲.۱.۴ رجوع شود. □

لم ۱۳.۱.۱. *فرض کنیم $A, B \leq G$ ، که در آن G یک گروه دلخواه است. در این صورت*

i) $[A, B] = [B, A]$ ؛

ii) اگر $A_1 \leq A$ و $B_1 \leq B$ آنگاه $[A_1, B_1] \leq [A, B]$ ؛

iii) اگر $A \trianglelefteq G$ آنگاه $[A, B] \leq A$ ؛

iv) اگر $A \trianglelefteq G$ و $B \trianglelefteq G$ آنگاه $[A, B] \trianglelefteq G$ ؛

v) $[A, B] \leq B$ اگر و تنها اگر $A \leq \mathcal{N}_G(B)$ ؛

vi) اگر $A \leq B$ و $A \trianglelefteq G$ آنگاه شرط لازم و کافی برای آن که $B/A \leq Z(G/A)$ آن است که $[G, B] \leq A$.

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۱.۱.۱۰ رجوع شود. □

قضیه ۱۴.۱.۱. [نرمالساز- مرکزساز] *فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. در این صورت داریم:*

(i) $\mathcal{C}_G(H) \trianglelefteq \mathcal{N}_G(H)$ ؛

(ii) گروه $\mathcal{N}_G(H)/\mathcal{C}_G(H)$ با زیرگروهی از $Aut(H)$ یکریخت است.

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۶.۳.۲ رجوع شود. □

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\pi(G)$ نشان دهنده‌ی مجموعه عامل‌های اول $|G|$ باشد. فرض کنیم $\pi \subseteq \pi(G)$ در این صورت زیرگروه K از G را یک π-زیرگروه خوانیم هرگاه $\pi(K) \subseteq \pi$ و π'-زیرگروه خوانیم هرگاه $\pi(K) \cap \pi = \varnothing$. اگر $\pi = \{p\}$، π-زیرگروه را با p-زیرگروه نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۶. بزرگترین π-زیرگروه نرمال G را با $O_\pi(G)$ نشان می‌دهیم. اگر $\pi = \{p\}$ در این صورت $O_\pi(G)$ را با $O_p(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۷. کوچکترین زیرگروه نرمال G مانند N را که G/N یک π-زیرگروه باشد، با $O^\pi(G)$ نشان می‌دهیم. در صورتی که $\pi = \{p\}$، $O^\pi(G)$ را با $O^p(G)$ نشان می‌دهیم. حال با فرض $X = \{$ G p'-عضوهای $\}$ داریم $O^p(G) = \overline{X}$. زیرا $G/O^p(G)$ یك p- گروه است و در نتیجه هر p'-عضوی متعلق به $O^\pi(G)$ است. بنابراین $X \subseteq O^p(G)$ و چون $O^p(G) \lhd G$ لذا $\overline{X} \leqslant O^p(G)$. براي عكس مطلب چون $G/\overline{X}$ يك p- گروه است لذا طبق تعریف داریم $O^p(G) \leqslant \overline{X}$. در نتیجه $O^p(G) = \overline{X}$.

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنیم G یک p-گروه باشد. در این صورت به ازای هر $i \geq 0$، زیرگروه $\Omega_i(G)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_i(G) = \langle \{g | g \in G, g^{p^i} = 1\} \rangle.$$

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنید G یک گروه و p یک عدد اول باشد. تعریف می‌کنیم :

$$\mathcal{P}_p(G) = \{x \in G \mid |x| = p\}, \quad \mathcal{P}(G) = \cup_{p \in \pi(G)} \mathcal{P}_p(G),$$

$$\mathcal{P}_4(G)=\{x\in G \mid |x|=4\},\quad \mathcal{P}^*(G)=\mathcal{P}_4(G)\cup\mathcal{P}(G).$$

قضیه ۲۰.۱.۱. *فرض کنید M و N دو زیرگروه نرمال G باشند که $N\lhd M$ و $N\leqslant\Phi(G)$. اگر M/N پوچتوان باشد آنگاه M نیز پوچتوان است.*

برهان. به [۸]، قضیه‌ی ۳.۵ رجوع شود. □

قضیه ۲۱.۱.۱. *فرض کنید G یک p- گروه و α یک خودریختی G باشد که مرتبه آن نسبت به p اول است. اگر*

۱. *به ازای $p>2$، α همه‌ی اعضای مرتبه p گروه G را ثابت نگه دارد.*

۲. *به ازای $p=2$، α همه‌ی اعضای مرتبه ۲ یا ۴ گروه G را ثابت نگه دارد.*

در این صورت $\alpha=1$.

برهان. به [۸]، قضیه‌ی ۱۲.۵ رجوع شود. □

۲.۱ گروه‌های پوچتوان

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری زیر نرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های G مانند

$$1=G_0\leq G_1\leq\cdots\leq G_r=G$$

به طوری که به ازای هر i که $1 \le i \le r$، $G_{i-1} \lhd G_i$. گاهی سری زیرنرمال فوق را به صورت زیر هم نشان می‌دهند:

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_r = G.$$

تعریف ۲.۲.۱. سری

$$1 = G_0 \le G_1 \le \cdots \le G_r = G$$

را یک سری نرمال G گوییم هرگاه به ازای هر i، $G_i \trianglelefteq G$. همچنین سری نرمال فوق را سری مرکزی G گوییم هرگاه به ازای هر i که $1 \le i \le r$،

$$G_i/G_{i-1} \le Z(G/G_{i-1}).$$

تعریف ۳.۲.۱. گروه G را پوچتوان نامند در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد.

قضیه ۴.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه غیربدیهی متناهی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر دو به دو معادلند:*

i) G پوچتوان است؛

ii) هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است؛

iii) هر p- زیرگروه سیلوی G نرمال است؛

iv) هر دو عضو G که مرتبه‌ی آنها نسبت به هم اول‌اند، تعویض‌پذیرند؛

v) G *حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود است.*

برهان. به [۹]، قضیه‌ی ۸.۱.۱۰ رجوع شود. $\square$

قضیه ۵.۲.۱. *حاصلضرب مستقیم هر تعداد متناهی از گروه‌های پوچتوان، پوچتوان است.*

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۵.۱.۱۰ رجوع شود. $\square$

قضیه ۶.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه پوچتوان و H زیرگروهی واقعی از آن باشد. در این صورت $H \neq N_G(H)$.*

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۶.۱.۱۰ رجوع شود. $\square$

نتیجه ۷.۲.۱. *اگر گروه پوچتوان G زیرگروه ماکسیمالی مانند M داشته باشد، $M \lhd G$ و G/M یک گروه دوری از مرتبه‌ی یک عدد اول است.*

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۷.۱.۱۰ رجوع شود. $\square$

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه پوچتوان باشد و $N \trianglelefteq G$. در این صورت اگر $N \neq 1$ آنگاه $N \cap Z(G) \neq 1$.*

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۵.۲.۱۰ رجوع شود. $\square$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه تولیدشده با همه‌ی زیرگروه‌های نرمال پوچتوان G را زیرگروه فیتینگ G می‌نامند و آن را با $F(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۰.۲.۱. گروه متناهی G شبه پوچتوان نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر عامل اصلی H/K از G داشته باشیم:

$$C_G(H/K)H = G.$$

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. بزرگترین زیرگروه شبه پوچتوان نرمال G را زیرگروه فیتینگ تعمیم یافته G نامیده و با $F^*(G)$ نشان می‌دهیم.

در حقیقت $F^*(G)$ یک زیرگروه مهم G بوده و تعمیم طبیعی $F(G)$ است. تعریف و خواص مهم $F^*(G)$ در فصل پنج از مرجع [۹] آمده است.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. مقطع همه‌ی زیرگروه‌های ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G گوییم و آن را با $\Phi(G)$ نشان می‌دهیم. هرگاه G فاقد زیرگروه ماکسیمال باشد، بر طبق قرارداد، $\Phi(G) = G$.

لم ۱۳.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه باشد و $C \subseteq G$ و $D \subseteq \Phi(G)$. در این صورت اگر $G = \langle C, D\rangle$، آنگاه $G = \langle C\rangle$.*

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۱.۳.۱۰ رجوع شود. □

لم ۱۴.۲.۱. *فرض کنیم $G \lhd H$. در این صورت داریم $\Phi(H) \leqslant \Phi(G)$.*

برهان. فرض کنیم $\Phi(H) \nleqslant \Phi(G)$. در این صورت زیرگروه ماکسیمال M از G چنان موجود است که $\Phi(H) \nleqslant M$ و $G = \Phi(H)M$. داریم

$$\Phi(H)(M \cap H) = H \cap M\Phi(H) = H \cap G = H.$$

در نتیجه خواهیم داشت $H = H \cap M$ یا به طور معادل $H \leqslant M$. اما $\Phi(H) \leqslant H \leqslant M$ و در نتیجه $G = M$ که تناقض است. در نتیجه $\Phi(H) \leqslant \Phi(G)$. $\square$

قضیه ۱۵.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت G پوچتوان است اگر و تنها اگر $G' \leq \Phi(G)$.*

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۵.۳.۱۰ رجوع شود. $\square$

قضیه ۱۶.۲.۱. *فرض کنیم G یک p-گروه متناهی باشد. در این صورت*

$$\Phi(G) = G'G^p.$$

از این رو $G/\Phi(G)$ آبلی مقدماتی است.

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۶.۳.۱۰ رجوع شود. $\square$

قضیه ۱۷.۲.۱ (قضیه‌ی پایه‌ی برنساید). *فرض کنیم G یک p-گروه متناهی و $|G/\Phi(G)| = p^r$. در این صورت هر مجموعه‌ی مولد G با t عضو، زیرمجموعه‌ای با r عضو دارد که G را تولید می‌کند و $d(G) = r$.*

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۸.۳.۱۰ رجوع شود. $\square$

۳.۱ گروه‌های حلپذیر و زبرحلپذیر

تعریف ۱.۳.۱. گروه G را حلپذیر نامند در صورتی که یک سری زیرنرمال مانند

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_r = G$$

داشته باشد به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، گروه G_i/G_{i-1} آبلی باشد.

تعریف ۲.۳.۱. گروه G را زبرحلپذیر نامند در صورتی که یک سری نرمال مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$$

داشته باشد به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، گروه G_i/G_{i-1} دوری باشد.

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنیم G یک گروه باشد و $N \trianglelefteq G$. در این صورت اگر N و G/N هر دو حلپذیر باشند، آنگاه G حلپذیر است.*

برهان. به [۱]، قضیه‌ی ۳.۱.۱۱ رجوع شود. □

قضیه ۴.۳.۱. (هوپرت). *گروه متناهی G زبرحلپذیر است اگر و تنها اگر اندیس هر زیرگروه ماکسیمال G عددی اول باشد.*

برهان. به[۸] رجوع شود. □

نتیجه ۵.۳.۱. *گروه متناهی G زبرحلپذیر است اگر و تنها اگر $G/\Phi(G)$ زبرحلپذیر باشد.*

در سراسر این پایان‌نامه کلاس همه‌ی گروه‌های زبرحلپذیر را با $\mathcal{U}$ و کلاس همه‌ی گروه‌های پوچتوان را با $\mathcal{N}$ نشان می‌دهیم.

۴.۱ گروه‌های c-نرمال، متمم‌دار و c-تکمیل

تعریف ۱.۴.۱. زیرگروه H از گروه متناهی G، c-نرمال نامیده می‌شود، هرگاه زیرگروه نرمال N از G چنان موجود باشد که $G = HN$ و $H \cap N \leq H_G = Core_G(H)$.

تعریف ۲.۴.۱. زیرگروه H از گروه متناهی G، متمم‌دار نامیده می‌شود، هرگاه زیرگروه K از G چنان موجود باشد که $G = HK$ و $H \cap K = 1$.

تعریف ۳.۴.۱. زیرگروه H از گروه متناهی G، c-تکمیل نامیده می‌شود، هرگاه زیرگروه K از G چنان موجود باشد که $G = HK$ و $H \cap K \leq H_G$ و K ، c-مکمل H در G نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید x عضوی از G باشد. گوییم x در G، c-تکمیل است هرگاه $\langle x \rangle$ در G، c-تکمیل باشد.

با توجه به تعریف بلافاصله نتیجه می‌شود که هر زیرگروه متمم‌دار یک زیرگروه c-تکمیل است. زیرا اگر در گروه متناهی G، H یک زیرگروه متمم‌دار باشد در اینصورت به ازای همان زیرگروه K که $G = HK$ داریم: $H \cap K = 1 \leqslant H_G$. همین طور، c-تکمیل بودن یک تعمیم طبیعی از c-نرمال بودن است. زیرا اگر در گروه متناهی G، H یک زیرگروه c-نرمال باشد در اینصورت به ازای همان زیرگروه نرمال N که $G = HN$، $H \cap N \leqslant H_G$ لذا H، c-تکمیل نیز می‌باشد.

ولی عکس هیچ کدام از مطالب بالا برقرار نیست. یعنی c-تکمیل بودن، متمم‌دار بودن یا c-نرمال بودن را نتیجه نمی‌دهد. در مرجع [۱۳] به مثالهایی در این مورد اشاره شده است. در اینجا به عنوان یک مثال ساده A_5 را بیان می‌کنیم. چون علیرغم اینکه A_5 در خودش c-تکمیل است، ولی c-نرمال نمی‌باشد. زیرا A_5 ساده است.

برای نشان دادن اینکه زیرگروه متمم‌دار یک زیرگروه، c-تکمیل نیست، می‌توان $\Phi(G)$

را مثال زد. فرض کنید p یک عدد اول و G یک p-گروه دوری از مرتبه بیشتر از p باشد. در اینصورت $\Phi(G)$ تنها زیرگروه ماکسیمال G است و متمم‌دار نمی‌باشد. در حالی که $\Phi(G)$ در G، c-تکمیل است. زیرا در G نرمال است و G، c-مکمل $\Phi(G)$ در G می‌باشد.

در مرجع [۱۴] وانگ برخی از نتایج c-نرمال بودن زیرگروه‌ها را اثبات کرده است. در اینجا نتایج اصلی مرجع [۱۴] را به c-تکمیل بودن تعمیم داده، به بحث در زمینه‌ی تشکل‌ها خواهیم پرداخت.