چکیده

R حلقه دلخواه و یکدار است. فرض کنید $Spec_r(R)$ ($Spec(R)$ ، $Max_r(R)$ ، $Prim_r(R)$) مجموعه همه ایده‌آل‌های اول راست(اول چپ، بیشین راست، اولیه راست) از R و $U_r(eR)=\{P\in Spec_r(R)\mid e\notin P\}$ باشد. همچنین فرض کنید $\mathscr{A}=\bigcup_{P\in \mathrm{Prim}_r(R)} Spec_r^P(R)$ باشد، جایی که $Spec_r^P(R)=\{Q\in Spec_r(R)\mid (R/Q)_r^{\perp}=P\}$. در این پایان‌نامه ما به بررسی ارتباط برخی خواص حلقه و شرایط توپولوژیک روی $Spec_r(R)$ و خواص توپولوژی زاریسکی ضعیف روی $\mathscr{A}$ خواهیم پرداخت. حلقه R را آبلی نامیم هرگاه همه عناصر خودتوان آن مرکزی باشند و آن را دو- اول‌گون نامیم اگر همه عناصر پوچتوان آن مشمول در رادیکال اول R باشند. نشان خواهیم داد که برای حلقه آبلی R ، یک دوسویی بین مجموعه همه خودتوان‌های R ومجموعه‌های باز- بسته در $Spec_r(R)$ وجود دارد. همچنین نشان می‌دهیم حلقه‌های π- منظم و پاک را می‌توان با خواص توپولوژیک طیف اول آنها مشخص کرد. نتایج زیر برای حلقه R بدست می‌آید:

الف) هر ایده‌آل بیشین R دوطرفه است اگروتنهااگر $\mathscr{A}$ فضایی با توپولوژی زاریسکی باشد اگروتنهااگر برای هر $Q\in\mathscr{A}$، Q به عنوان یک ایده‌آل راست در R تحویل ناپذیر باشد.

ب) برای هر مجموعه باز- بسته مانند U در $Spec_r(R)$ ، عنصر خودتوان e در R وجود دارد به قسمی که $U=U_r(eR)$.

ج) اگر R حلقه آبلی یا دو- اول‌گون باشد، آنگاه برای هر عنصر خودتوان e در R ، $U_r(eR)$مجموعه‌ای باز- بسته در $Spec_r(R)$ است.

د) $Spec_r(R)$ همبند است اگروتنهااگر $Spec(R)$ همبند باشد.

مقدمه

در این پایان‌نامه تمامی حلقه‌ها یکدار و مدول‌ها یکانی هستند.

ایده‌آل راست(چپ، دوطرفه) سره P از حلقه R را یک ایده‌آل اول راست(اول چپ، اول) گوئیم هرگاه از $aRb \subseteq P$ نتیجه بگیریم $a \in P$ یا $b \in P$. فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$ مدول راست باشد. قرار دهید $M_r^{\perp} = \{x \in R \mid Mx = 0\}$. به وضوح برای هر زیرمدول N از M، $(M/N)_r^{\perp} = \{x \in R \mid Mx \subseteq N\}$. زیرمدول سره K از M را اول نامیم هرگاه برای $m \in M$ و $x \in R$ ، اگر $mRx \subseteq K$ باشد آنگاه $m \in K$ یا $x \in (M/N)_r^{\perp}$. مجموعه همه زیرمدول‌های اول M را با $Spec_r(M)$ نشان داده و به آن طیف راست M گوئیم. واضح است که ایده‌آل اول راست P از حلقه R، زیرمدول اولی از R_R می‌باشد.

فرض کنید M یک $R-$ مدول راست، N زیرمدولی از آن و $U_r(N) = \{K \in Spec_r(R) \mid N \not\subset K\}$ باشد. اگر $\zeta(M)$ گردایه همه زیرمجموعه‌های به شکل $U = U_r(N)$ از طیف راست M باشد، آنگاه شامل $Spec_r(R)$ و مجموعه تهی است. همچنین تحت اجتماع شمارا بسته می‌باشد. چنانچه $\zeta(M)$ تحت اشتراک متناهی نیز بسته باشد، M را R - مدول برتر راست نامیم. در این حالت $Spec_r(M)$ در اصول موضوعه یک فضای توپولوژیک برای مجموعه‌های باز صدق می‌کند و گوئیم M یک R - مدول راست با توپولوژی زاریسکی است. همچنین گوئیم R یک حلقه برتر راست است، هرگاه R_R یک R - مدول برتر راست باشد.

فرض کنید R یـک حلقـه باشـد. اگـر $\zeta(R)$ ، گردایـه همـه زیرمجموعـه‌هـای بـه شـکل $U=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(\bigcap_{i=1}^{S_\alpha}U_r(L_i^{S_\alpha}))$ از $Spec_r(R)$ باشد(جایی که $L_i^{S_\alpha}$ ایده‌آل راستی از R و S_α عدد صـحیح مثبتی است)، آنگاه شامل مجموعه تهی و $Spec_r(R)$ مـی‌باشـد. همچنـین تحـت اجتمـاع شـمارا و اشتراک متناهی بسته اسـت. لـذا $Spec_r(R)$ در اصـول موضـوعه یـک فضـای توپولوژیـک بـرای مجموعه‌های باز صدق می‌کند. توپولوژی حاصل را توپولـوژی زاریسـکی ضـعیف نـامیم. اگـر R حلقه‌ای باشد که دارای ایده‌آل بیشین راستی است که دوطرفه نیست، آنگاه $Spec_r(R)$ فضایی بـا توپولوژی زاریسکی ضعیف است اما فضایی با توپولوژی زاریسکی نمی‌باشد.

در فصل اول نشان خواهیم داد کـه R حلقـه‌ای اسـت کـه هـر ایـده‌آل بیشـین راسـت آن دوطرفـه اسـت اگروتنهـااگر $\mathcal{A}=\bigcup_{P\in \mathrm{Prim}_r(R)}Spec_r^P(R)$ فضـایی بـا توپولـوژی زاریسـکی باشـد اگروتنهااگر برای هر $Q\in\mathcal{A}$ ، Q به عنوان ایده‌آلی راست از R تحویل‌ناپـذیر باشـد. حلقـه R را گلفاند نامیم هرگاه برای هر جفت از ایده‌آل‌های بیشین راست و متمایز M_1 و M_2 از R، ایده‌آل-های I_1 و I_2 از R وجـود داشـته باشـند بـه قسـمی کـه $I_1\not\subset M_1$ ، $I_2\not\subset M_2$ و $I_1I_2=0$. اگـر $J(R)$ رادیکال ژاکوبسـون R باشـد، آنگـاه $R/J(R)$ ، گلفانـد اسـت اگروتنهـااگر $\mathcal{A}$ فضـایی هاسدورف باشد.

حلقه R یک pm – حلقه راست(pm – حلقه چپ، pm – حلقه) نامیم هرگاه هر ایـده‌آل اول راست(اول چپ، اول) آن مشمول در ایده‌آل بیشین راسـت(بیشـین چـپ، بیشـین) منحصـر بـه فردی باشد.

در فصل دوم مثال‌هایی از R - مدول‌های برتر راست ارائه می‌دهیم و ثابت خواهیم کرد حلقه منظم R، گلفاند است اگروتنهااگر آبلی باشد اگروتنهااگر حلقه برتر راست یا چپ باشد اگروتنهااگر pm - حلقه راست یا چپ باشد. همچنین نشان می‌دهیم R قویاً منظم است اگروتنهااگر آبلی منظم باشد.

عنصر خودتوان e را در R باز- بسته نامیم، هرگاه برای هر ایده‌آل اول P از R، اگر $e \notin P$ آنگاه $1-e \in P$. حلقه R را باز- بسته نامیم اگر همه خودتوان‌های آن باز- بسته باشند. $Spec_r(R)$ صفربعدی است هرگاه پایه‌ای متشکل از مجموعه‌های باز- بسته داشته باشد. در فصل سوم ثابت می‌کنیم، حلقه جابجایی R منظم است اگروتنهااگر نیمه- اول و $Spec(R)$ صفربعدی باشد. همچنین حلقه جابجایی R پاک است اگروتنهااگر $Spec(R)$ قویاً صفربعدی باشد. در نهایت نشان می‌دهیم برای حلقه آبلی R، مشبکه بولی متشکل از عناصر خودتوان در R و مشبکه بولی شامل مجموعه‌های باز- بسته در $Spec_r(R)$ یکریخت هستند. اگر R حلقه‌ای دلخواه باشد برای هر مجموعه باز در $Spec_r(R)$ ($MinSpec(R) \cup Max_r(R)$، $Spec(R)$، $MinSpec(R) \cup Max(R)$)، خودتوان e در R وجود دارد به قسمی که $U = U_r(eR) \cap \mathcal{A} = V_r((1-e)R) \cap \mathcal{A}$، جایی که $\mathcal{A}$ ، $Spec_r(R)$ ($MinSpec(R) \cup Max_r(R)$ ، $Spec(R)$ ، $MinSpec(R) \cup Max(R)$) است.

گزاره‌های زیر در حلقه R معادلند:

الف) $Spec(R)$ همبند است.

ب) $Spec_r(R)$ همبند است.

ج) $Spec_l(R)$ همبند است.

د) تنها خودتوان‌های باز- بسته در R ، 0 و 1 هستند.

ه) $MinSpec(R) \cup Max(R)$ همبند است.

و) $MinSpec(R) \cup Max_r(R)$ همبند است.

فصل اول

طیف حلقه‌ها و مدول‌ها

تعریف ۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. ایده‌آل راست(چپ، دوطرفه) سره P از R را ایده-آل اول راست(اول چپ، اول) گوئیم هرگاه

$$\forall a,b \in R\,; aRb \subseteq P \Rightarrow a \in P \text{ یا } b \in P\,.$$

همچنین ایده‌آل P را کاملاً اول گوئیم هرگاه

$$\forall a,b \in R\,; ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ یا } b \in P\,.$$

بدیهی است که ایده‌آل‌های کاملاً اول، اول و ایده آل های اول، اول راست وچپ هستند.

نمادگذاری: مجموعه همه ایده‌آل‌های راست (چپ، دو طرفه)حلقه R را با $Id_r(R)\,(Id_l(R), Id_2(R))$ و مجموعه همه ایده‌آل‌های اول راست (اول چپ، اول) را با $Spec_r(R)\,(Spec_l(R), Spec(R))$ و ایده‌آل‌های بیشین راست (بیشین چپ، بیشین) را با $Max_r(R)\,(Max_l(R), Max(R))$ و ایده‌آل‌های اول کمین حلقه R را با $MinSpec(R)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۲.۱ فرض کنید R یک حلقه و $M \in Max_r(R)\,(M \in Max_l(R))$. دراین صورت $M \in Spec_r(R)\,(M \in Spec_l(R))$.

اثبات: فرض کنید برای $b \in R$ و a ، $aRb \subseteq M$ باشد ولی $a \notin M$. چون M بیشین است، لذا

$$\begin{aligned} R = M + aR &\Rightarrow 1 = m + ar\ (\exists m \in M, r \in R) \\ &\Rightarrow b = mb + arb \in M\,. \end{aligned}$$

بنابر این $M \in Spec_r(R)$.$\square$

فرض کنید R یک حلقه، M یک $R-$ مدول راست و N زیرمدولی از M باشد.قرار دهید $M_r^{\perp}=\{x\in R \mid Mx=0\}$. به وضوح $(M/N)_r^{\perp}=\{x\in R \mid Mx\subseteq N\}$.

تعریف ۳.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول راست باشد. زیر مدول سره K از M را اول گوئیم هرگاه برای $m\in M$ و $x\in R$، اگر $mRx\subseteq K$ باشد آنگاه $m\in K$ یا $x\in (M/K)_r^{\perp}$. مجموعه زیرمدول‌های اول M را با $Spec_r(M)$ نشان داده و به آن طیف راست M گوئیم. زیرمدول K را $P-$ اول راست گوئیم هرگاه $(M/K)_r^{\perp}=P$. مجموعه زیرمدول‌های $P-$ اول راست از M را با $Spec_r^P(M)$ نشان می دهیم.

مثال ۴.۱ فرض کنید p عددی اول باشد.دراین صورت $\{0\}$ تنها زیرمدول اول از $\mathbf{Z}-$ مدول $\mathbf{Z}_p$ است.

برهان: [۱۹،شماره مثال].

تعریف ۵.۱ $R-$ مدول راست و ناصفر M را مدول اول می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر N از M، $M_r^{\perp}=N_r^{\perp}$ باشد.

مثال ۶.۱ فرض کنید R یک حوزه صحیح یکدار و ناصفر باشد. دراین صورت R_R یک مدول اول است.

گزاره ۷.۱ فرض کنید $R-$ مدول M اول باشد. دراین صورت $M_r^{\perp}$ ایده‌آلی اول از حلقه R بوده وبه آن ایده‌آل اول وابسته M_R گوئیم.

اثبات: واضح است که $M_r^{\perp}$ نسبت به جمع بسته است. فرض کنید $x\in M_r^{\perp}$ و $r\in R$ باشد. داریم

$$M(rx)=(Mr)x \subseteq Mx=0 \Rightarrow rx \in M_r^{\perp}.$$
$$M(xr)=(Mx)r=0 \Rightarrow xr \in M_r^{\perp}.$$

بنابراین $M_r^{\perp}$ ایده‌آلی دوطرفه است. با توجه به ناصفر بودن M، این ایده‌آل سره است. حال نشان می‌دهیم $M_r^{\perp}$ اول است. فرض کنید برای $b \in R$ و a، داشته باشیم

$$\begin{aligned} aRb \subseteq M_r^{\perp} &\Rightarrow ab \in M_r^{\perp}, Ma \neq 0 \\ &\Rightarrow (Ma)b=0, Ma \neq 0 \\ &\Rightarrow b \in (Ma)_r^{\perp}. \end{aligned}$$

بنابراین $M_r^{\perp}$ ایده‌آلی اول است.□

گزاره ۸.۱ فرض کنید M یک $R-$مدول راست و K زیر مدولی از M باشد. دراین صورت $K \in Spec_r(M)$ اگروتنهااگر M/K مدولی اول باشد.

اثبات: فرض کنید K زیرمدول اولی از M باشد. لذا K سره و M/K ناصفر است. فرض کنید T زیرمدول ناصفری از M/K باشد. پس $T=N/K$ که N زیرمدولی از M و به طور سره شامل K است. بنابراین

$$\begin{aligned} x \in (N/K)_r^{\perp} &\Rightarrow Nx \subseteq K \\ &\Rightarrow x \in (M/K)_r^{\perp}; (K \in Spec_r(M)) \\ &\Rightarrow (N/K)_r^{\perp} \subseteq (M/K)_r^{\perp}\ ;(*) \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} x \in (M/K)_r^{\perp} &\Rightarrow Mx \subseteq K \\ &\Rightarrow Nx \subseteq K; (Nx \subseteq Mx) \\ &\Rightarrow x \in (N/K)_r^{\perp} \\ &\Rightarrow (M/K)_r^{\perp} \subseteq (N/K)_r^{\perp}\ (**) \end{aligned}$$

با توجه به (*)و (**) داریم

$$(M/K)_r^{\perp} = (N/K)_r^{\perp} \ .$$

بنابراین M/K مدولی اول است.

برعکس، فرض کنید M/K مدولی اول باشد. لذا K زیرمدول سره‌ای از M است. برای $m \in M$ و $x \in R$، فرض کنید $mRx \subseteq K$ و $m \notin K$ دراین صورت

$$K \subset K + mR \Rightarrow ((K+mR)/K)_r^{\perp} = (M/K)_r^{\perp} \ .$$

از طرفی

$$\begin{aligned}(K+mR)x = Kx + mRx \subseteq K &\Rightarrow x \in ((K+mR)/K)_r^{\perp} \\ &\Rightarrow x \in (M/K)_r^{\perp} \\ &\Rightarrow K \in Spec_r(M) \ . \square\end{aligned}$$

تعریف ۹.۱ حلقه R را یک pm – حلقه راست(pm – حلقه چپ، pm – حلقه) نامیم هرگاه هر ایده‌آل اول راست(اول چپ، اول) آن مشمول در یک ایده‌آل بیشین راست(بیشین چپ،بیشین) منحصر به فرد باشد.

مثال ۱۰.۱ هر حلقه موضعی یک pm – حلقه است.

فرض کنید M یک R – مدول راست و N زیرمدولی از M باشد. قرارمی دهیم

$$U_r(N) = \{K \in Spec_r(M) \mid N \not\subset K\}$$
$$\zeta(M) = \{U_r(N) \mid N \le M\}.$$

بدیهی است که $\zeta(M)$ شامل مجموعه تهی و $Spec_r(M)$ می‌باشد، زیرا $U_r(\{0\}) = \phi$ و $U_r(M) = Spec_r(M)$.

گزاره ۱.۱۱ فرض کنید M یک R - مدول راست و $N_\alpha(\alpha \in \Gamma)$، خانواده‌ای از زیرمدول‌های M باشد. دراین صورت $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_r(N_\alpha) = U_r(\sum_{\alpha\in\Gamma} N_\alpha)$. لذا $\zeta(M)$ تحت اجتماع دلخواه بسته است.

اثبات:

$$K \in \bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_r(N_\alpha) \Leftrightarrow \exists \beta \in \Gamma; K \in U_r(N_\beta)$$

$$\Leftrightarrow \exists \beta \in \Gamma; N_\beta \not\subset K$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\alpha\in\Gamma} N_\alpha \not\subset K$$

$$\Leftrightarrow K \in U_r(\sum_{\alpha\in\Gamma} N_\alpha). \square$$

تعریف ۱.۱۲ گوئیم R - مدول راست M برتر راست است، هرگاه $\zeta(M)$ تحت اشتراک متناهی بسته باشد. به عبارت دیگر برای هر جفت از زیرمدول‌های L_1 و L_2 ، زیرمدولی از M مانند H وجود داشته باشد به قسمی که $U_r(H) = U_r(L_1) \bigcap U_r(L_2)$. دراین صورت $\zeta(M)$ در اصول موضوعه یک فضای توپولوژیک برای مجموعه‌های باز صدق می‌کند. توپولوژی حاصل را توپولوژی زاریسکی نامیم. همچنین گوئیم R ، یک حلقه برتر راست است، هرگاه R_R یک R - مدول برتر راست باشد.

لم ۱.۱۳ فرض R یک حلقه، M ایده‌آل بیشینی از R و $r^{-1}M = \{x \in R \mid rx \in M\}$ باشد. دراین صورت اگر $r \in M$ ، آنگاه $r^{-1}M \in Max_r(R)$.

اثبات:به سادگی دیده می‌شود که $r^{-1}M$ ایده‌آل راست سره‌ای از حلقه R است. فرض کنید

$r^{-1}M$ بیشین نباشد. چون R یکدار است، لذا به طور سره مشمول در ایده‌آلی بیشین مانند M' است. بنابراین

$$\begin{aligned}
\exists s \in M' \setminus r^{-1}M &\Rightarrow rs \notin M \\
&\Rightarrow R = rsR + M \\
&\Rightarrow \exists t \in R, m \in M ; r = rst + m \\
&\Rightarrow r(1-st) = m \in M \\
&\Rightarrow 1-st \in r^{-1}M \\
&\Rightarrow 1 \in sR + r^{-1}M .
\end{aligned}$$

از طرفی $sR + r^{-1}M \subseteq M'$ ولذا $1 \in M'$، که تناقض است. بنابراین $r^{-1}M$ ایده‌آل بیشینی از حلقه R است.□

لم ۱.۱۴ فرض کنید R یک حلقه و $P \in Spec(R)$ باشد. هرگاه $(i \in I) P_i \in Spec_r^P(R)$ آنگاه $\bigcap_{i \in I} P_i \in Spec_r^P(R)$.

اثبات: به وضوح اشتراک دلخواه از ایده‌آل‌های راست، ایده‌آلی راست است. لذا $\bigcap_{i \in I} P_i$ ایده‌آل راستی از حلقه R است. ابتدا نشان می‌دهیم $(R/(\bigcap_{i \in I} P_i))_r^{\perp} = P$. داریم

$$\begin{aligned}
y \in P &\Leftrightarrow \forall j \in I ; y \in (R/P_j)_r^{\perp} \\
&\Leftrightarrow \forall j \in I ; Ry \subseteq P_j \\
&\Leftrightarrow Ry \subseteq \bigcap_{i \in I} P_i \\
&\Leftrightarrow y \in (R/(\bigcap_{i \in I} P_i))_r^{\perp}.
\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم $\bigcap_{i \in I} P_i$ ایده‌آل اول است. فرض کنید $a, b \in R$ باشد. داریم

$$aRb \subseteq \bigcap_{i \in I} P_i \Rightarrow \forall j \in I ; aRb \subseteq P_j .$$

حالت اول. اگر برای هر $j \in I$ ، $a \in P_j$ آنگاه $a \in \bigcap_{i \in I} P_i$.

حالت دوم. اگر $j \in I$ باشد که، $a \notin P_j$ آنگاه $b \in (R/P_j)_r^{\perp}$.

لذا $\bigcap_{i \in I} P_i$ ایده‌آلی اول است.□

فرض R یک حلقه و $I \in Id_r(R)$ باشد. بزرگترین ایده‌آل دوطرفه مشمول در I را با I° نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱ فرض R یک حلقه باشد. اشتراک همه ایده‌آل‌های اول حلقه R را رادیکال اول حلقه نامیده و با $N(R)$ نشان می دهیم.

گزاره ۱۶.۱ فرض R یک حلقه باشد. دراین صورت رادیکال اول حلقه R با اشتراک همه ایده‌آل های اول راست حلقه R برابر است.

اثبات: داریم

$$N(R) = \bigcap_{P' \in Spec(R)} P' \subseteq \bigcap_{P^{\circ} \subseteq P, P \in Spec_r(R)} P^{\circ} \subseteq \bigcap_{P \in Spec_r(R)} P .$$

از طرفی هر ایده‌آل اول، اول راست نیز هست پس

$$\bigcap_{P \in Spec_r(R)} P \subseteq \bigcap_{P' \in Spec(R)} P' = N(R).$$

بنابراین $N(R) = \bigcap_{P \in Spec_r(R)} P$.□

تعریف ۱.۱۷ فرض کنید M یک R- مدول راست و K زیرمدولی از M باشد. الحاقی K را با $adj(K)$ نمایش داده و چنین تعریف می‌کنیم:

$$adj\,(K) = \{t \in R \mid \exists y \in M \setminus K \,; yRt \subseteq K\}\,.$$

لازم به ذکر است $adj\,(K)$، همواره نسبت به جمع بسته نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۱۸ $\boldsymbol{Q}$ را به عنوان $\boldsymbol{Z}$- مدول در نظر بگیرید. $2\boldsymbol{Z}$ زیرمدولی از $\boldsymbol{Q}$ بوده اما الحاقی آن نسبت به جمع بسته نیست. زیرا اگر $t_1 = -2$ و $t_2 = 3$، آنگاه t_1 و $t_2 \in adj(2\boldsymbol{Z})$ اما $t_1 + t_2 \notin adj(2\boldsymbol{Z})$.

لم ۱.۱۹ فرض کنید R یک حلقه و P ایده‌آل اول راستی از R باشد. دراین صورت $P^{\circ} \in Spec(R)$ و $P^{\circ} = adj\,(P) = (R/P)_r^{\perp} = \bigcap_{r \in R} r^{-1}P$.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم $adj\,(P) = (R/P)_r^{\perp} = \bigcap_{r \in R} r^{-1}P$. فرض کنید

$$t \in adj\,(P) \Rightarrow \exists y \in R \setminus P ; yRt \subseteq P$$

$$\Rightarrow \exists y \in R \setminus P ; yRrt \subseteq P ; \forall r \in R$$

$$\Rightarrow rt \in P ; \forall r \in R\,(P \in Spec_r(R))$$

$$\Rightarrow t \in r^{-1}P ; \forall r \in R$$

$$\Rightarrow t \in \bigcap_{r \in R} r^{-1}P\,. \quad (۱)$$

از طرفی اگر

$$t \in \bigcap_{r \in R} r^{-1}P \Rightarrow rt \in P ; \forall r \in R$$

$$\Rightarrow Rt \subseteq P$$

$$\Rightarrow \bigcap_{r \in R} r^{-1}P \subseteq (R / P)_r^{\perp} \ . \quad (۲)$$

و

$$t \in (R / P)_r^{\perp} \Rightarrow Rt \subseteq P$$

$$\Rightarrow 1_R Rt \subseteq P$$

$$\Rightarrow t \in adj(P)$$

$$\Rightarrow (R / P)_r^{\perp} \subseteq adj(P). \quad (۳)$$

بنابراین از(۱) و(۲) و(۳) نتیجه می گیریم

$$adj(P) = (R / P)_r^{\perp} = \bigcap_{r \in R} r^{-1}P \ .$$

حال نشان می‌دهیم $adj(P)$ بزرگترین ایده‌آل دوطرفه مشمول در P است و در نتیجه $P^{\circ} = adj(P)$. اگر J ایده‌آل دوطرفه‌ای مشمول در P باشد، آنگاه برای هر $t \in J$، $Rt \subseteq J \subseteq P$. لذا $t \in adj(P)$ بنابراین $adj(P)$ بزرگترین ایده‌آل مشمول در P است. حال دوطرفه بودن این ایده‌آل را نشان می‌دهیم. فرض کنید $r \in R$ باشد. داریم

$$\begin{aligned} t \in adj(P) &\Rightarrow \exists y \in R \setminus P ; yRt \subseteq P \\ &\Rightarrow (yRt)r \subseteq P \\ &\Rightarrow tr \in adj(P) ; (y \in R \setminus P) \end{aligned}$$

از طرفی

$$y(Rr)t \subseteq yRt \subseteq P \Rightarrow rt \in adj(P) .$$

بنابراین $P^{\circ} = adj(P)$.

حال فرض کنید P ایده‌آل اول راست باشد. نشان می‌دهیم P زیرمدول اول راست از R_R نیز هست، فرض کنید برای $b \in R$ و a ، داشته باشیم

$$\begin{aligned} aRb \subseteq P, a \notin P &\Rightarrow b \in adj(P) \\ &\Rightarrow b \in (R/P)_r^{\perp} . \end{aligned}$$

بنابراین P زیرمدول اول راست از R_R بوده و طبق گزاره ۸.۱، R/P مدول اول است. لذا با توجه به گزاره ۷.۱، $P^{\circ} = (R/P)_r^{\perp}$ ایده‌آل اولی از حلقه R است.□

لم ۲۰.۱ فرض R یک حلقه و $P \in Spec_r(R)$ باشد. دراین صورت برای هر $r \in R \setminus P$ ، $r^{-1}P \in Spec_r(R)$ و $(r^{-1}P)^{\circ} = P^{\circ}$.

اثبات: داریم

$$P^{\circ} = \bigcap_{s \in R} s^{-1}P \subseteq r^{-1}P \Rightarrow P^{\circ} = (P^{\circ})^{\circ} \subseteq (r^{-1}P)^{\circ}.$$

از طرفی

$$\begin{aligned} x \in (r^{-1}P)^{\circ} = (R/r^{-1}P)_r^{\perp} &\Rightarrow Rx \subseteq r^{-1}P \\ &\Rightarrow rRx \subseteq P \\ &\Rightarrow x \in P^{\circ} \\ &\Rightarrow (r^{-1}P)^{\circ} \subseteq P^{\circ}. \end{aligned}$$

بنابراین $(r^{-1}P)^{\circ} = P^{\circ}$. حال فرض کنید برای $b \in R$ و a ، $aRb \subseteq r^{-1}P$. بنابراین

$$raRb \subseteq P \Rightarrow ra \in P \vee b \in P$$

$$\Rightarrow a \in r^{-1}P \quad \text{یا} \quad b \in P^{\circ}$$

$$\Rightarrow r^{-1}P \in Spec_r(R)\ . \ \square$$

لم ۲۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و I و J ایده‌آل‌های راست حلقه R باشند. همچنین فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq Spec_r(R)$ ، $I' = \bigcap_{I \subseteq P \in \mathcal{A}} P$ و $J' = \bigcap_{J \subseteq P \in \mathcal{A}} P$ باشند. دراین صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\mathcal{A}$ فضایی با توپولوژی زاریسکی است.

ب) $V_r(I') \cap V_r(J') \cap \mathcal{A} = (V_r(I) \cup V_r(J)) \cap \mathcal{A}$.

ج)برای هر $P \in \mathcal{A}$ ، اگر $I' \cap J' \subseteq P$ آنگاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

اثبات: واضح است که

$$V_r(I) \cap \mathcal{A} = V_r(I') \cap \mathcal{A} \quad \text{و} \quad V_r(J) \cap \mathcal{A} = V_r(J') \cap \mathcal{A} \ ; (۱)$$

$$(V_r(I') \cup V_r(J')) \cap \mathcal{A} \subseteq V_r(I' \cap J') \cap \mathcal{A} \ ; (۲)$$

الف) $\Longleftarrow$ ب) فرض کنید $\mathcal{A}$ فضایی با توپولوژی زاریسکی باشد. پس ایده‌آل راستی از R مانند K وجود دارد به قسمی که

$$(V_r(I') \cup V_r(J')) \cap \mathcal{A} \subseteq V_r(K) \cap \mathcal{A} \ ; (۳)$$

پس

$$V_r(I')\bigcap\mathcal{A}\subseteq V_r(K)\bigcap\mathcal{A} \text{ و } V_r(J')\bigcap\mathcal{A}\subseteq V_r(K)\bigcap\mathcal{A}\ .$$

نشان می‌دهیم $K\subseteq J'$ و $K\subseteq I'$. چون $I'=\bigcap_{I\subseteq P\in\mathcal{A}} P$ ، کافی است نشان دهیم برای هر $P\in\mathcal{A}$ شامل I ، K نیز مشمول در P است. داریم

$$\begin{aligned} I\subseteq P, P\in\mathcal{A} &\Rightarrow I'\subseteq P, P\in\mathcal{A}\\ &\Rightarrow P\in V_r(I')\bigcap\mathcal{A}\\ &\Rightarrow P\in V_r(K)\bigcap\mathcal{A}\\ &\Rightarrow K\subseteq P, P\in\mathcal{A}\\ &\Rightarrow K\subseteq I'\ . \end{aligned}$$

به طور مشابه $K\subseteq J'$. بنابراین $K\subseteq I'\bigcap J'$ و لذا $V_r(I')\bigcap V_r(J')\subseteq V_r(K)$. از (۱) و(۲) و(۳) ، نتیجه می گیریم $V_r(I')\bigcap V_r(J')\bigcap\mathcal{A}=(V_r(I)\bigcup V_r(J))\bigcap\mathcal{A}$.

ب) $\Longleftarrow$ ج) واضح است.

ج) $\Longleftarrow$ ب) داریم

$$\begin{aligned} P\in V_r(I'\bigcap J')\bigcap\mathcal{A} &\Rightarrow I'\bigcap J'\subseteq P\\ &\Rightarrow I\subseteq P\vee J\subseteq P\\ &\Rightarrow P\in(V_r(I)\bigcup V_r(J))\bigcap\mathcal{A}\\ &\Rightarrow V_r(I'\bigcap J')\bigcap\mathcal{A}\subseteq(V_r(I)\bigcup V_r(J))\bigcap\mathcal{A}\\ &\Rightarrow V_r(I'\bigcap J')\bigcap\mathcal{A}=(V_r(I)\bigcup V_r(J))\bigcap\mathcal{A}\ . \end{aligned}$$

ب) $\Longleftarrow$ الف) واضح است.□

نتیجه ۲۲.۱ فرض کنید R یک حلقه و I و J ایده‌آل‌های راست حلقه R باشند. دراین صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\mathcal{A}$ فضایی با توپولوژی زاریسکی است.

ب) $V_r(I) \cup V_r(J) = V_r(\sqrt[r]{I} \cap \sqrt[r]{J})$.

ج) برای هر $P \in Spec_r(R)$، اگر $\sqrt[r]{I} \cap \sqrt[r]{J} \subseteq P$ آنگاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

اثبات: قرار می‌دهیم $\mathcal{A} = Spec_r(R)$. لذا طبق لم ۲۱.۱ ، نتیجه حاصل می‌شود.□

تعریف ۲۳.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. ایده‌آل I از حلقه R را تحویل‌ناپذیر(P-اول تحویل‌ناپذیر) گوئیم هرگاه I را نتوان به شکل $I = N \cap L$ نوشت،که درآن N و L ایده‌آل‌-های راست (ایده‌آل‌های P-اول راست) از حلقه R هستند که به‌طور سره شامل I می‌باشند.

نمادگذاری: مجموعه همه پوچسازهای R-مدول‌های راست ساده را با $Prim_r(R)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۴.۱ فرض کنید R یک حلقه و $\mathcal{A} = \bigcup_{P \in Prim_r(R)} Spec_r^P(R)$ باشد. دراین صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) R حلقه‌ای است که هر ایده‌آل بیشین راست آن دوطرفه است.

ب) $\mathcal{A}$ فضایی با توپولوژی زاریسکی است.

ج) برای هر $Q \in \mathcal{A}$ ، Q ، در R_R تحویل‌ناپذیر است

د) برای هر $Q \in \mathcal{A}$ ، Q ، P-اول تحویل‌ناپذیر در $Spec_r^P(R)$ است(جایی که P ایده‌آلی اولیه از حلقه R است).