بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

روش تفاضل متناهی فشرده برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای کسری

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

محمد رضا دهقان شیرمرد

استاد راهنما

دکتر رضا مختاری

۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی) آقای محمد رضا دهقان شیرمرد

تحت عنوان

روش تفاضل متناهي فشرده برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای کسری

در تاریخ ۱۳۸۹/۱۱/۲۵ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر رضا مختاری
۲– استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر مهدی تاتاری
۳– استاد داور ۱	دکتر فردین ساعدپناه (دانشگاه کردستان)
۴– استاد داور ۲	دکتر حمید رضا مرزبان

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر اعظم اعتماد

تقدیر و تشکر

با سپاس به درگاه آفریدگار یکتا که شمه ای از شکوه خود را در کالبد طبیعت دمید و دانش را وسیله ای برای شناخت آن چشمه جوشان معرفت قرار داد.

در اینجا لازم می دانم از خانواده ی عزیزم که در تمامی مراحل زندگی همواره پشتیبان اینجانب بوده اند صمیمانه تشکر و قدردانی کنم. از جناب آقای دکتر رضا مختاری که راهنمایی این بنده را برای نگارش این پایان نامه به عهده گرفتند صمیمانه تشکر می کنم و از جناب آقای دکتر مهدی تاتاری که مشاوره پایان نامه را به عهده داشتند سپاسگزارم. همچنین از جناب آقای دکتر فردین ساعدپناه و جناب آقای دکتر حمیدرضا مرزبان که کار بازخوانی و ارزیابی پایان نامه را تقبل نمودند متشکرم.

محمدرضا دهقان

زمستان ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و

خواهران مهربانم

فهرست مطالب

چکیده:

این پایان نامه از سه قسمت تشکیل شده است. در قسمت اول سه نوع از مهم‌ترین توابع خاص ریاضی (گاما، بتا و میتاگ لفلر) معرفی می‌شوند که نقش کلیدی در حسابان کسری دارند. در ادامه با معرفی چند رویکرد، مفهوم مشتق و انتگرال مرتبه‌ی صحیح به مفهوم مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری تعمیم داده می‌شود و تعاریف گرونوالد—لتنیکوف، ریمان—لیوویل و کاپاتو برای مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری به‌دست می‌آیند. در آخر به بیان خواصی از این تعاریف و رابطه‌ی آن‌ها با یکدیگر می‌پردازیم و تعبیری هندسی و کاربردهایی از مشتق کسری را بیان می‌کنیم.

در قسمت دوم روش‌های تفاضل متناهی فشرده به‌دست می‌آیند و آنالیزی از دقت آن‌ها داده می‌شود. روش‌های تفاضل متناهی فشرده، روش‌هایی ضمنی با دقت بالایی هستند که در مقایسه با روش‌های صریح از نقاط کمتری از شبکه استفاده می‌کنند. همچنین در این قسمت تقریب پاده یا تقریب گویا را به‌عنوان اساس کار روش تفاضل متناهی فشرده بیان می‌کنیم و با استفاده از آن بعضی از روش‌های تفاضل متناهی فشرده را به‌دست می‌آوریم.

در قسمت سوم معادله‌ی موج—انتشار کسری و معادله‌ی انتشار کسری به‌عنوان دو نوع از مهم‌ترین معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای کسری در نظر گرفته می‌شوند. در معادله‌ی موج —انتشار کسری از تقریب "$L1$" برای گسسته کردن مشتق کسری کاپاتو استفاده می‌کنیم و روش تفاضل متناهی فشرده‌ی مرتبه‌ی چهار را برای تقریب مشتق مرتبه‌ی دو نسبت به مکان به کار می‌گیریم. همچنین با استفاده از روش انرژی، همگرایی و پایداری روش به‌کار گرفته شده را ثابت می‌کنیم. در ادامه برای معادله انتشار کسری ابتدا از مشتق کسری گرونوالد—لتنیکوف برای تقریب مشتق کسری ریمان—لیوویل استفاده می‌کنیم و دوباره روش تفاضل متناهی فشرده‌ی مرتبه‌ی چهار را برای تقریب مشتق مرتبه‌ی دوم نسبت به مکان به کار می‌گیریم و با استفاده از آنالیز فوریه همگرایی و پایداری را بررسی می‌کنیم. همچنین برای بالا بردن دقت نسبت به زمان، معادله‌ی انتشار کسری را به معادله‌ی هم ارز دیگری تبدیل کرده که در معادله‌ی جدید مشتق کسری کاپاتو ظاهر می‌شود. در این حالت نیز دوباره با استفاده از تقریب "$L1$" مشتق کسری کاپاتو و با استفاده از روش تفاضل متناهی فشرده مرتبه‌ی چهار، مشتق مرتبه‌ی دوم نسبت به مکان تقریب زده می‌شود. دوباره از روش انرژی برای اثبات همگرایی و پایداری استفاده می‌کنیم. سرانجام با استفاده از چندین مثال دقت و کارایی روش تفاضل متناهی فشرده برای حل معادلات دیفرانسیل نشان داده می‌شود.

کد رده بندی: ۴۵K۰۵، ۲۶A۳۳و ۶۵M۰۶.

کلمات کلیدی: حسابان کسری، روش تفاضل متناهی فشرده، تقریب پاده، آنالیز فوریه، برونیابی ریچاردسون، انتشار، موج.

فصل ۱

مقدمه

مقدمه

مشتق و انتگرال کسری به عنوان تعمیمی از مشتق و انتگرال مرتبه‌ی صحیح از مدت زمان بسیار طولانی مورد توجه ریاضیدان‌ها بوده است. تاریخ پیدایش آن را می‌توان به لایب‌نیتز نسبت داد. در سال ۱۶۹۵ هوپیتال طی نامه‌ای به لایب‌نیتز می‌نویسد که $\frac{d^n y}{dx^n}$ برای $n = \frac{1}{2}$ چگونه توجیه می‌شود؟ لایب‌نیتز در پاسخ او به رابطه‌ی بین مشتقات و سری‌های نامتناهی اشاره می‌کند و این را یک تناقض آشکار از چیزی می‌داند که روزی نتایج مفیدی در بر خواهد داشت. بعد از لایب‌نیتز تعمیم مشتق و انتگرال مرتبه‌ی صحیح به ناصحیح مورد توجه ریاضیدان‌های بسیاری از جمله اویلر (۱۷۳۰)، لاگرانژ (۱۷۷۲)، لاپلاس (۱۸۱۲)، فوریه (۱۸۲۲)، لیوویل (۱۸۳۲)، ریمان (۱۸۴۷)، گرونوالد (۱۸۶۷)، لتنیکوف (۱۸۶۸)، ویل (۱۹۱۷) و کاپاتو (۱۹۶۷) قرار گرفت. از میان تعاریف مختلفی که برای مشتق و انتگرال مرتبه‌ی ناصحیح ارایه شده است تعاریف گرونوالد—لتنیکوف، ریمان—لیوویل و کاپاتو از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. بحث کلی در مورد این تعاریف را می‌توان در کتب مرجع [۹، ۱۵، ۲۷، ۳۰، ۳۱، ۳۷] دنبال کرد. امروزه مشتق و انتگرال مرتبه‌ی ناصحیح تحت عنوان "حسابان کسری" شناخته شده است. با الهام گرفتن از حسابان کسری، معادلات دیفرانسیل کسری از جمله معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای کسری برای توصیف و مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، شیمیایی و غیره ظاهر شدند. از کاربردهای متنوع حسابان کسری و معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای کسری می‌توان به بررسی جریان سیال در یک مایع، تجزیه و تحلیل اقتصادی مدل قیمت‌های سهام در ریاضیات مالی، الکترومغناطیس و

غیره اشاره کرد. همچنین مدل‌سازی مسایل فیزیکی با دقت بالا که سابقه طولانی در مهندسی ندارد از مهم‌ترین کاربردهای حسابان کسری است. این کار به خاطر آزادی عملی است که بر روی مرتبه‌ی مشتق و انتگرال داریم. با توجه به نقش اساسی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کسری در علوم و مهندسی، حل این‌گونه معادلات از اهمیت بالایی برخوردار است. برای برخی از این‌گونه معادلات جواب‌های تحلیلی با استفاده از تبدیلات لاپلاس و فوریه به‌دست آمده است[۱]. اما همیشه یافتن جواب تحلیلی برای چنین معادلاتی ممکن نیست. از این رو برای حل آنها باید به روش‌های عددی پناه برد. تاکنون طرح‌های عددی صریح و ضمنی بسیاری برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای کسری پیشنهاد شده و در آنها پایداری، همگرایی و دقت مورد بررسی قرار گرفته است. از میان این طرح‌ها می‌توان به طرح‌های پیشنهادی در [۳، ۴، ۵، ۱۷، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲٦، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵] اشاره کرد. چون این طرح‌ها دارای دقت بالایی نیستند یافتن طرح‌هایی با دقت مرتبه بالا و پیاده‌سازی آسان، امری طبیعی به نظر می‌رسد. از این رو، آن دسته از طرح‌های تفاضل متناهی به کار گرفته می‌شود که:

۱) دارای دقت مرتبه بالا باشند،

۲) جهت یافتن مقدار تقریبی در هر گره از شبکه گسسته شده برای حل معادله تعداد کمی از گره‌های اطراف به کار گرفته شود.

این‌گونه طرح‌ها تحت عنوان تفاضل متناهی فشرده شناخته شده‌اند که تعمیمی از تقریب‌های پاده هستند و برای اولین بار در سال ۱۹٦۱ توسط کوپال[۱٦] به‌صورت عملگرهایی مجزا بیان شدند. در سال ۱۹٦٦ کولاتز[٦] تقریب‌های مرتبه بالایی ارایه داد که مانند تقریب‌های پاده به‌صورت عملگر نبودند. کولاتز این‌گونه روش‌ها را روش‌های هرمیتی نامید چون از مقادیر مشتق تابع و مقادیر خود تابع استفاده می‌کردند. در سال ۱۹۹۲ لِلِ طی مقاله‌ای [۱۸] روش‌های تفاضل متناهی فشرده را به‌طور کلی مورد بررسی قرار داد و دقت و کارآیی آن‌ها را به‌دست آورد. روش‌هایی که لِلِ ارایه داد شامل روش‌های کولاتز نیز هست. از مهم‌ترین مزیت‌های روش تفاضل متناهی فشرده می‌توان به سه قطری بودن ماتریس ضرایب دستگاه خطی معادلات وابسته به مجهولات روش به کار گرفته شده، اشاره کرد که با استفاده از الگوریتم توماس [۴۱] به سادگی قابل حل است.

فصل ۲

توابع خاص در حسابان کسری

برخی از توابع ریاضی نقش به‌سزایی در حسابان کسری دارند. از جمله این توابع می‌توان به توابع گاما، بتا و میتاگ لفلر اشاره کرد. در این فصل به معرفی این توابع و برخی خواص مهم آنها می‌پردازیم. برای مطالعه‌ی بیشتر این توابع می‌توان به مراجع [۱۱، ۳۱] مراجعه نمود.

۲—۱ تابع گاما

در مطالعه‌ی توابع خاص ریاضی، تابع گاما از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. علت این اهمیت بدان جهت است که:

۱) تابع گاما، تابع فاکتوریل $n!$ را تعمیم می‌دهد به‌طوری‌که تابع فاکتوریل می‌تواند مقادیر ناصحیح و حتی مقادیر مختلط را بپذیرد،

۲) تابع گاما در تعریف بعضی از توابع خاص ریاضی ظاهر می‌شود.

تعریف ۱.۲ تابع گاما $\Gamma(z)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(z) = \int_{۰}^{+\infty} e^{-t} t^{z-۱} dt, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{۱.۲}$$

می‌توان نشان داد که تابع گاما در نیمه‌ی راست صفحه‌ی مختلط $(Re(z) > 0)$ همگرا است. تابع گاما دارای خواص بسیاری است که در قضیه‌ی زیر برخی از مهم‌ترین آنها را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۲ تابع گاما در روابط زیر صدق می‌کند.

۱) تابع گاما به‌صورت زیر نیز قابل تعریف است

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (\ln(\frac{1}{t}))^{z-1} dt.$$

۲) مهم‌ترین خاصیت تابع گاما عبارت است از

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z).$$

۳) برای هر عدد طبیعی n داریم

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

۴) نمایش حدی تابع گاما به صورت زیر است

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} = \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}.$$

۵) تابع گاما در $z = -n$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$ دارای قطب ساده است.
٦) تابع گاما همواره مخالف صفر است.
۷) برای عدد ناصحیح z داریم

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

۸) رابطه‌ی زیر که به رابطه‌ی لژاندر معروف است برای $z \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, \dots$ برقرار است

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}2^{2z-1}\Gamma(2z).$$

۹) برای هر a و b دلخواه تابع گاما در خاصیت مجانبی زیر صدق می‌کند

$$z^{b-a}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = 1 + O(z^{-1}).$$

اثبات. برای اثبات می‌توان به [۳۱] رجوع کرد. ■

با توجه به قسمت دوم قضیه‌ی ۲.۲ می‌توان مقادیر تابع گاما را برای اعداد ناصحیح منفی حساب کرد. همچنین با قرار دادن $z = n + \frac{1}{2}$ در رابطه‌ی لاگرانژ(رابطه‌ی ۸ قضیه‌ی ۲.۲) رابطه‌ی مفید زیر به دست می‌آید

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}. \tag{۲.۲}$$

مثال ۳.۲ با قرار دادن $n = ۰$ در رابطه‌ی (۲.۲) داریم

$$\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$$

همچنین به ازای $z = -\frac{۱}{۲}$ در رابطه‌ی دوم قضیه‌ی ۲.۲ خواهیم داشت

$$\Gamma(-\frac{۱}{۲}) = -۲\Gamma(\frac{۱}{۲}) = -۲\sqrt{\pi}.$$

□

ضرایب بسط دوجمله‌ای $\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)$ به‌طوری‌که α بتواند مقادیر حقیقی را بپذیرد، نقش مهمی در حسابان کسری دارند. این تعمیم با استفاده از تابع گاما به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۲ ضرایب بسط دوجمله‌ای $\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)$ به‌طوری‌که $\alpha \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{Z}^+$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) = \frac{(-۱)^k\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+۱)} = \frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)\cdots(\alpha-k+۱)}{k!}. \qquad (۳.۲)$$

۲—۲ تابع بتا

تابع بتا یکی دیگر از توابع خاص ریاضی است که در مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری بسیاری از توابع ریاضی ظاهر می‌شود. این تابع ارتباط مستقیمی با تابع گاما دارد.

تعریف ۵.۲ تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \Re(z), \Re(w) > ۰. \qquad (۴.۲)$$

در قضیه‌ی زیر برخی از خواص تابع بتا را بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۲ تابع بتا در خواص زیر صدق می‌کند.

۱) تابع بتا را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$\begin{aligned} B(z,w) &= \int_۰^۱ t^{z-۱}(۱-t)^{w-۱}dt = \int_۰^{+\infty} \frac{t^{z-۱}}{(۱+t)^{z+w}}dt \qquad (۵.۲)\\ &= ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (\sin t)^{۲z-۱}(\cos t)^{۲w-۱}dt. \end{aligned}$$

۲) نمایش دیگری از تابع بتا عبارت است از

$$B(z,w) = \int_۰^۱ t^z(۱-t)^w dt.$$

۳) برابری‌های زیر در مورد تابع بتا برقرار است

$$B(z,w)=B(w,z),$$
$$B(z,w)=B(z+1,w)+B(z,w+1),$$
$$B(z,w+1)=\frac{w}{z}B(z+1,w)=\frac{w}{z+w}B(z,w).$$

اثبات. برای اثبات می‌توان به [۳۱] مراجعه کرد. ■

۲–۳ تابع میتاگ لفلر

تابع میتاگ لفلر یکی دیگر از توابع خاص ریاضی است که به‌طور مستقیم با تابع گاما در ارتباط است. این تابع در جواب دقیق بسیاری از معادلات دیفرانسیل کسری ظاهر می‌شود.

تعریف ۷.۲ تابع میتاگ لفلر $E_\alpha(z)$ برای $\alpha>0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\quad \forall z\in\mathbb{C}. \tag{۶.۲}$$

همچنین تابع تعمیم یافته‌ی میتاگ لفلر برای $\alpha,\beta>0$ به‌صورت زیر است

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad \forall z\in\mathbb{C}. \tag{۷.۲}$$

در قضیه‌ی زیر برخی از خواص تابع میتاگ لفلر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۸.۲ تابع میتاژ لفلر دارای خواص زیر است

۱) برای $|z|<1$، تابع تعمیم یافته‌ی میتاگ لفلر در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z)dt=\frac{1}{1-z}.$$

۲) تبدیل لاپلاس تابع میتاگ لفلر به‌صورت زیر است

$$\mathcal{L}(E_\alpha(at^\alpha))=\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha-a},\quad s>|a|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

۳) تابع میتاگ لفلر برای هر $z\in\mathbb{C}$ همگرا است.

۴) برای برخی مقادیر خاص α، تابع میتاگ لفلر به‌صورت زیر است

$$E_0(z)=\frac{1}{1-z},$$

$$
\begin{aligned}
&E_{1}(z) = e^{z},\\
&E_{2}(z^{2}) = \cosh(z),\\
&E_{2}(-z^{2}) = \cos(z).
\end{aligned}
$$

۵) برای تابع تعمیم یافته‌ی میتاگ لفلر رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\int_{0}^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm a t^{\alpha}) dt = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} \mp a}, \ s > |a|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

اثبات. برای اثبات می‌توان به [۳۱] مراجعه کرد. ■

فصل ۳

حسابان کسری

در این فصل قصد داریم مهم‌ترین تعاریف مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری، برخی از خواص آن‌ها و همچنین روشی عددی برای تقریب مشتق مرتبه‌ی کسری را بیان کنیم. در ادامه به بیان تعبیری هندسی و کاربردی از حسابان کسری می‌پردازیم. منظور از $[x]$ در این فصل جزء صحیح x نیست بلکه کوچکترین عدد صحیح مانند z است به‌طوری که $x \leq z$.

۳—۱ مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری

در این بخش به بیان مشتق و انتگرال‌های کسری گرونوالد—لتنیکوف، ریمان—لیوویل و کاپاتو و نحوه‌ی تعریف آن‌ها می‌پردازیم. همچنین برخی از مهم‌ترین خواص آن‌ها از جمله رابطه‌ی آن‌ها با یکدیگر را بررسی می‌کنیم.

۳—۱—۱ تعریف گرونوالد—لتنیکوف

تابع پیوسته $y = f(t)$ را در نظر می‌گیریم. از حسابان می‌دانیم که مشتق مرتبه‌ی اول تابع $f(t)$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

همچنین تعریفی مشابه برای مشتق مرتبه‌ی دوم تابع $f(t)$ به صورت زیر داریم

$$f''(t) = \frac{d^۲ f}{dt^۲} = \lim_{h\to ۰} \frac{f(t) - ۲f(t-h) + f(t-۲h)}{h^۲}.$$

با استقرای ریاضی به ازای هر n طبیعی داریم

$$f^n(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h^n} \sum_{r=۰}^{n} (-۱)^r \binom{n}{r} f(t-rh). \qquad (۱.۳)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱.۳)، عبارت زیر را در نظر می‌گیریم که در آن p عددی صحیح است و $p \leq n$.

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{۱}{h^p} \sum_{r=۰}^{n} (-۱)^r \binom{p}{r} f(t-rh), \qquad (۲.۳)$$

برای $p \leq n$ چون تمام ضرایب بعد از $\binom{p}{p}$ صفر هستند، داریم

$$\lim_{h\to ۰} f_h^p(t) = f^p(t) = \frac{d^p f}{dt^p}.$$

با در نظر گرفتن مقادیر مثبت p به طوری که $-p < ۰$، رابطه‌ی (۲.۳) به‌صورت زیر در می آید

$$f_h^{-p}(t) = \frac{۱}{h^{-p}} \sum_{r=۰}^{n} (-۱)^r \binom{-p}{r} f(t-rh). \qquad (۳.۳)$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned}(-۱)^r \binom{-p}{r} &= (-۱)^r \frac{-p(-p-۱)\cdots(-p-r+۱)}{r!} = (-۱)^{۲r} \frac{p(p+۱)\cdots(p+r-۱)}{r!} \\ &= \frac{p(p+۱)\cdots(p+r-۱)}{r!}.\end{aligned}$$

برای سهولت در امر نوشتن قرار می‌دهیم

$$\frac{p(p+۱)\cdots(p+r-۱)}{r!} = \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}.$$

بنابراین رابطه‌ی (۳.۳) به‌صورت زیر در می آید

$$f_h^{-p}(t) = \frac{۱}{h^{-p}} \sum_{r=۰}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh). \qquad (۴.۳)$$

اگر n ثابت باشد وقتی که $h \to ۰$، $f_h^{-p}(t)$ به سمت صفر میل می‌کند. برای این‌که مقدار حد صفر نشود باید $n \to +\infty$ وقتی $h \to ۰$. بنابراین می‌توانیم رابطه‌ای مانند زیر بین h و n برقرار کنیم که در آن a عددی حقیقی و ثابت است.

$$h = \frac{t-a}{n}.$$

اکنون با توجه به رابطه‌ای که بین n و h برقرار کردیم مقدار حد $f_h^{-p}(t)$ را وقتی که $h \to ۰$ به‌صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\lim_{h\to ۰} f_h^{-p}(t) = D_a^{-p} f(t). \tag{۵.۳}$$

با در نظر گرفتن $p = ۱$، رابطه‌ی (۴.۳) به‌صورت زیر در می‌آید

$$f_h^{-۱}(t) = h \sum_{r=۰}^{n} f(t - rh).$$

با قرار دادن $t - nh = a$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\lim_{h\to ۰} f_h^{-۱}(t) = \int_۰^{t-a} f(t-z)dz = \int_a^t f(\tau)d\tau = D_a^{-۱} f(t).$$

به طریق مشابه برای $p = ۲$ داریم

$$\lim_{h\to ۰} f_h^{-۲}(t) = \int_a^t (t-\tau) f(\tau)d\tau = D_a^{-۲} f(t).$$

در نتیجه با استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که

$$D_a^{-p} f(t) = \lim_{h\to ۰} f_h^{-p}(t) = \frac{۱}{(p-۱)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-۱} f(\tau)d\tau. \tag{۶.۳}$$

در ادامه نمایش دیگری برای عملگر D_a^{-p} به‌دست می‌آوریم. برای این کار با مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی (۶.۳) داریم

$$\frac{d}{dt}(D_a^{-p} f(t)) = \frac{۱}{(p-۲)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-۲} f(\tau)d\tau = D_a^{-p+۱} f(t),$$

با انتگرال‌گیری از a تا t این رابطه داریم

$$D_a^{-p} f(t) = \int_a^t (D_a^{-p+۱} f(t))dt.$$

به طریق مشابه

$$D_a^{-p+۱} f(t) = \int_a^t (D_a^{-p+۲} f(t))dt.$$

بنابراین

$$D_a^{-p} f(t) = \int_a^t \int_a^t \cdots \int_a^t f(t)dtdt\cdots dt.$$

مشاهده کردیم که مشتق از مرتبه‌ی صحیح و انتگرال‌های چندگانه حالت‌های خاصی از رابطه‌ی (۲.۳) هستند. در واقع اگر $p = m$ آن‌گاه رابطه‌ی (۲.۳) بیانگر مشتق از مرتبه‌ی m و اگر $p = -m$ رابطه‌ی

(۲.۳) بیانگر انتگرال $m-$گانه است. همچنین به تساوی ۶.۳ فرمول انتگرال کشی برای انتگرال‌های $p-$گانه می‌گویند. این مشاهدات به تعمیم مشتق و انتگرال با در نظر گرفتن مقادیر حقیقی و مختلط برای p در عبارت (۲.۳) منجر می‌شود که در اینجا فقط مقادیر حقیقی p را در نظر می‌گیریم.
با استناد به مطالب گفته‌شده گرونوالد و لتنیکوف طی دو مقاله [۱۹، ۱۴] تعاریف خود را برای مشتق و انتگرال کسری به صورت زیر ارایه کردند.

تعریف ۱.۳ انتگرال کسری گرونوالد–لتنیکوف به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$ {}^{GL}D_a^{-p}f(t) = \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] f(t-rh), \tag{۷.۳} $$

که در آن $p > 0$ و $nh = t-a$.

برای اثبات وجود حد (۷.۳) و مقدار آن احتیاج به قضیه‌ی زیر داریم که منسوب به لتنیکوف است[۱۹].

قضیه ۲.۳ فرض کنیم $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ و $(a_{n,k})_{n,k=1}^{\infty}$ دو دنباله باشند که در روابط زیر صدق می‌کنند

$$ \lim_{k\to\infty} b_k = 1, \tag{۸.۳} $$

$$ \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0, (k = 1, 2, \ldots), \tag{۹.۳} $$

$$ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} = A, \tag{۱۰.۳} $$

$$ \sum_{k=1}^{n} |a_{n,k}| < K, (n = 1, 2, \ldots), \tag{۱۱.۳} $$

آن‌گاه

$$ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} b_k = A. \tag{۱۲.۳} $$

اثبات. برای اثبات به [۳۱] مراجعه شود. ■

حال برای ارزیابی حد(۷.۳) با استفاده از قضیه‌ی ۲.۳ داریم

$$
\begin{aligned}
{}^{GL}D_a^{-p}(t) &= \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] f(t-rh) \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r^{p-1}} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] h(rh)^{p-1} f(t-rh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{h\to 0} \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] h(rh)^{p-1} f(t-rh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] \frac{t-a}{n} (r\frac{t-a}{n})^{p-1} f(t-r\frac{t-a}{n}).
\end{aligned}
$$