دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی

عنوان

حل عددی مسائل کنترل بهینه با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد لژاندر و چبی‌شف

استاد راهنما

دکتر محمد هادی فراهی

استاد مشاور

دکتر حامد رضا طارقیان

پژوهشگر

عمران توحیدی

شهریور ۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: توحیدی نام: عمران

عنوان: حل عددی مسائل کنترل بهینه با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد لژاندر و چبی‌شف

استاد راهنما: دکتر محمد هادی فراهی

استاد مشاور: دکتر حامد رضا طارقیان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش:

دانشگاه: فردوسی دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۷۳

واژگان کلیدی: چند جمله ای های لژاندر و چبی شف، مسایل کنترل بهینه، مسایل کنترل بهینه در افق نامتناهی، مسایل کنترل بهینه بنگ-بنگ، مسایل کنترل بهینه با قیود انتگرالی.

چکیده

حل سیستم های کنترل بهینه ی واقعی از پیچیدگی های خاصی برخوردار است. در نظریه ی کلاسیک کنترل، تنها سیگنال های ورودی-خروجی اهمیت دارند. نقص عمده ی این نظریه آن است که تنها در مورد سیستم های خطی مستقل از زمان قابل استفاده است. از این رو ارایه ی یک روش عددی مناسب و کارآمد برای حل سیستم های کنترل بهینه واقعی از اهمیت قابل توجهی برخوردار می باشد. در این پایان نامه ابتدا به معرفی چند جمله ایهای متعامد چبی شف و لژاندر برای حل مسایل کنترل بهینه خطی با تابعی معیار درجه ی دوم می پردازیم. سپس با بهره گیری از نقاط هم مکانی خاصی روش ارایه شده را توسیع داده تا بتوان مسایل کنترل بهینه ی غیر خطی (از جمله مسأله کوتاهترین مسیر) را نیز حل نمود. همچنین مسایل کنترل بهینه در افق نامتناهی را مورد بررسی قرار می دهیم. علاوه بر این یک روش کارای قطعه به قطعه هموار (که مبتنی بر چند جمله ای های لژاندر می باشد) برای مسایل کنترل بهینه ناهموار بنگ-بنگ ارایه می شود. در پایان مسایل کنترل بهینه با قیود انتگرالی و اینتگرو-دیفرانسیلی را مورد بررسی و حل قرار می دهیم.

تقدیم به طالبان علم و همه آنهایی که

در این مسیر یاری ام دادند.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ و تشویق های امید بخش استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد هادی فراهی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر محمد رضا طارقیان که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقایان دیوید کینکید و محسن آوجی نیز به خاطر در اختیار گذاشتن منابع علمی مهمی که نیاز داشته ام کمال تشکر را دارم .

همچنین لازم می دانم از دوستان عزیزی از جمله آقایان رضا ابریشمی، امید رضا نوید صمدی، محمد هادی نوری اسکندری، خلیل عرفانی حیدرنیا، مهدی موسوی و محمد شیرازیان که در راستای تحقیقات انجام شده در این پژوهش بنده را در امور برنامه نویسی، تایپ و مباحث نظری یاری داده اند تشکر ویژه ای نمایم. از خداوند متعال موفقیت روز افزون این همکاران و همراهان را خواهانم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

در ضمن خوانندگان این پایان نامه در صورت داشتن هر گونه سوالی در خصوص روش های ارایه شده و مثال های عددی مربوطه می توانند از طریق ایمیل های زیر با حقیر تماس حاصل نمایند

emrantohidi@gmail.com etohidi۱۱۰@yahoo.com

عمران توحیدی

شهریور ۱۳۹۰

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

حل سیستم های کنترل بهینه واقعی از پیچیدگی های خاصی برخوردار است. در نظریه ی کلاسیک کنترل، تنها سیگنال های ورودی-خروجی و خطا اهمیت دارند. مشخصه ی منحصر بفرد نظریه کلاسیک کنترل این است که بر رابطه ورودی-خروجی سیستم ها مبتنی است. نقص عمده ی این نظریه آن است که تنها در مورد سیستم های خطی مستقل از زمان که دارای یک ورودی و یک خروجی اند، قابل استفاده است. بنابراین از دیدگاه این نظریه نمی توان سیستم های وابسته به زمان، سیستم های غیر خطی و سیستم های چند ورودی-چند خروجی را مورد بررسی و تحلیل قرار داد. به علاوه روش های کلاسیک در مورد سیستم های کنترل بهینه دارای رفتار غیرخطی وابسته به زمان، اغلب کاربردی ندارند. از این رو ارایه ی یک روش عددی مناسب و کارآمد برای حل سیستم های کنترل بهینه واقعی از اهمیت قابل توجهی برخوردار است.

۱.۱ روش های عددی برای حل مسائل کنترل بهینه

روش های عددی برای حل مسایل کنترل بهینه به دو دسته ی کلی روش های غیر مستقیم [۱] و روش های مستقیم [۲] تقسیم می شوند [۱]. در روش غیر مستقیم اساس کار مبتنی بر پیداکردن جواب بر اساس یک مجموعه از شرایط لازم برای بهینگی است که از حساب تغییرات [۳] و اصل ماکزیمم پونتریاگین[۴] به دست می آیند [۳،۲]. این شرایط لازم تشکیل یک مسأله مقدار مرزی هامیلتونی (HBVP) [۵]می دهند که برای حل آن می توان از یک روش عددی استفاده کرد. از مزیت های اولیه روش های غیر مستقیم می توان به ضریب اطمینان بالای جواب عددی به دست آمده اشاره کرد که به دلیل ارضای شرایط لازم مرتبه اول (HBVP)

---

[۱] Indirect methods
[۲] Direct methods
[۳] Calculus of variation
[۴] Pontryagin Maximum Principle
[۵] Hamiltonian boundary-value problem

می باشد. اما در عین حال این روش ها دارای معایب زیادی می باشند. اول اینکه شرایط لازم مرتبه اول (HBVP) می بایست به صورت تحلیلی به دست آیند که در اغلب موارد به راحتی امکان پذیر نیست. دوم اینکه روش های غیر مستقیم دارای شعاع همگرایی کوچک می باشند به این معنی که برای شرایط مرزی مجهول یک حدس اولیه بسیار دقیق لازم است. بالاخره سوم این که در بسیاری از موارد، روش های غیر مستقیم نیازمند به یک حدس اولیه دقیق برای معادلات هم وضعیت [۱] که در عمل غیر شهودی می باشند، هستند.

در روش مستقیم، ایده اصلی مبتنی بر گسسته سازی مسأله کنترل بهینه و تبدیل آن به یک مسأله برنامه ریزی غیرخطی (NLPP) [۲] است. برای حل عددی (NLPP) به دست آمده، الگوریتم های پیشرفته موجود مورد استفاده قرار می گیرند. مزیت های روش های مستقیم بر روش های غیر مستقیم عبارت است از این که در روش های مستقیم هیچ نیازی به یافتن شرایط لازم مرتبه اول (HBVP) نیست. به علاوه، این روش ها دارای شعاع همگرایی بسیار بزرگتر هستند و بنابراین نیازی به یک حدس اولیه ی دقیق برای شرایط مرزی مجهول و همچنین برای معادلات هم وضعیت نمی باشد. با این همه، این که ممکن است جواب عددی به دست آمده برای (NLPP) جواب بهینه ی مسأله کنترل بهینه اصلی نباشد، جزو معایب این روش هاست. روش های مستقیم در عین سادگی ریشه در سه نظریه قوی همچون نظریه تقریب[۳]، نظریه کنترل [۴] و نظریه بهینه سازی [۵] دارند. یکی از مشخصه های روش های مستقیم استفاده از توابع متعامد [۶] برای تقریب جواب می باشد. توابع متعامد به سه دسته عمده تقسیم می شوند. دسته اول شامل توابع پایه ای قطعه ای ثابت می باشد، مانند توابع والش [۷]، توابع بلاک-پالس [۸]، توابع هار [۹] و ...، دسته دوم از چندجمله ای های متعامد تشکیل می شود، مانند چندجمله ای های لژاندر [۱۰]، چبی شف [۱۱]، هرمیت [۱۲]، لاگر [۱۳] و ...، و دسته سوم توابع سینوسی و کسینوسی در سری فوریه [۱۴] می باشد. البته در یک تقسیم بندی دیگر توابع سینوسی و کسینوسی و چندجمله ای های متعامد در یک رده از توابع پایه ای پیوسته قرار می گیرند و توابع پایه ای قطعه ای ثابت در رده ی دیگری به نام توابع پایه ای قطعه ای پیوسته قرار می گیرند. توابع پایه ای قطعه

[۱] Costate equations
[۲] Nonlinear programming problem
[۳] Approximation theory
[۴] Control theory
[۵] Optimization theory
[۶] Orthogonal functions
[۷] Walsh functions
[۸] Block-pulse functions
[۹] Haar functions
[۱۰] Legendre polynomials
[۱۱] Chebyshev Polynomials
[۱۲] Hermite polynomials
[۱۳] Laguerre polynomials
[۱۴] Fourier series

ای پیوسته، توابعی هستند که در دامنه تعریف خود دارای ناپیوستگی های ذاتی یا به عبارتی دارای جهش هستند. مثال هایی از این نوع را می توان برای توابع بلاک پالس در مراجع [۶،۵،۴]، برای چندجمله ای های لژاندر در مرجع [۷]، برای چندجمله ای های چبی شف در مراجع [۹،۸] و برای سری فوریه در مراجع [۱۱،۱۰]؛ یافت.

یکی از اشکالات استفاده از توابع پایه ای پیوسته در تجزیه و تحلیل سیستم هایی است که دارای ناپیوستگی هستند. همچنین توابع پایه ای قطعه ای پیوسته به دلیل نوع ساختارشان در بسیاری از موارد کارایی مطلوبی ندارند زیرا در حل بسیاری از مسایل در مقایسه با توابع پایه ای پیوسته نیازمند به تعداد تقریب های بیشتری می باشند. ترکیب دو سیستم از توابع پایه ای پیوسته و توابع پایه ای قطعه ای پیوسته موجب می گردد تا از ویژگی های این دو سیستم به طور هم زمان برخوردار گردیم. توابع ترکیبی [۱] به دلیل قابلیت نمایش توابع در سطوح مختلف تجزیه، در آنالیز و تحلیل مسایل کنترل بهینه بسیار مناسب می باشند. در زمینه ساخت توابع ترکیبی به عنوان مثال می توان به توابع ترکیبی تیلور-بلاک پالس در مراجع[۱۳،۱۲] ، توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس در مرجع [۱۴] و توابع ترکیبی چبی شف-بلاک پالس در مرجع [۱۵] اشاره کرد. نتایجی که از این روش ها بخصوص در مورد سیستم های تاخیری به دست آمده است بسیار خوب و امیدوار کننده هستند، تا جایی که روش های اعمال شده بر روی برخی از سیستم های تاخیری منجر به تولید جواب دقیق شده اند [۱۶].

با این که شیوه های استفاده از روش های مستقیم بسیار متنوع است اما از یک نظر می توان آنها را به شیوه های پارامترسازی متغیرهای کنترل [۲] و شیوه های پارامترسازی متغیرهای حالت و کنترل [۳] دسته بندی کرد. در روش های مبتنی بر پارامترسازی متغیرهای کنترل، فقط متغیرهای کنترل گسسته سازی می شوند و معادلات دیفرانسیل حاصل با استفاده از انتگرال گیری عددی مورد محاسبه قرار می گیرند [۱۹،۱۸،۱۷]. به عنوان مثال روش های پرتابی [۴] و پرتابی چندگانه [۵] از این نوع هستند. اما در روش های مبتنی بر پارامترسازی متغیرهای حالت و کنترل، متغیرهای حالت و کنترل به طور هم زمان گسسته سازی می شوند. بنابراین معادلات دیفرانسیل به یک دسته از قیود جبری تبدیل و به (NLPP) اضافه می گردد [۲۲،۲۱،۲۰]. اگر چه روش های اخیر منجر به یک (NLPP) بزرگتر می شود اما در عوض حساسیت های روش های پرتابی را ندارد.

در دهه های اخیر کلاس خاصی از روش های مبتنی بر پارامترسازی متغیرهای حالت و کنترل مورد توجه

[۱] Hybrid functions
[۲] Control parametrization techniques
[۳] State and control parametrization techniques
[۴] Shooting methods
[۵] Multiple shooting methods

محققین قرار گرفته که به روش های شبه طیفی [۱] مشهور هستند [۲۳،۲۴،۲۵]. در حقیقت روش های شبه طیفی جزو خانواده ی روش های طیفی [۲] می باشند. روش های طیفی را می توان توسیعی از روش های مانده های وزنی[۳] دانست که در ابتدا به عنوان انتخابی مناسب و قابل رقابت با روش های دیگر برای حل مسایل دینامیک سیالات، مدل سازی لرزه، پیش بینی وضع هوا و ...، معرفی گردیدند [۲۶،۲۷]. در این روش ها توابعی موسوم به توابع پایه [۴] انتخاب می شوند و تابع مجهول به صورت ترکیب خطی از توابع پایه با ضرایب مجهول تقریب زده می شوند. برای یافتن ضرایب مجهول از دسته توابع دیگری موسوم به توابع وزنی [۵] استفاده می شود، به این ترتیب که خطای تقریب مذکور با کمک این توابع تا آنجا که ممکن است کاهش می یابد. روش های طیفی بسته به انتخاب توابع پایه و وزنی به سه دسته روش های گالرکین [۶]، روش های هم مکانی [۷] و روش های تاو [۸]، تقسیم می شوند. روش های شبه طیفی در رده ی روش های هم مکانی قرار دارند و به همین دلیل به روش های هم مکانی متعامد [۹] نیز معروف هستند.

در روش های شبه طیفی به منظور تقریب متغیرهای حالت و کنترل از چندجمله ای درون یاب لاگرانژ [۱۰] بر پایه ی یک مجموعه نقاط به نام نقاط درون یاب [۱۱] استفاده می شود. همچنین مشتق متغیرهای حالت در دینامیک مسأله توسط مشتق چندجمله ای درون یاب تقریب زده می شود. به این ترتیب، برابر قرار دادن دو طرف معادله دینامیک در نقاط درون یاب، آن را به یک دسته از قیود جبری تبدیل می کند. برای انتخاب نقاط درون یاب از ریشه های چند جمله ای های متعامد و یا ریشه های ترکیب خطی چند جمله ای های متعامد و مشتقاتشان استفاده می شود. نام گذاری روش های شبه طیفی نیز بر اساس انتخاب نقاط درون یاب است. به عنوان مثال، در روش شبه طیفی لژاندر [۱۲] از مجموعه نقاط لژاندر-گوس-لوباتو (LGL) [۱۳]، در روش شبه طیفی چبی شف [۱۴] از مجموعه نقاط چبی شف-گوس-لوباتو (CGL) [۱۵] و در روش شبه طیفی گوس [۱۶] از مجموعه نقاط لژاندر-گوس (LG) [۱۷]، به منظور نقاط درون یاب استفاده شده است. مثال

---

[۱] Pseudospectral methods
[۲] Spectral methods
[۳] Weighted residuals methods
[۴] Basis functions
[۵] Weight functions
[۶] Galerkin methods
[۷] Collocation methods
[۸] Tau methods
[۹] Orthogonal collocation methods
[۱۰] Lagrange interpolation polynomial
[۱۱] Interpolation points
[۱۲] Legendre pseudospectral method
[۱۳] Legendre-Gauss-Lobatto
[۱۴] Chebyshev pseudospectral method
[۱۵] Chebyshev-Gauss-Lobatto
[۱۶] Gauss pseudospectral method
[۱۷] Legendre-Gauss

هایی از این نوع را می توان برای روش شبه طیفی لژاندر در مراجع [۲۸،۲۹]، برای روش شبه طیفی چبی شف در مراجع [۳۰،۳۱،۳۲]، و برای روش شبه طیفی گوس در مراجع [۳۳،۳۴،۳۵]، یافت.

مزیت استفاده از روش های شبه طیفی نسبت به دیگر روش ها در مواردی است که مسأله دارای جواب هموار است، در این صورت این روش ها دارای نرخ همگرایی [۱] سریع تری می باشند و به همین دلیل دقت آن ها را دقت طیفی [۲] نامیده اند [۳۶]. با این همه، تحقیقات زیادی بر روی کاربرد این روش ها برای حل مسایل کنترل بهینه با جواب غیر هموار انجام گرفته است [۳۷،۳۸،۳۹]. لازم به ذکر است که در این پایان نامه روش جدید قطعه به قطعه [۳] شبه طیفی لژاندر را برای مسایل کنترل بهینه بنگ-بنگ [۴] نیز ارائه می دهیم [۴۰].

هدف اصلی در این پایان‌نامه آن است که با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد چبی‌شف و لژاندر، به حل عددی یک دسته کلی از مسائل کنترل بهینه بپردازیم.

در بخش بعد، انگیزه‌های تحقیق حاضر را به تفصیل می‌آوریم.

۲.۱ انگیزه‌های تحقیق

انگیزه‌های این تحقیق را می‌توان در چهار محور اصلی به صورت زیر بیان کرد:

۱.۲.۱ حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبی‌شف

ویژگی‌های زیادی، تکنیک‌های مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبی‌شف را برای حل مسائل کنترل بهینه، از بقیه روش‌های عددی متمایز می‌کند. از مهمترین این ویژگی‌ها می‌توان به ساده بودن فرآیند گسسته سازی و دقت بالای این روش ها، اشاره کرد. دقت بسیار بالای این تکنیک‌ها نسبت به روش‌های تفاضلات متناهی، از جمله روش اویلر و هرمیت سیمپسون، گویای این ویژگی برجسته چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبی‌شف است. در ضمن ذکر این نکته خالی از لطف نمی‌باشد که دقت طیفی (نمایی) این روش‌ها، مشروط به هموار بودن جواب مسئله است.

۲.۲.۱ توسیع روش‌های ارائه شده برای حل مسائل کنترل بهینه در افق نامتناهی

معمولاً مسائل کنترل بهینه در افق نامتناهی کمتر مورد توجه قرار می‌گیرند. با استفاده از تغییر متغیرهای مناسبی (که دارای شرایط هموار بودن، مشتق‌پذیری و اکیداً یکنوایی می‌باشند) می‌توان بازه محاسباتی $[0, \infty)$

[۱] Convergance rate
[۲] Spectral accuracy
[۳] Piecewise
[۴] Bang-Bang

را به یک بازه متناهی مانند $[-1, 1)$ تبدیل کرده و سپس از تکنیک چندجمله‌ای‌های لژاندر با اندکی اصلاح در استفاده از نقاط هم مکانی، برای حل این دسته از مسائل استفاده نمود.

۳.۲.۱ بهبود روش شبه طیفی لژاندر برای حل مسائل کنترل بهینه بنگ-بنگ

بخش عمده‌ای از مسائل کنترل بهینه، دارای جواب ناهموار هستند. به عنوان مثال دسته‌ای از مسائل کنترلی، دارای کنترل بهینه ناپیوسته بنگ-بنگ می باشند، لذا روش‌های کلاسیک ارائه شده شبه طیفی لژاندر و چبی‌شف برای حل این دسته مسائل کارا نمی‌باشد و می‌بایست این روش‌ها را بهبود بخشید. توجه داریم که به دلیل قطعه به قطعه هموار بودن کنترل بهینه در این نوع مسائل، باید روشی ارائه کرد که مبتنی بر قطعه به قطعه هموار بودن کنترل بهینه باشد.

۴.۲.۱ ارائه روش جدید شبه طیفی گوس برای حل مسائل کنترل بهینه با قیود انتگرالی

حل مسائل کنترل بهینه با قیود انتگرالی با استفاده از روش‌های شبه طیفی، کاملاً متفاوت از حل مسائل کنترل بهینه با قیود دیفرانسیلی می‌باشند. لذا ارائه یک روش کارا و مطلوب برای حل این دسته از مسائل کنترل بهینه لازم و ضروری است. استفاده از ایده‌های مدرن شبه طیفی در حل معادلات انتگرالی می‌تواند راهگشا باشد.

در بخش بعد، شیوه نگارش پایان‌نامه حاضر را می‌آوریم.

۳.۱ ساختار پایان‌نامه

با توجه به اهداف و انگیزه‌های بیان شده، شیوه نگارش این پایان‌نامه به صورت زیر می‌باشد:

- در فصل دوم، ابتدا به معرفی چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر و چبی‌شف و خواص آن‌ها می‌پردازیم. سپس مسئله کنترل بهینه خطی با تابع هدف درجه دوم و همچنین شرایط لازم بهینگی جواب برای این مسئله را به طور کامل معرفی کرده و در ادامه با استفاده از چندجمله‌ای‌های مذکور روش‌هایی را برای حل عددی مسئله ارائه می‌دهیم. در پایان با حل چند مثال، دقت روش را نشان می‌دهیم.

- در فصل سوم بعد از معرفی مسائل کنترل بهینه غیر خطی، روش ارائه شده در فصل قبل را با استفاده از نقاط هم مکانی خاصی به نام چبی‌شف-گوس-لوباتو (CGL) توسیع داده تا بتوان مسائل کنترل بهینه غیرخطی را نیز حل نمود. همچنین در این فصل، در قالب سه مثال به حل مسئله کوتاهترین مسیر محدود به یک و دو کران می‌پردازیم.

- در فصل چهارم، برای حل مسائل کنترل بهینه در افق نامتناهی از چند تغییر متغیر مناسب برای تبدیل بازه محاسباتی نامتناهی به یک بازه متناهی مناسب استفاده می‌کنیم و سپس با استفاده از دو روش مبتنی بر نقاط درون‌یاب لژاندر-گوس (LG) و لژاندر-گوس-رادو (LGR) ، مسئله را حل می‌نماییم. دو مثال ارائه شده و نتایج بدست آمده از آن‌ها، نشان دهنده دقت بالای روش می‌باشد.

- در فصل پنجم برای یک دسته از مسائل کنترل بهینه ناهموار که به مسائل کنترل بهینه بنگ-بنگ معروف هستند، یک روش شبه طیفی قطعه به قطعه هموار مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر را ارائه می‌دهیم و با ذکر چند مثال کارایی روش را برای این دسته از مسائل کنترل بهینه نشان می‌دهیم.

- در فصل ششم با استفاده از یک روش جدید ارائه شده برای حل معادلات انتگرالی، مسائل کنترل بهینه با قیود انتگرالی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در آخر به حل چندین مثال می‌پردازیم که در هر مورد نتایج عددی بدست آمده را ارائه خواهیم کرد.

- در فصل هفتم مباحث مطرح شده در فصل‌های قبل را جمع‌بندی کرده و کارهای بعدی را که می‌توان با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبی‌شف در حوزه‌های دیگر انجام داد بیان می‌کنیم.

فصل ۲

مسائل کنترل بهینه خطی با تابع هدف درجه دوم

مسائل کنترل بهینه خطی با تابع هدف درجه دوم متغیر با زمان از اهمیت خاصی برخوردار بوده و در کتب و مقالات فراوانی مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند [۴۱،۴۲].

در این فصل، با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر و چبی‌شف، اقدام به حل این دسته از مسائل کنترل بهینه خواهیم کرد. لذا، در ابتدا به معرفی چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر و چبی‌شف و خواص آن‌ها می‌پردازیم. همچنین مسئله مورد نظر و شرایط لازم بهینگی برای این مسئله را به طور کامل معرفی می‌کنیم. در ادامه این فصل، تکنیک‌های مشابهی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبی‌شف برای حل مسئله مذکور را ارائه خواهیم داد. در پایان فصل تعدادی مثال که مبین دقت و همگرایی بالای روش‌های ارائه شده می‌باشند را می‌آوریم.

۱.۲ خواص چندجمله‌ای‌های لژاندر

چندجمله‌ای‌های لژاندر که در بازه $[-۱,۱]$ متعامد می‌باشند در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند (برای آشنایی با مفهوم تعامد به منبع [۴] مراجعه کنید)

$$P_{i+۱}(x) = \frac{۲i+۱}{i+۱} x P_i(x) - \frac{i}{i+۱} P_{i-۱}(x) \qquad i \geq ۱ \tag{۱.۲}$$

به طوری که $P_۰(x) = ۱, P_۱(x) = x$. خاصیت تعامد این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر بیان می‌شود

$$\int_{-۱}^{۱} P_i(x) P_j(x) dx = \begin{cases} ۰ & i \neq j \\ \frac{۲}{۲i+۱} & i = j. \end{cases} \tag{۲.۲}$$

برای استفاده از این چندجمله‌ای‌ها، بر بازه $[\circ, h]$ چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته $\widehat{P}_i(t)$ را با استفاده تغییر متغیر $x = ۲(\frac{t}{h}) - ۱$ در(۱.۲) می‌سازیم. به عبارت دیگر خواهیم داشت

$$\widehat{P}_i(t) := P_i(۲\frac{t}{h} - ۱). \tag{۳.۲}$$

همچنین خاصیت تعامد برای چندجمله‌ای‌های جدید به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\int_\circ^h \widehat{P}_i(t)\widehat{P}_j(t)dt = \begin{cases} \circ & i \neq j \\ \frac{h}{۲i+۱} & i = j. \end{cases} \tag{۴.۲}$$

اگر تابع دلخواه $f(t)$ را که بر بازه $[\circ, h]$ انتگرال‌پذیر مطلق است، بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به صورت زیر بسط دهیم:

$$f(t) = \sum_{i=\circ}^{\infty} f_i \widehat{P}_i(t), \tag{۵.۲}$$

ضرایب f_i از فرمول زیر بدست می‌آیند

$$f_i = \frac{۲i+۱}{h} \int_\circ^h f(t)\widehat{P}_i(t)dt. \tag{۶.۲}$$

اگر در فرمول (۵.۲) سری را تا r جمله اول قطع دهیم، خواهیم داشت

$$f(t) \approx \sum_{i=\circ}^{r-۱} f_i \widehat{P}_i(t) = f^T.\widehat{P}(t), \tag{۷.۲}$$

به طوری که:

$$\widehat{P}^T(t) = [\widehat{P}_\circ(t), \widehat{P}_۱(t), \dots, \widehat{P}_{r-۱}(t)] \quad , \quad f^T = [f_\circ, f_۱, \dots, f_{r-۱}] \tag{۸.۲}$$

۱.۱.۲ مشتق‌گیری چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته

فرض کنیم که مشتق تابع $f(t)$ در معادله (۵.۲) به صورت زیر نوشته شود:

$$\dot{f}(t) = \sum_{i=\circ}^{\infty} g_i \widehat{P}_i(t). \tag{۹.۲}$$

رابطه بین ضرایب f_i در (۵.۲) و g_i در (۹.۲) با استفاده از فرمول بازگشتی زیر بدست خواهد آمد [۴]

$$\widehat{P}_i(t) = \frac{h}{۲(۲i+۱)}[\dot{\widehat{P}}_{i+۱}(t) - \dot{\widehat{P}}_{i-۱}(t)]. \tag{۱۰.۲}$$

با استفاده از (۱۰.۲)، معادله (۹.۲) به فرم زیر در خواهد آمد

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \sum_{i=\circ}^{\infty} \frac{hg_i}{۲(۲i+۱)} \dot{\widehat{P}}_{i+۱}(t) - \sum_{i=\circ}^{\infty} \frac{hg_i}{۲(۲i+۱)} \dot{\widehat{P}}_{i-۱}(t) \\ &= \sum_{i=۱}^{\infty} \frac{hg_{i-۱}}{۲(۲i-۱)} \dot{\widehat{P}}_i(t) - \sum_{i=-۱}^{\infty} \frac{hg_{i+۱}}{۲(۲i+۳)} \dot{\widehat{P}}_i(t) \\ &= \sum_{i=۱}^{\infty} h\left[\frac{g_{i-۱}}{۲(۲i-۱)} - \frac{g_{i+۱}}{۲(۲i+۳)}\right] \dot{\widehat{P}}_i(t). \end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

توجه داشته باشید که بدون از دست دادن کلیت مسأله از دو جمله ی اول سری $\sum_{i=-1}^{\infty} \frac{hg_{i+1}}{2(2i+3)}\widehat{P}_i(t)$ در محاسبات بالا صرف نظر کرده ایم. اکنون با مشتق گیری از (۵.۲) داریم

$$\dot{f}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \dot{\widehat{P}}_i(t) \tag{۱۲.۲}$$

توجه داریم دلیل این که اندیس سری بالا از $i = 1$ شروع می شود این است که $\dot{\widehat{P}}_0(t) = 0$. اکنون با برابر قرار دادن ضرایب $\dot{\widehat{P}}_i(t)$ در (۱۱.۲) و (۱۲.۲) خواهیم داشت

$$h[(2i+3)g_{i-1} - (2i-1)g_{i+1}] - 2(2i-1)(2i+3)f_i = 0 \qquad i = 1, 2, \dots \tag{۱۳.۲}$$

۲.۱.۲ ضرب چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته

ضرب دو چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته به شکل $\widehat{P}_j(t)\widehat{P}_i(t)$، می‌تواند به صورت زیر تقریب زده شود

$$\widehat{P}_i(t)\widehat{P}_j(t) \approx \sum_{n=0}^{r-1} \gamma_{ijn}\widehat{P}_n(t) \tag{۱۴.۲}$$

به طوری که γ_{ijn} ها، از رابطه (۶.۲) به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\gamma_{ijn} = \frac{2n+1}{h}\int_0^h \widehat{P}_i(t)\widehat{P}_j(t)\widehat{P}_n(t)dt \qquad 0 \le n \le r-1 \tag{۱۵.۲}$$

۲.۲ خواص چندجمله‌ای‌های چبی‌شف

چندجمله‌ای‌های چبی‌شف نیز که در بازه $[-1, 1]$ متعامد می‌باشند، در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$T_{i+1}(x) = 2xT_i(x) - T_{i-1}(x) \qquad i \ge 1, \tag{۱۶.۲}$$

به طوری که $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$. خاصیت تعامد این چندجمله‌ای‌ها، به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{\pi}{2} & i = j \neq 0 \\ \pi & i = j = 0. \end{cases} \tag{۱۷.۲}$$

مشابه حالت قبل، برای استفاده از این چندجمله‌ای‌ها بر بازه $[0, h]$ از تغییر متغیر $x = 2(\frac{t}{h}) - 1$، استفاده کرده تا چندجمله‌ای چبی‌شف انتقال داده شده $\widehat{T}_i(t)$ را مطابق زیر داشته باشیم

$$\widehat{T}_i(t) := T_i(2\frac{t}{h} - 1) \tag{۱۸.۲}$$

خاصیت تعامد چندجمله‌ای‌های جدید طبق رابطه زیر بیان می‌شود

$$\int_0^h \frac{\widehat{T}_i(t)\widehat{T}_j(t)}{\sqrt{1-(\frac{2t}{h}-1)^2}}dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{h\pi}{4} & i = j \neq 0 \\ \frac{h\pi}{2} & i = j = 0. \end{cases} \tag{۱۹.۲}$$

بسط تابع دلخواه $f(T)$ که بر بازه $[0,h]$ انتگرال‌پذیر مطلق است، بر حسب چندجمله‌ای‌های چبی‌شف انتقال یافته می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$f(t)=\sum_{i=0}^{\infty}{}' f_i\widehat{T}_i(t). \qquad (۲۰.۲)$$

به طوری که علامت $(')$ بیانگر این است که جمله اول تقسیم بر ۲ شده است و

$$f_i=\frac{4}{\pi h}\int_0^h \frac{f(t)\widehat{T}_i(t)}{\sqrt{1-(\frac{2t}{h}-1)^2}}dt \qquad 0\le i<\infty \qquad (۲۱.۲)$$

اگر در فرمول (۲۰.۲) سری را تا r جمله اول قطع دهیم، داریم

$$f(t)\approx\sum_{i=0}^{r-1}{}' f_i\widehat{T}_i(t)=f^T.\widehat{T}(t) \qquad (۲۲.۲)$$

به طوری که

$$\widehat{T}^T(t)=[\widehat{T}_0(t),\dots,\widehat{T}_{r-1}(t)] \quad , \quad f^T=[\frac{f_0}{2},f_1,\dots,f_{r-1}] \qquad (۲۳.۲)$$

۱.۲.۲ مشتق‌گیری چندجمله‌ای‌های چبی‌شف انتقال یافته

فرض می‌کنیم که مشتق تابع $f(t)$ در معادله (۲۰.۲) به صورت زیر نوشته شود

$$\dot{f}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}{}' g_i\widehat{T}_i(t). \qquad (۲۴.۲)$$

رابطه بین ضرایب f_i در (۲۰.۲) و g_i در (۲۴.۲)، با استفاده از فرمول بازگشتی زیر بدست می‌آید [۴]

$$\widehat{T}_i(t)=\frac{h}{4}\left[\frac{\dot{\widehat{T}}_{i+1}(t)}{i+1}-\frac{\dot{\widehat{T}}_{i-1}(t)}{i-1}\right], \qquad i\ge 2. \qquad (۲۵.۲)$$

با استفاده از (۲۵.۲) معادله (۲۴.۲) به صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$\begin{aligned}\dot{f}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty}{}'\frac{hg_i}{4}\frac{\dot{\widehat{T}}_{i+1}(t)}{i+1}-\sum_{i=0}^{\infty}{}'\frac{hg_i}{4}\frac{\dot{\widehat{T}}_{i-1}(t)}{i-1}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}{}'\frac{hg_{i-1}}{4}\frac{\dot{\widehat{T}}_i(t)}{i}-\sum_{i=-1}^{\infty}{}'\frac{hg_{i-1}}{4}\frac{\dot{\widehat{T}}_i(t)}{i}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}{}'\frac{h}{4}\frac{(g_{i-1}-g_{i+1})}{i}\dot{\widehat{T}}_i(t). \qquad (۲۶.۲)\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در این جا نیز بدون از دست دادن کلیت مسأله از دو جمله ی اول سری $\sum_{i=-1}^{\infty}\frac{hg_{i-1}}{4}\frac{\dot{\widehat{T}}_i(t)}{i}$ در محاسبات بالا صرف نظر کرده ایم. حال با مشتق گیری از (۲۰.۲) داریم

$$\dot{f}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}{}' f_i\dot{\widehat{T}}_i(t). \qquad (۲۷.۲)$$

با برابر قرار دادن ضرایب $\dot{\hat{T}}_i(t)$ در (۲۶.۲) و (۲۷.۲) خواهیم داشت

$$h(g_{i-1} - g_{i+1}) - 4if_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots \tag{۲۸.۲}$$

۳.۲ بیان مسئله کنترل بهینه خطی با تابع هدف درجه دوم و شرایط لازم بهینگی برای آن

مسئله کنترل بهینه زیر را در نظر می‌گیریم:

بردار متغیرهای کنترل $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_q(t))^T$ را به گونه‌ای بیابید تا بردار متغیرهای وضعیت به صورت $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ که در معادله دینامیک خطی

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{۲۹.۲}$$

با شرط اولیه

$$x(0) = x_0 \tag{۳۰.۲}$$

صدق می‌کند، تابعی معیار بولزای

$$J = \frac{1}{2}x^T(h)Sx(h) + \frac{1}{2}\int_0^h [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt \tag{۳۱.۲}$$

را مینیمم سازد. در ضمن $B(t), A(t)$ ماتریس‌هایی در ابعاد متناسب با $u(t), x(t)$ هستند و $R(t), Q(t)$ به ترتیب ماتریس‌هایی نیمه معین مثبت و معین مثبت می‌باشند. در ادامه فرض می‌کنیم $n = q$. همچنین در سراسر این فصل متغیرهای کنترل و حالت را پیوسته ی مطلق فرض می کنیم. توجه داشته باشید که حالتی که متغیر کنترل قطعه به قطعه پیوسته است را به تفصیل در فصل پنجم مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد.

کنترل بهینه مسئله بالا بر حسب متغیر حالت از فرمول زیر بدست می‌آید [۴۳]

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)W(t)x(t) \tag{۳۲.۲}$$

به طوری که $W(t)$ جواب معادله ماتریسی ریکاتی زیر است

$$\dot{W}(t) = -W(t)A(t) - A^T(t)W(t) + W(t)B(t)R(t)B^T(t)W(t) - Q(t) \tag{۳۳.۲}$$