دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

طول کلاسهای تزویج و ساختار یک گروه متناهی

استاد راهنما

دکتر کمال عزیزی هریس

استاد مشاور

دکتر حسن مهتدی فر

پژوهشگر

حامد حیدری

تیر ۱۳۹۰

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به مادر مهربان و پدر بزرگوارم

که فداکاری و محبت را در وجود آنها یافتم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.
تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.
به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد بسیار عزیز و گرانقدرم، جناب آقای دکتر کمال عزیزی هریس، که همچون برادری دلسوز و دوستی مهربان مرا در انجام این رساله یاری فرمودند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم و قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از استاد عزیز و ارجمندم، جناب آقای دکتر حسن مهتدی‌فر که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از استاد بزرگوار و عزیزم، جناب آقای دکتر محمد شهریاری که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند و در طول دوران تحصیل از راهنمایی‌ها و رهنمودهای بی‌دریغ ایشان بهره‌مند گشته‌ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

ازکلیه اساتید گرامی دوران تحصیلم، بویژه اساتید علم، ادب و اخلاق جناب آقای دکتر رضا نقی‌پور، دکتر اصغر رنجبری و دکتر احد مهدی‌زاده که همچون پدری دلسوز مرا مورد لطف و عنایت خویش قرار دادند و همواره از نظر علمی و از نظر روحی و روانی پشتیبان من بودند، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم و نیز از جناب آقای دکتر حمید موسوی مدیرگروه ریاضی محض و کارکنان محترم دانشکده علوم ریاضی که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

حامد حیدری

خرداد ۱۳۹۰

نام خانوادگی: حیدری نام: حامد

عنوان پایان‌نامه: طول کلاسهای تزویج و ساختار یک گروه متناهی

استاد راهنما: دکتر کمال عزیزی هریس

استاد مشاور: دکترحسن مهتدی‌فر

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش:جبر

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیر ۱۳۹۰ تعداد صفحه:۸۳

کلیدواژه‌ها: طول کلاسهای تزویج، حلپذیری، پوچتوانی

چکیده

در سال‌های اخیر موضوع بسیار مهمی که توسط کارشناسان نظریه گروههای متناهی بررسی می شود، این است که چه ارتباطی بین طول کلاسهای تزویج یک گروه متناهی و ساختار آن گروه وجود دارد. به عبارت دیگر اگر طول کلاسهای تزویج یک گروه متناهی را بدانیم، آنگاه در رابطه با ساختار آن گروه چه اطلاعات مفیدی می‌توانیم به دست آوریم. در این پایان‌نامه فرض می‌کنیم که مجموعه طول کلاسهای تزویج گروه G مجموعه $\{1, m, n, mn\}$باشد، که درآن m و n اعدادطبیعی متباین هستند.

نشان می‌دهیم که G گروه حلپذیراست و نتیجه خواهیم گرفت که G گروه پوچتوان است و اعداد اول p و q موجودند بطوریکه $m = p^a$ و $n = q^b$ که در آن a و b اعداد صحیح نامنفی هستند. به بیان دقیقتر،

تعریف : فرض کنیم G گروه متناهی باشد. در این‌صورت طول کلاسهای تزویج G عبارت است از$\{| G : C_G(x) | : x \in G\}$ که درآن$C_G(x)$مرکزسازعضو x درG است.

قضیه: فرض می‌کنیم که مجموعه طول کلاسهای تزویج گروه G مجموعه $\{1, m, n, mn\}$باشد، که درآن m و n اعداد طبیعی متباین هستند. در این‌صورت گروه G گروهی حلپذیر است.

نتیجه: فرض می‌کنیم که مجموعه طول کلاسهای تزویج گروه G مجموعه $\{1, m, n, mn\}$باشد، که درآن m و n اعداد طبیعی متباین هستند. در این‌صورت گروه G گروهی پوچتوان است و اعداد اول p و q موجودند بطوریکه $m = p^a$ و $n = q^b$ که در آن a و b اعداد صحیح نامنفی هستند.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال‌های اخیر موضوع بسیار مهمی که توسط کارشناسان نظریه گروههای متناهی بررسی می‌شود، این است که چه ارتباطی بین طول کلاسهای تزویج یک گروه متناهی و ساختار آن گروه وجود دارد. به عبارت دیگر اگر طول کلاسهای تزویج یک گروه متناهی را بدانیم، آنگاه در رابطه با ساختار آن گروه چه اطلاعات مفیدی می‌توانیم به دست آوریم. در این پایان‌نامه که با توجه به مرجع [۳] می‌باشد فرض می‌کنیم که مجموعه طول کلاسهای تزویج گروه G مجموعه $\{1, m, n, mn\}$ باشد، که درآن m و n اعداد طبیعی متباین هستند و نشان می‌دهیم که G گروه حلپذیر است و نتیجه خواهیم گرفت که G گروه پوچتوان است و اعداد اول p و q موجودند بطوریکه $m = p^a$ و $n = q^b$ که در آن aو b اعداد صحیح نامنفی هستند. در ابتدا باید مفهوم طول کلاسهای تزویج را توضیح دهیم. لذا فرض می‌کنیم که G گروه متناهی باشد. در این‌صورت طول کلاسهای تزویج G عبارت است از $\{| G : C_G(x) |: x \in G\}$ که درآن $C_G(x)$مرکزسازعضو x درG است. برای نشان دادن اینکه گروه G حلپذیر است ابتدا حالت خاصی از قضیه بالا را بیان و اثبات خواهیم کرد و لذا فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی باشد بطوریکه مجموعه طول کلاسهای تزویج G مجموعه $\{1, p^a, n, p^a n\}$ باشد که در آن $(p, n) = 1$ و $a \geq 0$. در این‌صورت نشان می‌دهیم که G حلپذیر است و در نهایت، قضیه اصلی را با بکارگیری حالت خاص اثبات خواهیم کرد و ازاینرو ساختار این پایان‌نامه شامل موارد زیر است:

در فصل اول، مفاهیم ضروری و اولیه مانند تعاریف و قضایای مقدماتی را که در اثبات قضایای بالا به آنها نیازمندیم، بیان خواهیم کرد و در فصل دوم حالت خاصی از قضیه اصلی را بیان و اثبات می‌کنیم و در نهایت، در فصل سوم قضیه اصلی را بیان و اثبات خواهیم کرد.

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی وتعاریف

۱.۱ مقدمه

دراین فصل، مفاهیم ضروری و اولیه را که در این پایان نامه به آنها نیازمندیم، بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱.۱.۱. مفاهیم $\pi-$عدد، $\pi-$گروه و $\pi-$زیرگروه هال را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

۱) فرض کنیم π یک مجموعه از اعداد اول باشد. در این‌صورت عدد صحیح n را یک $\pi-$عدد گوییم، اگر همه اعداد اولی که n را عاد می‌کنند، در مجموعه π قرار گیرند.

۲) گروه H را یک $\pi-$گروه گوییم هرگاه مرتبه گروه H یک $\pi-$عدد باشد.

۳) اگر $H \leq G$ آنگاه گروه H را یک $\pi-$زیرگروه هال گوییم هرگاه $\mid H \mid$ یک $\pi-$عدد و $\mid G : H \mid$ یک $\pi'-$عدد باشد که در π' برابر همه اعداد اول منهای اعداد اول مجموعه π است. واضح است که اگر $H \in Hall_{\pi}(G)$ آنگاه

$$(\mid H \mid, \mid G : H \mid) = 1$$

که

$$.Hall_{\pi}(G) = \{H \leqslant G \mid \text{است } G \text{ زیرگروه} - \pi \ , \ H\}$$

حال لم بسیار مهم و اساسی زیر را بیان می‌کنیم که نقش بسیار مهمی در اثبات قضایای فصل دوم و فصل سوم دارد.

لم ۲.۱.۱. *فرض کنیم π مجموعه‌ای از اعداد اول و G یک گروه متناهی باشد. اگر $g \in G$ آنگاه عناصر x و y با خواص زیر موجوداند:*

الف- x یک π'- عضو و y یک π- عضو است.

ب- $.g = xy$

ج- $.xy = yx$

د- x و y با خواص فوق منحصربفرد هستند.

اثبات. فرض می‌کنیم $o(g) = n$ و $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$ یک تجزیه n به حاصلضرب اعداد اول متمایز باشد که در آن $\alpha_1, ..., \alpha_r$ اعداد صحیح مثبت هستند. قرارمی‌دهیم:

$$A = \{p_i : \ p_i \in \pi\} \ \ , \ B = \{p_i : \ p_i \notin \pi\}$$

و

$$.m_1 = \prod_{p_i \in A} p_i^{\alpha_i} \ \ , \ m_2 = \prod_{p_i \in B} p_i^{\alpha_i}$$

پس $n = m_1 m_2$ و $(m_1, m_2) = 1$. با توجه به قضیه‌ای در نظریه اعداد، اعداد صحیح $r, s \in \mathbb{Z}$ وجود دارند بطوریکه

$$.rm_1 + sm_2 = 1$$

فرض می‌کنیم که $y = g^{sm_2}$ و $x = g^{rm_1}$. خواهیم داشت:

$$.g = g^1 = g^{rm_1 + sm_2} = g^{rm_1} g^{sm_2} = xy$$

از طرف دیگر $x^{m_2} = (g^n)^r = 1^r = 1$ و $y^{m_1} = (g^n)^s = 1^s = 1$. نتیجه می‌گیریم که x یک π'−عضو و y یک π−عضو است. همچنین از آنجاییکه xو y توانهایی از g هستند، بنابراین با هم جابجا می‌شوند. برای اثبات منحصر به فردی، فرض می‌کنیم که $g = uv$ که u یک π'−عضو و v یک π−عضو است و $uv = vu$. در این‌صورت نشان می‌دهیم که $u = x$ و $v = y$. بنابراین $g = uv = xy$ و لذا $x^{-1}u = yv^{-1}$. اما از آنجایی که u با خودش و v جابجا می‌شود و v نیز با خودش و u جابجا می‌شوند، پس u و v هر دو با g و لذا با توانهای g جابجا می‌شوند. بنابراین

$$o(yv^{-1}) = [o(y), o(v)] \text{ و } o(x^{-1}u) = [o(x), o(u)].$$

ازاینرو $x^{-1}u = yv^{-1}$ هم یک π−عضو است و هم یک π'−عضو است زیرا که $[o(x), o(u)]$ یک π'−عدد و $[o(y), o(v)]$ یک π−عدد است. لذا $x^{-1}u = yv^{-1} = 1$ و ازاینرو $u = x$ و $v = y$. $\square$

در لم ۲.۱.۱، x را π'−قسمت g و y را π−قسمت g می‌گوییم. حال با بکارگیری لم قبلی، لم اساسی و بسیار مفید زیر را بیان می‌کنیم:

لم ۳.۱.۱. *اگر G یک گروه متناهی و $x, y \in G$ طوری باشند که با هم جابجا می‌شوند، x یک π'− عضو و y یک π− عضو باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است:*

$$C_G(xy) = C_G(x) \cap C_G(y).$$

اثبات. در ابتدا واضح است که $C_G(x) \cap C_G(y) \subseteq C_G(xy)$. بنابراین کافی است نشان دهیم که:

$$C_G(xy) \subseteq C_G(x) \cap C_G(y).$$

برای این منظور $g \in C_G(xy)$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$(gxg^{-1})(gyg^{-1}) = xy.$$

چون gxg^{-1} با x و gyg^{-1} با y مزدوجند پس gxg^{-1} یک π'−عضو و gyg^{-1} یک π−عضو است و واضح است که gxg^{-1} با gyg^{-1} جابجا می‌شود. حال منحصر به فردی x و y

در لم ۲.۱.۱، ایجاب می‌کند که $gxg^{-1} = x$ و $gyg^{-1} = y$. بنابراین $g \in C_G(x)$ و $g \in C_G(y)$ و ازاینرو $g \in C_G(x) \cap C_G(y)$. □

قضیه ۴.۱.۱. ($Burnside$'s $p^a q^b - theorem$)
فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه $p^a q^b$ باشد که در آن p و q اعداد اول هستند. در این‌صورت G حلپذیر است.

اثبات. رجوع شود به (قضیه ۷.۸) از [۸]. □

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه و $N \trianglelefteq G$ باشد. در این‌صورت اگر N و $\frac{G}{N}$ هر دو حلپذیر باشند، آنگاه G حلپذیر است.*

اثبات. رجوع شود به (لم ۳.۱۰) از [۸]. □

لم ۶.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $y \in G$ طوری باشد که به ازای هر عدد اول q ای که مرتبه y را عاد می کند، $q-$قسمت y در $Z(G)$ قرار داشته باشد. آنگاه $y \in Z(G)$ است.*

اثبات. فرض کنید $o(y) = q_1^{\beta_1}...q_k^{\beta_k}$ تجزیه مرتبه y باشد که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq k$، q_i ها اعداد اول متمایز هستند. در این‌صورت با توجه به لم ۲.۱.۱، می‌توان نوشت:

$$y = y_1 y'$$

که در آن y_1 یک q_1- عضو است و y' یک $q_1'-$ عضو است و همچنین با توجه لم ۲.۱.۱، می‌توان نوشت:

$$y' = y_2 y''$$

که در آن y_2 یک $q_2 -$ عضو است و y'' یک $q_2' -$ عضو است. اگر این روند را ادامه دهیم داریم:

$$y = y_1 y_2 ... y_k$$

که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq k$، y_i یک q_i-عضو است. طبق فرض داریم $y_i \in Z(G)$ و بنابراین $y \in Z(G)$. □

تعریف ۷.۱.۱. کوچکترین زیر گروه نرمال G با این خاصیت که گروه خارج‌قسمت متناظر یک $p-$گروه باشد را با علامت $O^p(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم A یک زیر گروه G باشد. در این‌صورت زیرگروه B از گروه G را یک مکمل برای زیر گروه A گوییم، در صورتی که $A \cap B = 1$ و $AB = G$ باشد.

قضیه ۹.۱.۱. $(Schur - Zassenhaus\ theorem)$

فرض کنیم N زیرگروه نرمال G باشد به طوریکه $(\mid N \mid, \mid G : N \mid) = 1$ باشد. دراین صورت داریم :

۱) *N یک مکمل در G دارد، یعنی اینکه $H \leq G$ موجود است بطوریکه*

$$N \cap H = 1 \quad \text{و} \quad G = NH.$$

۲) *اگر حداقل یکی از N یا $\frac{G}{N}$ حلپذیر باشند، در این‌صورت هر دو مکمل برای N در G با هم مزدوج هستند.*

اثبات. رجوع شود به (قضیه ۳.۵) از [۸]. □

تعریف ۱۰.۱.۱. گروه G را $p-$حلپذیر گوییم، هرگاه یک سری نرمال مانند:

$$1 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq ... \subseteq N_k = G$$

وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant k-1$ ، عامل $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ یک $p-$گروه یا یک $p'-$گروه باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. زیرگروه H از G را یک $p-$متمم گوییم هرگاه اندیس H در G توانی از عدد اول p باشد و مرتبه آن بر عدد اول p بخشپذیر نباشد. واضح است که در این‌صورت:

$$(\mid H \mid, \mid G : H \mid) = 1.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. گروه متناهی G را یک $\pi-$جدایی‌پذیر گوییم که در آن π یک مجموعه از اعداد اول می‌باشد، هرگاه یک سری نرمال مانند:

$$1 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq ... \subseteq N_k = G$$

وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant k$، هر عامل $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ یک $\pi-$گروه یا یک $\pi'-$گروه باشد.

قضیه ۱۳.۱.۱. $(Thompson\ 's\ P \times Q - theotem)$
فرض کنیم که گروه $P \times Q$ روی گروه R به صورت اتومرفیسم عمل کند که در آن P و R هر دو $p-$گروه هستند، عدد اول p مرتبه گروه Q را عاد نمی‌کند و $C_R(P) \leq C_R(Q)$. در این صورت Q به طور بدیهی روی R عمل می‌کند. به عبارت دیگر $C_R(Q) = R$.

اثبات. رجوع شود به (قضیه ۴.۳۱) از [۸]. □

قضیه ۱۴.۱.۱. (ویلانت)[۱] *اگر گروه متناهی G دارای $p-$متمم آبلی به ازای بعضی عدد اول p باشد، آنگاه G حلپذیر است.*

اثبات. رجوع شود به از [۷].

□

حال قضیه ویلانت را در مورد $\pi-$زیرگروه‌های هال پوچتوان از یک گروه متناهی بیان می‌کنیم که این قضیه ۱۰.۱.۴ از مرجع [۱۳] است:

قضیه ۱۵.۱.۱. (ویلانت)[۲] *فرض کنیم G گروه متناهی شامل $\pi-$زیرگروه هال پوچتوان H باشد. در این‌صورت هر $\pi-$زیرگروه G در مزدوجی از H مشمول می‌شود. بویژه همه $\pi-$زیرگروه‌های هال G مزدوج هستند.*

[۱] wielandt
[۲] wielandt

فصل ۲

بررسی حالت خاصی از قضیه اصلی

در این فصل حالت خاصی از قضیه اصلی را بیان و اثبات می کنیم. اما قبل از بیان این قضیه چند لم و قضیه را که در اثبات این قضیه به کار رفته اند بیان می نماییم.

۱.۲ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم G یک گروه متناهی و $x \in G$ عضو دلخواهی باشد. در این صورت طول کلاس تزویج x در G را اندیس x در G گوییم. به عبارت دیگر، اگر $x^G = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$ کلاس تزویج باشد، آنگاه اندیس x در G عبارت است از $| x^G |$. باید ذکر کرد که در حقیقت اندیس $x \in G$ در Gهمان اندیس مرکز ساز x در G است. مجموعه همه اندیس‌های اعضای گروه G را با علامت $cs(G)$ نشان می‌دهیم.

لم ۲.۱.۲. *فرض کنیم G گروهی متناهی و p عدد اول باشد. اگر برای هر p'− عضو $x \in G$, اندیس x در G نیز یک p'− عدد باشد، آنگاه G حاصلضرب مستقیم یک p− گروه و یک p'− گروه است.*

اثبات. رجوع شود به (لم ۴) از [۵]. □

لم ۳.۱.۲. *فرض کنیم G گروه π− جدایی‌پذیر باشد. در این‌صورت طول کلاس تزویج هر π− عضو یک π− عدد است اگر و فقط اگر $G = H \times K$ که در آن H یک π− زیرگروه هال G و K یک π− متمم G است.*

اثبات. رجوع شود به (لم ۸) از [۲]. □

با توجه به اینکه هر گروه p–حلپذیر دقیقا یک گروه p–جدایی‌پذیر است، بنابراین با بکاربردن لم ۳.۱.۲ برای گروه‌های p–حلپذیر، لم ۲.۱.۲، را نتیجه می‌گیریم. از طرف دیگر، اگر گروه G یک گروه p–حلپذیر باشد، بطوریکه طول هیچ کلاس تزویجی بر عدد اول p قابل‌قسمت نباشد، آنگاه طول کلاس تزویج هر p'–عضوی یک p'–عدد است و لذا با استفاده از لم ۳.۱.۲، برای $\pi = p'$ نتیجه می‌گیریم که $G = H \times K$ که در آن H یک p'–زیرگروه هال و K یک p–زیرگروه سیلوی G خواهد بود. در این‌صورت

$$\begin{aligned} cs(G) &= cs(H) \times cs(K) \\ &= \{uv :\ u \in cs(H) \text{ و } v \in cs(K)\}. \end{aligned}$$

اما می‌دانیم که طول هیچ کلاس تزویجی از G به p قابل‌قسمت نیست. چون K یک p–گروه است و طول کلاسهای تزویج K طول کلاسهای تزویج G را عاد می‌کنند، پس K باید آبلی باشد. ازاینرو $K \subseteq C_G(K)$. همچنین چون $G = H \times K$ حاصل‌ضرب مستقیم است، پس $H \subseteq C_G(K)$. بنابراین $G = HK \subseteq C_G(K)$ و لذا $K \subseteq Z(G)$. به عبارت دیگر G دارای p–زیرگروه سیلوی مرکزی است. در لم بعدی، در حقیقت، نشان می‌دهیم که برای بدست آوردن این نتیجه نیازی به p–حلپذیر بودن گروه G نداریم.

لم ۴.۱.۲. *فرض کنیم G گروه متناهی و p عدد اول باشد. در این‌صورت طول هیچ کلاس تزویج G بر p قابل‌قسمت نیست اگر و فقط اگر G دارای p– زیرگروه سیلوی مرکزی باشد.*

اثبات. رجوع شود به (قضیه ۴۳.۴) از [۷]. □

قضیه بعدی که یک قضیه از ان. ایتو [۱] می‌باشد، ساختار گروه‌های متناهی با دقیقا دو طول کلاس تزویج را بدست می‌دهد.

قضیه ۵.۱.۲. *فرض کنیم G گروه متناهی باشد بطوریکه مجموعه طول کلاس‌های تزویج G مجموعه $\{1, m\}$ می‌باشد که در آن $m > 1$ عدد طبیعی است. در این‌صورت*

$$G = P \times A$$

که $P \in Syl_p(G)$ و A یک زیرگروه آبلی است، بویژه m توانی از عدد اول p است.

[۱] N. Ito

اثبات. رجوع شود به (قضیه ۴۳.۶) از [۷]. □

قضیه بعدی، لم تامپسون [۲] می‌باشد.

قضیه ۶.۱.۲. *فرض کنیم G یک $p-$گروه متناهی و $AB \leq Aut(G)$ بطوریکه*

$$[A, C_G(B)] = 1 \quad \text{و} \quad [A, B] = 1.$$

همچنین فرض می‌کنیم که B یک $p-$گروه و $A = O^p(A)$. در این صورت

$$[A, G] = 1.$$

اثبات. رجوع شود به (قضیه ۲۴.۲) از [۱]. □

در نهایت برای اثبات قضیه اصلی به لم زیر نیز نیاز خواهیم داشت:

لم ۷.۱.۲. *فرض کنیم G گروهی متناهی باشد و عناصر $cs(G)$ بصورت زیر مرتب شوند:*

$$1 < a < b < c < \ldots.$$

فرض کنیم $(a, b) = 1$ و $a^2 < c$. در این‌صورت مجموعه $\{g \in G : |g^G| = 1 \text{ یا } a\}$ یک زیرگروه نرمال G است.

اثبات. رجوع شود به (لم ۶) از [۳]. □

در ادامه این فصل حالت خاصی از قضیه اصلی را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۸.۱.۲. *فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد بطوریکه مجموعه طول کلاسهای تزویج G مجموعه $\{1, p^a, n, p^a n\}$ باشد که در آن $(p, n) = 1$ و $a \geq 0$. دراین‌صورت G حلپذیر است.*

اثبات. برای اثبات این قضیه، کافی است دو حالت زیر را در نظر بگیریم:

---

[۲] Thompson

۲.۲ حالت اول: گروه G دارای $p-$عضوی از اندیس p^a می‌باشد.

فرض کنیم x یک $p-$عضو از اندیس p^a است و $p'-$عضو دلخواه $y \in C_G(x)$ را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که اندیس y در $C_G(x)$ برابر 1 یا n است. برای نشان دادن این ادعا طبق رابطه $C_{C_G(x)}(y) = C_G(x) \cap C_G(y) = C_G(xy)$ و لذا $C_G(xy) \leq C_G(x)$ داریم:

$$| G : C_G(xy) |=| G : C_G(x) | \, | C_G(x) : C_G(xy) |= p^a \, | C_G(x) : C_G(xy) | .$$

از آنجاییکه $| G : C_G(xy) |$ در مجموعه کلاس‌های تزویج G قرار دارد، و ساختار این مجموعه ایجاب می‌کند که n یا $1 =| C_G(x) : C_G(xy) |$ و ازاینرو y در $C_G(x)$ دارای اندیس 1 یا n است. با بکاربردن لم ۲.۱.۲، نتیجه می‌گیریم که $C_G(x) = P_o \times A$ که در آن $P_o \in Syl_p(C_G(x))$ و A یک $p'-$گروه است. بنابراین A زیرگروه G از اندیس توانی از p می‌باشد زیرا که P_o یک $p-$گروه و $| G : C_G(x) |= p^a$ است. حال ادعا می‌کنیم که $cs(A) \subseteq \{1, n\}$. برای اثبات این ادعا، فرض می‌کنیم $t \notin Z(A)$ و نشان می‌دهیم که $|A : C_A(t)| = n$. بنابه اینکه $t \in A \leq C_G(x) = P_o \times A$، لذا $t \in C_G(x)$ یک $p'-$عضو است. طبق لم ۲.۱.۱، می‌دانیم که $C_{C_G(x)}(t) = C_G(x) \cap C_G(t) = C_G(xt)$ و ازاینرو

$$| G : C_G(xt) |=| G : C_G(x) | \, | C_G(x) : C_{C_G(x)}(t) |= p^a \ | C_G(x) : C_{C_G(x)}(t) | .$$

بنابه ساختار مجموعه طول کلاس‌های تزویج G، بدست می‌آوریم که

$$n \text{ یا } 1 =| C_G(x) : C_{C_G(x)}(t) | .$$

از طرف دیگر، چون $t \in C_G(x) = P_o \times A$، بنابراین $C_{C_G(x)}(t) = P_o \times C_A(t)$. نتیجه می‌گیریم که

$$| C_G(x) : C_{C_G(x)}(t) |= \frac{| P_o || A |}{| P_o || C_A(t) |} =| A : C_A(t) |= 1 \text{ یا } n .$$

اما چون $t \notin Z(A)$، بنابراین $|A : C_G(t)| = n$ و ازاینرو $cs(A) \subseteq \{1, n\}$. ابتدا فرض می‌کنیم که $cs(A) = \{1, n\}$. در این‌صورت با استفاده از قضیه ۵.۱.۲، نتیجه می گیریم که n توانی از عدد اولی مانند q است و $A = R \times S$ حاصلضرب مستقیم $q-$زیرگروه سیلوی R از A و گروه آبلی S می‌باشد. ازاینرو $cs(G) = \{1, p^a, q^i, p^a q^i\}$ که در آن $n = q^i$ و i عدد طبیعی می‌باشد. طبق لم ۴.۱.۲، گروه G دارای $\{p, q\}'-$زیرگروه هال مرکزی مانند T می‌باشد زیرا که طول کلاس‌های تزویج G فقط بر p و q قابل‌قسمت است. بنابراین T زیرگروه نرمال G است و اندیس آن در G فقط بر اعداد p و q قابل قسمت می‌باشد. بنابراین طبق قضیه برنساید $\frac{G}{T}$ حلپذیر است و از آنجاییکه T آبلی است، نتیجه می گیریم که G حلپذیر است. بنابراین در این حالت قضیه به صورت کامل بدست می‌آید. حال فرض می‌کنیم که مجموعه طول کلاس‌های تزویج A برابر $\{1\}$ باشد. به عبارت دیگر فرض می‌کنیم که A گروه آبلی باشد. بنابراین A یک $p'-$زیرگروه آبلی G است که اندیس آن در G توانی از عدد اول p است. با استفاده از قضیه ۱۴.۱.۱، نتیجه می گیریم که G حلپذیر است زیرا که A یک $p-$زیرگروه متمم آبلی G است.

۳.۲ حالت دوم: گروه G دارای هیچ $p-$عضوی از اندیس p^a نمی‌باشد.

از آنجایی که در این حالت گروه G دارای $p-$عضوی از اندیس p^a نیست و p^a در مجموعه طول کلاس‌های تزویج G قرار دارد، لذا عضوی مانند $d \in G$ وجود دارد بطوریکه d یک $p-$عضو نیست اما از اندیس p^a می‌باشد.

ادعای اول: مقسوم‌علیه اول q از n موجود است بطوریکه اگر d_q، $q-$قسمت d در G باشد، آنگاه $|G : C_G(d_q)| = p^a$.

برای اثبات این ادعا فرض می‌کنیم $\pi(n) = \{q_1, q_2, ..., q_u\}$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های اول n و $\pi(|G|) = \{p, q_1, q_2, ..., q_u, t_1, ..., t_s\}$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های اول $|G|$ باشد که در آن p و q_iها و t_jها اعداد اول دو به دو متمایز هستند. همچنین فرض می‌کنیم

$$d = d_p d_{q_1} d_{q_2} ... d_{q_u} d_{t_1} d_{t_2} ... d_{t_s}$$