دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی
ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه - (توپولوژی جبری)

عنوان

گروه های بنیادین توپولوژیکی وارتباط آن ها با گروه های آزاد توپولوژیکی

استاد راهنما

آقای دکتر بهروز مشایخی فرد

استاد مشاور

خانم دکتر هانیه میرابراهیمی

نگارنده

مجید کوکبی

شهریورماه ۱۳۹۰

بسمه تعالی
مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

عنوان: گروه های بنیادین توپولوژیکی وارتباط آن ها با گروه های آزاد توپولوژیکی

نام نویسنده: کوکبی
استاد راهنما: آقای دکتر بهروز مشایخی فرد
استاد مشاور: خانم دکتر هانیه میرابراهیمی

دانشکده: دانشکده علوم ریاضی	گروه: ریاضی محض	رشته تحصیلی: ریاضی محض
تاریخ تصویب: ۱۳۹۰/۰۳/۱۶	تاریخ دفاع: ۱۳۹۰/۰۶/۳۰	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	تعداد صفحات: ۸۸	

چکیده پایان‌نامه : فرض کنیم (X,x_0) یک فضای توپولوژی نقطه دار باشد. گروه بنیادین توپولوژیکی آن را با نماد $\pi_1^{top}(X,x_0)$ نشان می دهیم. در این پایان نامه ابتدا خواص مقدماتی گروه های بنیادین توپولوژیکی بررسی می شود. از جمله نشان داده می شود که $\pi_1^{top}(-)$ تابعگونی از رسته فضا های توپولوژی نقطه دار به رسته شبه گروه های توپولوژیکی است.
برای مطالعه خواص بیشتر گروه های بنیادین توپولوژیکی ثابت می شود که هر گروه بنیادین توپولوژیکی مانند $\pi_1^{top}(X)$ به صورت یک گروه خارج قسمتی توپولوژیکی از $\pi_1^{top}(\Sigma(\Omega(X)_+))$ است که در آن نماد های Ωو Σ به ترتیب مربوط به فضای طوقه ای و فضای تعلیق می باشند. سپس ثابت می شود که $\pi_1^{top}(\Sigma(X)_+)$ یا یک گروه توپولوژیکی نیست یا اگر باشد یک گروه توپولوژیکی آزاد مارکف روی $\pi_0^{top}(X)$ است. در انتها شرایط معادلی برای آنکه $\pi_1^{top}(\Sigma(X)_+)$ یک گروه توپولوژیکی هاسدورف باشد ارائه می گردد. با استفاده از مطالب فوق، دسته مثال هایی ارائه می گردد تا نشان داده شود که گروه های بنیادین توپولوژیکی لزوما گروه های توپولوژیکی نیستند. لازم به ذکر است که این مثال ها با مثالی که قبلا توسط فابل ارائه گردید، متفاوتند.

واژگان کلیدی: گروه بنیادین توپولوژیکی، شبه گروه توپولوژیکی، گروه های توپولوژیکی آزاد، تکواره توپولوژیکی آزاد، تعلیق تحویل یافته، نگاشت جیمز

امضای استاد راهنما: تاریخ:

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مشایخی فرد، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از سرکار خانم دکتر میرابراهیمی که زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر، مادر و همسر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را

مجید کوکبی

شهریورماه ۱۳۹۰

فهرست مطالب

پیشگفتار

گروه بنیادین توپولوژیکی برای اولین بار در سال ۲۰۰۱ توسط بیس در [۲] مطرح شد که برای فضای نقطه دار (X,x) با $\pi_1^{top}(X,x)$ نشان داده شده است و عبارت است از گروه بنیادین $\pi_1(X,x)$، به همراه توپولوژی القایی از نگاشت خارج قسمتی $q:\Omega(X,x)\longrightarrow\pi_1(X,x)$.
او ثابت کرد π_1^{top} یک گروه توپولوژیکی است اما در اثبات پیوستگی نگاشت حاصلضرب اشکالی وجود داشت که از دید نویسندگان دیگر مخفی ماند. [۲، ۶، ۱۰، ۱۹] تا اینکه فابل در مقاله [۷] نشان داده، گروه بنیادین گوشواره ی هاوایی یعنی $\pi_1^{top}(HE)$ یک گروه توپولوژیکی نمی‌باشد.
هدف اول این پایان نامه این است که مثال نقض دیگری برای ادعای فوق بیاورد که با مثال نقض فابل کاملاً متفاوت است. (مثال ۷.۲.۴ را ببینید.)
وجود چنین مثال‌هایی این سؤال را به ذهن می‌آورد که گروه بنیادین توپولوژیکی یک فضا چیست و چه خواصی دارد؟
در فصل دوم نشان می‌دهیم گروه‌های بنیادین با این توپولوژی در واقع شبه گروه‌های توپولوژیکی می‌باشند و به بررسی چند خاصیت از آن، از جمله خواص جداسازی می‌پردازیم.
مثال نقض فوق از یک فضای خاص یعنی تعلیق تحویل یافته بدست می‌آید که آن را به صورت کامل در فصل سوم مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در این بررسی‌ها متوجه رابطه این فضا و گروه‌های آزاد توپولوژیکی (مارکف) می‌شویم. لذا هدف دوم این پایان‌نامه بررسی شبه گروه توپولوژیکی $\pi_1^{top}\Sigma(X_+)$ می‌باشد. ثابت می‌شود که $\pi_1^{top}(\Sigma(X_+))$ گروه خارج قسمتی از تکواره توپولوژیکی آزادی است که روی $X\sqcup X^{-1}$ ساخته شده باشد. در واقع قضیه زیر ثابت می‌شود.

قضیه ۱. *برای هر فضای توپولوژی دلخواه X، $\pi_1^{top}(\Sigma(X_+))$ به صورت طبیعی، به عنوان شبه گروه توپولوژیکی، یکریخت است با گروه آزاد $F(\pi_0(X))$ بانگاشت خارج قسمتی کانونی $\bigsqcup_{n\geq 0}(X\sqcup X^{-1})^n\longrightarrow F(\pi_0(x))$. نتیجه زیر مستقیماً از قضیه بدست می‌آید.*

نتیجه ۲. *$\pi_1^{top}(\Sigma(X_+))$ یا گروه توپولوژیکی نیست و یا اگر باشد یک گروه توپولوژیکی آزاد مارکف روی $\pi_0^{top}(X)$ است، یعنی $F_M(\pi_0^{top}(X))$ می‌باشد.*

ارتباط فوق از آن جهت حائز اهمیت است که در برخی موارد توضیح توپولوژی گروه بنیادین بسیار مشکل است اما از آن جا که توپولوژی، گروه توپولوژیکی آزاد مارکف را می‌شناسیم می‌تواند در بررسی توپولوژی گروه بنیادین، به ما کمک کند.

در فصل چهارم به بررسی خواص توپولوژی $\pi_1^{top}(\Sigma(X_+))$ می‌پردازیم. سومین هدف ما مشخصه سازی برای فضای X است که در چه حالاتی $\pi_1^{top}(\Sigma(X_+))$ یک گروه توپولوژیکی هاسدورف می‌شود و با توجه به تکنیک‌های توپولوژی جبری و قضیه ۱ و نتیجه ۲ به هدفی مشخص، یعنی ۴ خواهیم رسید.

گزاره ۳. *فرض کنیم Y یک فضای تیخونوف باشد در این صورت نگاشت کانونی*

$$\bigsqcup_{n\geq 0}(Y\sqcup Y^{-1})^n \longrightarrow F_M(Y)$$

(که هر کلمه را به کلمه تحویل یافته آن در تکواره توپولوژیکی آزادی که روی $Y\sqcup Y^{-1}$ ساخته شده است می‌برد) خارج قسمتی است اگر و فقط اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) *$F_M(Y)$ حد توپولوژیکی استقرایی زیر فضاهای $F_M(Y)_n$ است که $F_M(Y)_n$ شامل کلمات از طول کمتر یا مساوی n است.*

۲) *برای $n\geq 0$ نگاشت حاصلضربی کانونی $F_M(Y)_n$ $\longrightarrow$ $\bigsqcup_{i=0}^{n}(Y\sqcup Y^{-1})^i$ خارج قسمتی است.*

اثبات قضیه فوق را می توان در [۱۸] یافت .
نهایتاً به قضیه زیر خواهیم رسید.

قضیه ۴. *فرض کنیم X هاسدورف باشد در این صورت $\pi_1^{top}(\Sigma(X_+))$ یک گروه توپولوژیکی هاسدورف است اگر و تنها اگر هر چهار شرط زیر برقرار باشد.*

۱) *$\pi_0^{top}(X)$ تیخونوف است.*

۲) *هر توان متناهی از نگاشت خارج قسمتی $\pi_X: X\longrightarrow \pi_0^{top}(X)$، یک نگاشت خارج قسمتی باشد.*

۳) گروه توپولوژیکی آزاد $F_M(\pi_\circ^{top}(X))$، حد توپولوژیکی استقرایی از زیرفضاهای $F_M(\pi_\circ^{top}(X))_n$ است که $F_M(\pi_\circ^{top}(X))_n$ شامل کلمات با طول کمتر از n است.

۴) برای هر $n \geq ۱$، نگاشت حاصلضربی کانونی

$$i_n = \bigsqcup_{i=\circ}^{n} (\pi_\circ^{top}(X) \sqcup \pi_\circ^{top}(X)^{-۱})^i \longrightarrow F(\pi_\circ^{top}(X))_n$$

نگاشت خارج قسمتی است.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مفاهیم توپولوژیکی

همبندی

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنیم x عنصری از فضای توپولوژی X است. در این صورت X را در x* **همبند موضعی**[1] *گوییم، هرگاه برای هر همسایگی U از x، یک همسایگی همبند از X مانند V وجود داشته باشد به طوری که $V \subseteq U$.*

تعریف ۲.۱.۱. *اگر فضای توپولوژی X در هر نقطه‌اش همبند موضعی باشد، آن‌گاه X را همبند موضعی گوییم.*

تعریف ۳.۱.۱. *فرض کنیم x عنصری از فضای توپولوژی X است. در این صورت X را در x* **همبند مسیری موضعی**[2] *گوییم، هرگاه برای هر همسایگی U از x، یک همسایگی همبند مسیری از x مانند V وجود داشته باشد به طوری که $V \subseteq U$.*

تعریف ۴.۱.۱. *فضای توپولوژی X را همبند مسیری موضعی گوییم، هر گاه X در هر نقطه‌اش همبند مسیری موضعی باشد.*

---

[1] Locally connected

[2] Locally path connected

مثال ۵.۱.۱. *فرض کنیم*

$$A = \{\frac{1}{n} | n \in N\} \cup \{0\},$$
$$B = A \times [0, 1].$$

در این صورت B همبند موضعی نیست، زیرا $B \cap (B_{\frac{1}{2}}((0, 1)))$ یک همسایگی از نقطه‌ی $(0, 1)$ است به طوری که شامل هیچ همسایگی همبند از $(0, 1)$ نیست. به طور مشابه B همبند مسیری موضعی نیست.

قضیه ۶.۱.۱. *فضای توپولوژی X همبند موضعی است اگر و فقط اگر برای هر مجموعه‌ی باز U از X، هر یک از مؤلفه‌های همبندی U در X باز باشد.*

برهان. ابتدا فرض کنیم فضای X همبند موضعی و U یک مجموعه‌ی باز از X و C یک مؤلفه‌ی همبندی از U باشد. در این صورت نشان می‌دهیم C باز است. فرض کنیم x عضوی دلخواه از C باشد. چون X همبند موضعی و U یک همسایگی از x است، پس یک همسایگی همبند از x مانند V موجود است به طوری که

$$V \subseteq U$$

اما چون $V \cap C$ ناتهی است و C مؤلفه‌های همبندی از U و V همبند است، پس $V \subseteq C$ بنابراین C باز است.
بالعکس، فرض کنیم برای هر مجموعه باز U از X، مؤلفه‌های همبندی U در X باز باشد. در این صورت اگر x عضوی دلخواه از X و U همسایگی از x باشد، آن‌گاه C را مؤلفه‌ی همبندی از U می‌گیریم که شامل x است. بنابر فرض C در X باز است. لذا C یک همسایگی همبند از x است که مشمول در U است و این حکم را اثبات می‌کند. □

با استدلالی مشابه داریم
فضای توپولوژی X همبند مسیری موضعی است اگر و فقط اگر برای هر مجموعه‌ی باز U از X، هر یک از مؤلفه‌های همبندی مسیری U در X باز باشد.

قضیه ۷.۱.۱. *اگر فضای توپولوژی X همبند مسیری موضعی باشد آن‌گاه مؤلفه‌های همبندی و همبندی مسیری X بر هم منطبق می‌باشند.*

برهان. فرض کنیم C یک مؤلفه‌ی همبندی از X و برای هر عضو از C مانند x، U_x مؤلفه‌ی همبندی مسیری از X باشد که شامل x است. چون U_x همبند مسیری است پس همبند است. از

طرفی چون C مؤلفه‌ی همبندی است و

$$\forall x \in C \quad U_x \cap C \neq \varnothing$$

پس

$$\forall x \in C \quad U_x \subseteq C$$

لذا

$$C = \bigcup_{x \in C} U_x$$

حال چون X همبند مسیری موضعی است لذا $\{U_x | x \in C\}$ یک پوشش باز برای C می‌باشند اما چون C همبند است و مؤلفه‌های همبند مسیری دو به دو مجزا می‌باشند، پس مجموعه‌ی $\{U_x | x \in C\}$ دقیقاً یک عضو دارد. لذا

$$\forall x \in C \quad C = U_x$$

اما U_x همبند مسیری است. لذا C همبند مسیری و در نتیجه C زیرمجموعه‌ی یک مؤلفه‌ی همبند مسیری از X است. از طرفی هر مؤلفه‌ی همبند مسیری همبند است و لذا زیرمجموعه‌ی یک مؤلفه‌ی همبند از X است. بنابراین حکم برقرار است. $\square$

تعریف ۱.۱.۸. *فرض کنیم $q : X \longrightarrow Y$، یک نگاشت خارج قسمتی، Z یک فضای توپولوژی و $f : Y \longrightarrow Z$ یک تابع باشد. در این صورت f پیوسته است اگر و فقط اگر $f \circ q$ پیوسته باشد.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f\circ q"] & \\
Y \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

و در حالت خاص برای فضای $X/\sim$ به همراه نگاشت خارج قسمتی $q : X \longrightarrow X/\sim$ **خاصیت جهانی نگاشت خارج قسمتی** [۱] *به صورت زیر تعریف می‌شود.*

فرض کنیم $g : X \longrightarrow Z$ یک نگاشت پیوسته باشد به طوری که برای هر $a, b \in X$ اگر $a \sim b$ آن‌گاه $g(a) = g(b)$. در این صورت یک نگاشت منحصر به فرد پیوسته $f : X/\sim \longrightarrow Z$ موجود است به طوری که $g = f \circ q$ اطلاعات بیشتر را می‌توان در مرجع [۲۱] ملاحظه نمود.

---

[1] universal property

تعریف ۹.۱.۱. *مؤلفه‌های همبند مسیری یک فضای توپولوژی X را با $\pi_\circ(X)$ نشان می‌دهیم و توپولوژی آن را از نگاشت خارج قسمتی کانونی $\pi_X : X \longrightarrow \pi_\circ(X)$ می‌گیریم و این فضا را با $\pi_\circ^{top}(X)$ نشان می‌دهیم.*

وقتی عالم سخن مشخص است از نوشتن اندیس برای π خودداری می‌کنیم. نیز تابع $f : X \longrightarrow Y$ تابع $f_* : \pi_\circ^{top}(X) \longrightarrow \pi_\circ^{top}(Y)$ را القا می‌کند که مؤلفه همبندی مسیری از $x \in X$ را به مؤلفه همبندی مسیری شامل $f(x)$ در Y می‌برد که با توجه به خاصیت جهانی نگاشت‌های خارج قسمتی پیوسته می‌باشد و اگر فضای X، نقطه پایه‌ای x را داشته باشد آن‌گاه نقطه پایه‌ای $\pi_\circ^{top}(X)$ را مؤلفه همبندی مسیری که x در آن واقع است قرار می‌دهیم.

تبصره ۱۰.۱.۱. *$\pi_\circ^{top}(-) : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Top}_*$ یک تابعگون است.*

برهان. به مرجع [۱۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۱.۱.۱. *فضای توپولوژی X را $\circ-$**همبند نیم موضعی**[1] گوییم هرگاه هر $x \in X$، یک همسایگی باز چون U از x داشته باشد به طوری که نگاشت شمول $i : U \hookrightarrow X$ یک نگاشت ثابت $i_* : \pi_\circ^{top}(U) \longrightarrow \pi_\circ^{top}(X)$ القا کند.*

تبصره ۱۲.۱.۱. *فضای توپولوژی X، $\circ-$همبند نیم موضعی است اگر و فقط اگر $\pi_\circ^{top}(X)$ توپولوژی گسسته[2] داشته باشد.*

تبصره ۱۳.۱.۱. *$\pi_\circ$ حافظ **هم‌حاصلضرب**[3] و نگاشت خارج قسمتی است اما حافظ **حاصلضرب**[4] نمی‌باشد. چون تابعگون غیر توپولوژیکی $\pi_\circ : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$ حافظ حاصلضرب می‌باشد، توابع تصویری حاصلضرب $X = \prod_{\lambda \in \bigwedge} X_\lambda$ یک تابع پیوسته دوسویی $\psi : \pi_\circ^{top}(X) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \bigwedge} \pi_\circ^{top}(X_\lambda)$ القا می‌کند به طوری که $\psi \circ \pi_X = \prod_{\lambda \in \bigwedge} X_\lambda$.*

تعریف ۱۴.۱.۱. *یک گروه G به همراه توپولوژی τ را **گروه توپولوژیکی**[5] گوییم هرگاه دو نگاشت $F : G \times G \to G$ با ضابطه‌ی $F(g,h) = gh$ و $\theta : G \to G$ با ضابطه‌ی $\theta(g) = g^{-1}$ پیوسته باشند.*

[1] semilocally 0-connected

[2] discrete topology

[3] coproduct

[4] product

[5] topological group

به عنوان ساده‌ترین مثال هر گروه G به همراه توپولوژی گسسته یک گروه توپولوژی است. همچنین می‌توان به گروه $(\mathbb{R},+)$ با توپولوژی اقلیدسی و $(S^1,\cdot)$ با توپولوژی زیرفضایی $\mathbb{R}^2$ به عنوان دو گروه توپولوژی اشاره کرد.

لم ۱۵.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه توپولوژی باشد و $H \trianglelefteq G$ در این‌صورت گروه خارج‌قسمتی G/H یک گروه توپولوژی است که G/H به عنوان یک فضای خارج قسمتی[1] از G به‌وسیله H در نظر گرفته شده است.*

برهان. به مرجع [۱] رجوع شود. $\square$

تعریف ۱۶.۱.۱. *فضای توپولوژی X را* **فضای همگن**[2] *گوییم هرگاه برای هر $x,y \in X$ یک همسان ریختی f، از X به خودش موجود باشد به‌طوری‌که $f(x)=y$.*

تعریف ۱۷.۱.۱. *فرض کنیم X یک مجموعه باشد که توسط زیرمجموعه‌های A_i که i در مجموعه اندیس‌گذار (حتی نامتناهی) تغییر می‌کند، پوشیده شده باشد. به‌علاوه فرض کنیم*

۱. *برای هر $i \in I$، A_i فضای توپولوژی باشد.*

۲. *برای هر $i,j \in I$، توپولوژی A_i و A_j روی $A_i \cap A_j$ یکی باشد.*

۳. *برای هر $i,j \in I$، مجموعه $A_i \cap A_j$ در A_i و A_j بسته باشد.*

در این صورت **توپولوژی ضعیف**[3] *روی X تعریف شده توسط $\{A_i; i \in I\}$ توپولوژی‌ای است که در آن $F \subseteq X$ بسته است اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$، $F \cap A_i$ در A_i بسته باشد.*
به سادگی می‌توان دید که

۱. *برای هر $i \in I$، A_i در X بسته است.*

۲. *توپولوژی زیرفضایی A_i با توپولوژی A_i یکی است.*

[1] qoutient space

[2] Homogeneous space

[3] weak topology

توپولوژی فشرده- باز

تعریف ۱.۱.۱۸. *فرض کنیم (Y,d) یک فضای متریک و $f_n : X \to Y$ دنباله‌ای از توابع و $f : X \to Y$ یک تابع باشد. در این‌صورت گوییم $\{f_n\}$ بر X* **همگرای یکنواخت**[1] *به f است و به‌صورت $f_n \to f$ بر X نشان می‌دهیم هرگاه*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad ; (\forall n \geq N \quad d(f_n(x), f(x)) < \epsilon \quad \forall x \in X);$$

یا به عبارتی می‌توان گفت $f_n \to f$ بر X اگر و تنها اگر

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad ; (\forall n \geq N \quad sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) < \epsilon).$$

تعریف ۱.۱.۱۹. *فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند. در این صورت فضای تمام توابع از X به Y را با Y^X نشان داده و تعریف می‌کنیم*

$$M(X,Y) = \{f : X \to Y \ ; \text{پیوسته است } f\}$$

اگر $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ آن‌گاه

$$M(X,A;Y,B) = \{f : X \to Y \ ; \text{پیوسته است } f; f(A) \subseteq B\}$$

و اگر X , Y دارای نقاط پایه‌ای x , y (به ترتیب) باشد آن‌گاه $M_*(X,x;Y,y)$ (یا فقط $M_*(X,Y)$) زیر مجموعه‌ای از $M(X,Y)$ است که حافظ نقاط پایه‌ای است.

برای راحتی نمایش به جای $M(I,\{0,1\};X,\{x\})$، از $\Omega(X,x)$ استفاده می‌کنیم در حالتی که $X = S^1$، $M(S^1,Y)$ فضای تمام مسیرهای Y است و زیرفضای $M(I,\{0,1\};Y,\{y\})$ از $M(S^1,Y)$ فضای تمام مسیرهای بسته یا فضای **طوقه**[2] *های Y می‌باشد و معمولاً این فضا را با $\Omega(Y,y)$ و مسیر ثابت در $y \in Y$ را با C_y نشان می‌دهیم .*

تعریف ۱.۱.۲۰. *فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی، C زیرمجموعه‌ی فشرده ای از X و U زیرمجموعه‌ی بازی از Y باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم*

$$\langle C,U \rangle = \{f \in Y^X ; f(C) \subseteq U\}$$

مجموعه ی $\{\langle C,U \rangle ; C \subseteq X, U \subseteq Y\}$ به عنوان یک زیرپایه، تشکیل یک توپولوژی برای Y^X می‌دهد که به **توپولوژی فشرده- باز**[3] *موسوم است.*

قضیه ۱.۱.۲۱. *فرض کنیم X فضایی دلخواه و (Y,d) فضایی متریک باشد. در این‌صورت توپولوژی فشرده- باز و توپولوژی همگرای یکنواخت روی $M(X,Y)$ یکی هستند.*

[1] uniform convergent

[2] loop

[3] compact- open topology

برهان. به [۱۵] رجوع شود. □

قضیه فوق قضیه بسیار جالبی است زیرا نشان می‌دهد توپولوژی همگرایی یکنواخت روی $M(X,Y)$ به متر Y بستگی ندارد.

تعریف ۲۲.۱.۱. *برای عدد صحیح $n \geq 1$ و $j = 1, 2, \ldots, n$ فرض کنیم K_n^j زیر بازه بسته I باشد که $K_n^j = [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ و اگر $p : I \longrightarrow X$ یک مسیر باشد آن‌گاه $p|_{K_n^j} = q_j$ که **اولاً** q_j مسیر است و ثانیاً $q_j : K_n^j \longrightarrow X$ و داریم $q_n * \cdots * q_2 * q_1 = q_j{}_{j=1}^{n}* = p$.*

تبصره ۲۳.۱.۱. *اگر $\mathcal{B}_X$ یک پایه برای توپولوژی X باشد که تحت اشتراک متناهی بسته است آن‌گاه مجموعه‌ای از همسایگی‌های به شکل $\bigcap_{j=1}^{n}\langle K_n^j, U_j\rangle$ تشکیل یک پایه برای توپولوژی فشرده-باز برای فضای $M(I,X)$ می‌دهد و به علاوه این پایه تحت اشتراک متناهی بسته است.*

برهان. به مرجع [۴] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۴.۱.۱. *فرض کنیم X فضای دلخواه باشد و $X_+ = X \sqcup \{*\}$ که $\{*\}$ نقطه‌ای مجزا از X است. قرار می دهیم*

$$(\Sigma(X_+), x_\circ) = \left(\frac{X_+ \times I}{X \times \{\circ, 1\} \cup \{*\} \times I}, x_\circ\right)$$

*این فضا را **تعلیق تحویل یافته**[1] گوییم و توپولوژی آن خارج قسمتی است که از نگاشت $q : X_+ \times I \longrightarrow \Sigma(X_+)$ القا می‌شود و شکل عناصر $\Sigma(X_+)$ به صورت مجموعه‌ای و بدون توپولوژی به صورت زیر است.*

با توجه به اینکه $\{* \times I\}$, $X \times \{\circ, 1\}$ را یک نقطه در نظر می‌گیریم لذا اگر این نقطه را $x_\circ$ قرار دهیم آن‌گاه تعلیق تحویل یافته، الحاقی از دوایری است که از $x_\circ$ و $x \wedge \frac{1}{2}$ می‌گذرد.

مثال ۲۵.۱.۱. *اگر $X = \{x\}$ آن‌گاه $\Sigma(X_+) = S^1$.*
اگر $X = \{x, y\}$ آن‌گاه $\Sigma(X_+) = {S^1}_x \bigvee {S^1}_y$.

تعریف ۲۶.۱.۱. *فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد در این صورت $C(X) = (\frac{X \times I}{X \times \{1\}})$ را **مخروط**[2] روی X گوییم و با CX نشان می‌دهیم.*

---

[1] reduce suspension

[2] cone

تعریف ۲۷.۱.۱. *فضای توپولوژی X را* **هاسدورف تابعی**[۱] *گوییم اگر نقاط متمایز X با توابع پیوسته حقیقی مقدار جدا شود.*

یادآوری ۲۸.۱.۱.

۱) *فضای توپولوژی X را T_0 گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه $x, y \in X$ که $x \neq y$ حداقل یکی از آن ها یک همسایگی داشته باشد که شامل دیگری نباشد.*

۲) *فضای X را T_1 گوییم در صورتی که هر دو نقطه مختلف x و y از آن در نظر می‌گیریم هر یک دارای یک همسایگی باشد که شامل دیگری نباشد.*

۳) *فضای توپولوژی X را T_2 و یا هاسدورف گوییم در صورتی که به ازای هر دو نقطه مختلف y و x از آن، دو همسایگی مانند V و U به ترتیب از y و x به قسمی موجود باشد که $U \cap V = \varnothing$.*

۴) *فضای X،* **منظم**[۲] *نامیده می‌شود در صورتی که به ازای هر نقطه $x \in X$ و هر زیر مجموعه بسته $A \subset X$ که $x \notin A$ دو همسایگی مانند V و U به ترتیب از A, x موجود باشد به طوری که $U \cap V = \varnothing$.*

۵) *فضای X* **نرمال**[۳] *نامیده می‌شود در صورتی که برای هر دو زیر مجموعه بسته جدا از هم B و A از X، دو مجموعه باز جدا از هم V و U وجود داشته باشند که $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.*

۶) *فضای X،* **کاملاً منظم**[۴] *است در صورتی که برای هر $x \in X$ و هر همسایگی U از x تابع پیوسته $f : X \longrightarrow I$ به قسمی موجود باشد که $f(x) = 0$ و $f(X \setminus U) = 1$.*

تبصره ۲۹.۱.۱. *T_1 بودن معادل با این است که تک نقطه‌ای‌ها در X بسته باشند.*

۲.۱ مفاهیم جبری

اکنون مفاهیم رسته‌ها و حاصلضرب آزاد گروه‌ها ارائه می‌شود. تعاریف و قضایای این قسمت را از [۱۳] آورده ایم.

[1] functionally Hausdorff

[2] regular

[3] normal

[4] commpletly reqular

رسته‌ها

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ دسته‌ای از اشیاء باشد، در این صورت $\mathcal{C}$ را* **رسته**[۱] *گوییم، هرگاه*

۱. *برای هر A و B که A و B عضو $\mathcal{C}$ باشند، مجموعه‌ی $\mathrm{Hom}(A,B)$ چنان موجود باشد که*

$$\forall A,B,C,D \;\; (A,B) \neq (C,D) \Rightarrow \mathrm{Hom}(A,B) \cap \mathrm{Hom}(C,D) = \varnothing$$

(هر عضو از $\mathrm{Hom}(A,B)$ را یک ریخت از A به B می‌نامیم و با نماد $f : A \longrightarrow B$ نشان می‌دهیم)

۲. *برای A و B، که A و B عضو $\mathcal{C}$ باشند، تابع*

$$F : \mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,C)$$

به گونه‌ای موجود باشد که در دو شرط زیر صدق کند.

i) *برای هر عضو از $\mathcal{C}$ مانند A، عضوی از $\mathrm{Hom}(A,A)$ مانند ۱_A چنان موجود باشد که*

$$\forall B,C \in \mathcal{C}, \forall f \in \mathrm{Hom}(B,A), \forall g \in \mathrm{Hom}(A,C) \quad ۱_A \circ f = f, g \circ ۱_A = g.$$

ii) *برای هر A، B، C و D که A، B، C و D عضو $\mathcal{C}$ باشند داشته باشیم*

$$\forall f \in \mathrm{Hom}(A,B), \forall g \in \mathrm{Hom}(B,C), \forall h \in (C,D) \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

مثال ۲.۲.۱. ***Top*** *را رده ی همه‌ی فضاهای توپولوژی در نظر می‌گیریم. همچنین برای هر دو فضای توپولوژی X و Y، $\mathrm{Hom}(X,Y)$ را مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته از X به Y و تابع F را تابع ترکیب توابع در نظر می‌گیریم. لذا* ***Top*** *یک رسته است.*

تعریف ۳.۲.۱. *فرض کنید $x_\circ$ عضوی از فضای توپولوژی X باشد، دوتایی $(X,x_\circ)$ را* **فضای نقطه‌دار**[۲] *گوییم.*

مثال ۴.۲.۱. ***Top***$_*$ *را رده ی همه‌ی فضاهای توپولوژی نقطه‌دار در نظر می‌گیریم. همچنین برای هر دو فضای توپولوژی نقطه‌دار $(X,x_\circ)$ و $(Y,y_\circ)$، $\mathrm{Hom}((X,x_\circ),(Y,y_\circ))$ را مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته از X به Y که $x_\circ$ را به $y_\circ$ می‌نگارد، تعریف می‌کنیم. اگر تابع F را تابع ترکیب فرض کنیم در این صورت* ***Top***$_*$ *یک رسته است که به آن رسته‌ی فضاهای توپولوژی نقطه‌دار گویند.*

[1] Category

[2] Pointed space

همچنین رسته گروهها را با **Grp** و رسته گروههای توپولوژیکی را با **TopGrp**نشان می دهیم.

تعریف ۱.۲.۵. *ریخت $f : A \longrightarrow B$ از رسته‌ی $\mathcal{C}$ را* **هم‌ارزی**[1] *گوییم، هرگاه*

$$\exists g \in \mathrm{Hom}(B, A) \quad s.t \quad f \circ g = 1_B, g \circ f = 1_A$$

اگر ریخت $f : A \longrightarrow B$ هم‌ارزی باشد، آن‌گاه A و B را **هم‌ارز**[2] *می‌نامیم.*

تعریف ۱.۲.۶. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. نگاشت T را یک* **تابعگون هموَرد**[3] *از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ گوییم، هرگاه T هر شی در $\mathcal{C}$ مانند A را به یک شی در $\mathcal{D}$ مانند $T(A)$ و هر ریخت در $\mathcal{C}$ مانند $f : A \longrightarrow B$ را به یک ریخت در $\mathcal{D}$ مانند*

$$T(f) : T(A) \longrightarrow T(B)$$

بنگارد، به طوری که

$$T(f \circ g) = T(f) \circ T(g) \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(A, B), g \in \mathrm{Hom}(B', A).$$

تعریف ۱.۲.۷. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته و $\mathcal{F} = \{A_i | i \in I\}$ یک خانواده از اشیاء $\mathcal{C}$ باشد. یک* **حاصلضرب**[4] *برای خانواده‌ی $\mathcal{F}$ ،یک شی از $\mathcal{C}$، مانند P به همراه یک خانواده از ریخت‌ها به صورت زیر است*

$$\{\pi_i : P \longrightarrow A_i | i \in I\}$$

به طوری که برای هر شی از $\mathcal{C}$ مانند B و هر خانواده از ریخت‌ها به صورت زیر

$$\{\varphi_i : B \longrightarrow A_i | i \in I\}$$

دقیقاً یک ریخت مانند $\varphi : B \longrightarrow P$ چنان موجود باشد به طوری که

$$\pi_i \circ \varphi = \varphi_i \quad \forall i \in I.$$

P در تعریف فوق را معمولاً با نماد $\prod_{i \in I} A_i$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱.۲.۸. *اگر $(P, \{\pi_i\}_{i\in I})$ و $(Q, \{\psi_i\}_{i\in I})$ دو حاصلضرب از خانواده‌ی $\{A_i | i \in I\}$ از اشیاء دسته‌ی $\mathcal{C}$ باشند، آن‌گاه P و Q هم‌ارز می‌باشند.*

---

[1] Equivalence

[2] Equivalent

[3] Covariant functor

[4] Product