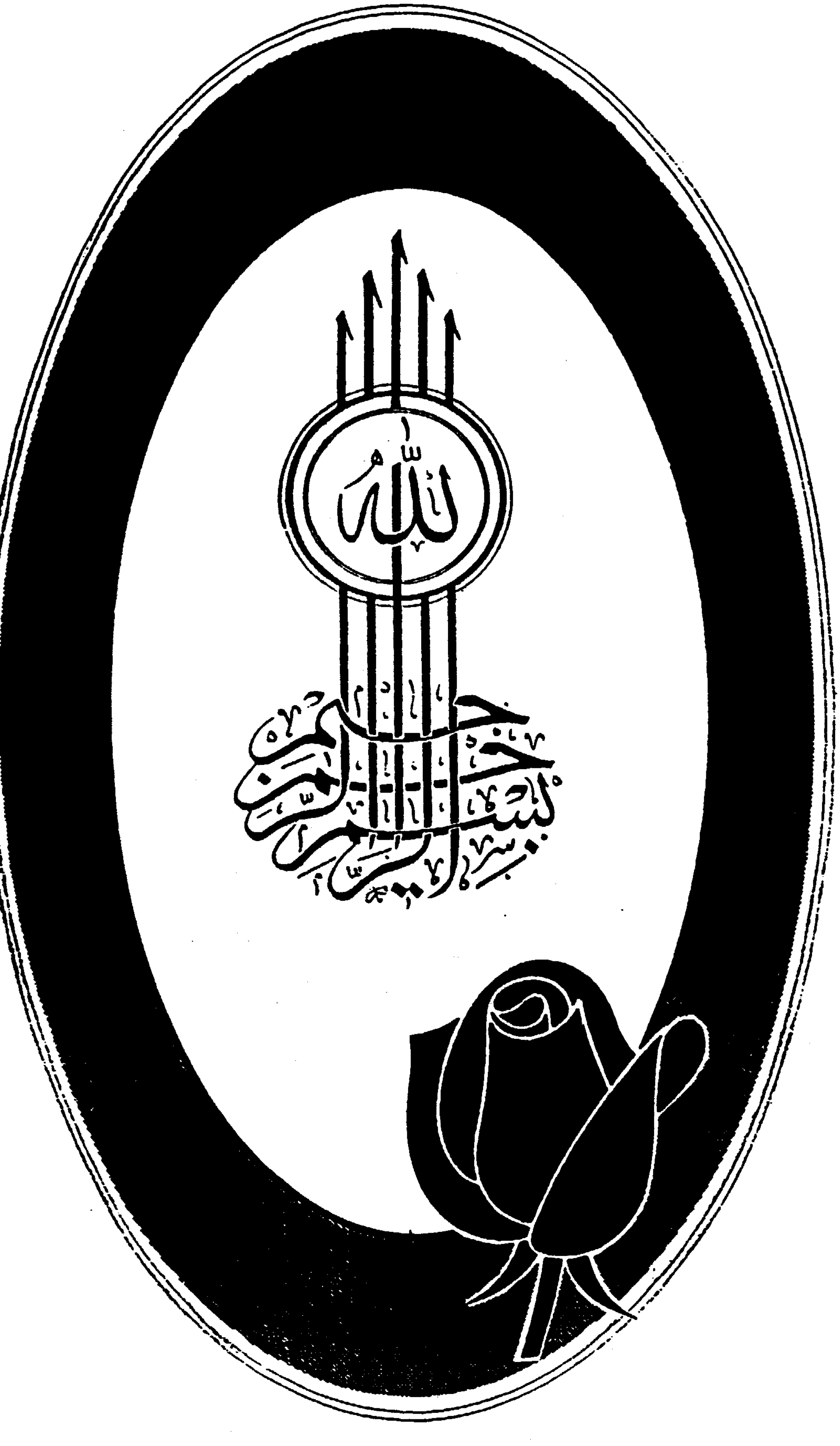

٣٣ ٢٤٨

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر - بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد ریاضی محض

تحت عنوان:

توپولوژی زاریسکی روی هم-جبرها

استاد راهنما:

دکتر رضا نکوئی

مولف :

لیدا ترک‌زاده

خرداد ۱۳۷۶

بسمه تعالی

این پایان‌نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی ـ دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : **لیدا ترک‌زاده**

استاد راهنما: **آقای دکتر رضا نکویی**

داور ۱ : **آقای دکتر یوسف بهرامپور**

داور ۲ : **آقای دکتر اسفندیار اسلامی**

دانشگاه شهید باهنر کرمان
اداره تحصیلات تکمیلی

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

به نام خدا

قل رب زدنی علما

حمد گویم آنکه جان دادست در تصویر ما　　　قدرتش ناگفتنی از عقل و از تقریر ما

شکر، آفریدگار جهان را که پرده‌پوش اسرار نهان و روزی دهنده خلق جهان است و از همهٔ موجودات آدمی را به داشتن علم و ادب ممتاز گردانید. بنام رحمانی که به این بنده حقیر سعادت تلاش و کوشش در راه کسب علم و دانش عطا نمود. امیدوارم که با یاری باری تعالی، بتوانم آنچه را که فرا گرفته‌ام در راه رضای او و خیر و صلاح جامعه بکار گیرم.

حال که با عنایت پروردگار این پایان‌نامه به اتمام رسید وظیفه خود می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ پدر و مادر مهربانم که همواره مشوق و راهنمای من در راه تحصیل علم و کمال بوده و وسایل رفاه و آسایش مرا فراهم کرده‌اند تشکر و قدردانی کنم. همچنین از الطاف و عنایات بی‌شائبه استاد ارجمند، جناب آقای دکتر نکوئی، که در طول مدت تحصیل در دانشگاه و بالاخص در مدت انجام پایان‌نامه استاد راهنمایم بوده‌اند کمال تشکر و امتنان را دارم.

از کلیه اساتید دانشکده ریاضی دانشگاه شهید باهنر، که در تعلیم و تربیت اینجانب نقش بسزایی داشته‌اند کمال قدردانی را دارم بالاخص از آقایان دکتر یوسف بهرامپور و دکتر اسفندیار اسلامی که زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند سپاسگزاری می‌کنم و برایشان از درگاه خداوند متعال موفقیت روزافزون را خواهانم. در پایان از خانمها باقری و مانی که تایپ این پایان‌نامه را برعهده داشته‌اند متشکرم و موفقیت و سعادت همه را از خداوند بزرگ مسئلت دارم.

لیدا ترک‌زاده

۱۳۷۶

چکیده

ما در این کار، هم-جبرهای هم-اول را تعریف و تعدادی از خاصیتهای آنها را که ایدهٔ آنها از ایده‌الهای اول در حلقه‌ها گرفته می‌شوند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

یک توپولوژی روی مجموعهٔ هم-جبرهای هم-اول نیز تعریف می‌شود و پاره‌ای از خاصیتهای آنها ثابت می‌شوند.

نشان داده می‌شود تعدادی از خاصیتها وجود دارند که در این فضای توپولوژیک صدق می‌کنند ولی در توپولوژی زاریسکی روی ایده‌الهای اول صادق نیستند، امید می‌رود که از این توپولوژی در توپولوژی جبری استفاده شود.

فهرست مطالب

فصل صفر

پیشنیازها

۱.۰. مفاهیم جبری

یک جبر روی میدان K، سه‌تایی (A, M, U) است بطوری که A یک فضای برداری روی K همراه با نگاشتهای خطی $M : A \otimes A \longrightarrow A$ که آن را ضرب نامیده و $U : K \mapsto A$ که آن را نگاشت یکه گوییم، بطوری که دیاگرامهای زیر جابجایی باشند.

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I \otimes M"] \arrow[d, "M \otimes I"'] & A \otimes A \arrow[d, "M"] \\ A \otimes A \arrow[r, "M"'] & A \end{tikzcd} \qquad \text{(شرکت‌پذیری } M\text{)}$$

$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[r, "U \otimes I"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "M"] & A \otimes K \arrow[l, "I \otimes U"'] \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \text{(خاصیت یکانی)}$$

که در آنها I نگاشت همانی و در دیاگرام دوم، نگاشتهای $A \otimes K \longrightarrow A$ و $K \otimes A \longrightarrow A$ یکریختی‌های طبیعی هستند.

تعریف ۱.۱.۰: یک هم-جبر روی میدان K، سه‌تایی $(C, \Delta, \mathcal{E})$ است بطوری که C یک فضای برداری روی K، $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ نگاشت خطی است که هم-ضرب نامیده می‌شود. و نگاشت خطی $\mathcal{E} : C \longrightarrow K$ که هم-واحد یا هم-یکه نامیده می‌شود بطوری که دیاگرام‌های زیر جابجایی باشند.

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "I \otimes \Delta"'] \\ C \otimes C \arrow[u, "\Delta \otimes I"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad \text{(هم-شرکت‌پذیری)}$$

$$\begin{array}{ccccc} & I\otimes\mathcal{E} & & \mathcal{E}\otimes I & \\ C\otimes K & \longleftarrow & C\otimes C & \longrightarrow & K\otimes C \\ & \nwarrow & \uparrow\Delta & \nearrow & \\ & & C & & \end{array}$$ (خاصیت هم-یکانی)

بنابراین خاصیتهای هم-شرکت‌پذیری و هم-یکانی بیان می‌کنند که Δ و $\mathcal{E}$ در روابط $(I\otimes\Delta)o\Delta=(\Delta\otimes I)o\Delta$ و $(I\otimes\mathcal{E})o\Delta=(\mathcal{E}\otimes I)o\Delta=I$ صدق می‌کنند.

فرض کنید $c\in C$ آنگاه $\Delta(c)$ را به صورت $\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes c_{(2)}$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید V یک فضای برداری باشد آنگاه $V^*=Hom(V,K)$ (مجموعه تمام همریختی‌ها از V به K است) را دوگان فضای برداری V می‌نامیم. برای $f\in V^*$ و $u\in V$ به جای $f(u)$ از نماد $<f,u>$ استفاده می‌کنیم.

فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند. نگاشت $\rho:V^*\otimes W^*\longrightarrow(V\otimes W)^*$ با ضابطهٔ زیر

$$<\rho(f\otimes g),v\otimes w>=<f,v><g,w>\ ,\ f\in V^*,g\in W^*,v\in V,w\in W$$

بطور وضوح یک نگاشت خطی و یک به یک است.

اگر $L:V\longrightarrow W$ نگاشت خطی باشد، $L^*:W^*\longrightarrow V^*$ با ضابطهٔ

$$<L^*(f),v>=<f,L(v)>\ ,\ f\in W^*,v\in V$$

یک نگاشت خطی است.

فرض کنید $(C,\Delta,\mathcal{E})$ یک K-هم-جبر باشد بقسمی که $\Delta:C\longrightarrow C\otimes C$ و $\mathcal{E}:C\longrightarrow K$.

اگر ما نگاشتهای $M : C^* \otimes C^* \longrightarrow C^*$ را بوسیله ترکیب دو نگاشت Δ^* و ρ به شکل زیر

$$C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^* \qquad (M = \Delta^* o \rho)$$

و $U : K \longrightarrow C^*$ که $U = \mathcal{E}^* o \phi$ به طوریکه $K \xrightarrow{\phi} K^* \xrightarrow{\mathcal{E}^*} C^*$ (ϕ یکریختی طبیعی است)، تعریف کنیم آنگاه:

قضیه ۰.۱.۱. (C^*, M, U) یک جبر است.

اثبات: (قضیه ۱.۱.۱ در [۱]).

فرض کنید (A, M, U) یک جبر با بعد متناهی باشد. آنگاه نگاشت $\rho : A^* \otimes A^* \longrightarrow (A \otimes A)^*$ یک نگاشت دو سویی است.

حال اگر $\Delta : A^* \longrightarrow A^* \otimes A^*$ را بوسیله ترکیب نگاشتهای خطی زیر

$$A^* \xrightarrow{M^*} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\rho^{-1}} A^* \otimes A^* \qquad (\Delta = \rho^{-1} o M^*)$$

و $\mathcal{E} : A^* \longrightarrow K$ را بوسیله ترکیب نگاشتهای خطی زیر

$$A^* \xrightarrow{U^*} K^* \xrightarrow{\psi} K \qquad (\mathcal{E} = \psi o U^*)$$

که ψ یکریختی طبیعی است، تعریف کنیم. آنگاه قضیه زیر را داریم:

قضیه ۰.۱.۲. اگر (A, M, U) یک جبر با بعد متناهی باشد، آنگاه $(A^*, \Delta, \mathcal{E})$ (به شرح فوق) یک هم-جبر است.

اثبات: (قضیه ۱.۱.۲ در [۱]).

تعریف ۲.۱.۰: فرض کنید $(C,\Delta_c,\mathcal{E}_c)$ و $(D,\Delta_D,\mathcal{E}_D)$ دو K-هم-جبر باشند و $g : C \longrightarrow D$ یک نگاشت خطی باشد. g یک نگاشت هم-جبر است اگر دیاگرامهای زیر جابجایی باشند.

$$\begin{tikzcd} C\otimes C \arrow[r, "g\otimes g"] & D\otimes D \\ C \arrow[u, "\Delta_C"] \arrow[r, "g"'] & D \arrow[u, "\Delta_D"'] \end{tikzcd} \qquad (\Delta_D o g = (g\otimes g) o \Delta_C)$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathcal{E}_C"'] & D \arrow[dl, "\mathcal{E}_D"] \\ K & \end{tikzcd} \qquad (\mathcal{E}_D o g = \mathcal{E}_C)$$

تعریف ۳.۱.۰: فرض کنید C یک K-هم-جبر باشد. زیرفضای D از C را یک K-زیرهم-جبر گوییم هرگاه $\Delta_C(D) \subseteq D\otimes D$.

قضیه ۳.۱.۰. اشتراک هر خانواده از K-زیرهم-جبرهای C، یک زیرهم-جبر C است.

اثبات: (قضیه ۱۴.۲.۲ در [۲]).

تعریف ۴.۱.۰: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان K و V^* دوگان این فضا باشد همچنین $S \subseteq V$ و $T \subseteq V^*$. آنگاه

$$S^{\perp} = \{f \in V^* \mid \forall x \in S \quad < f, x >= \circ\}$$

$$T^{\perp} = \{x \in V \mid \forall f \in T \quad < f, x >= \circ\}$$

تعریف ۵.۱.۰: فرض کنید R یک حلقه باشد. زیرمجموعهٔ I از R را یک ایده‌ال R گوییم هرگاه:

۱) $\forall\, a.b \in I \quad a-b \in I$

۲) $\forall\, a \in I, r \in R \quad ra \in I, ar \in I$

قضیه ۰.۱.۴. فرض کنید C یک Kـهم‌ـجبر و C^* دوگان C باشد. آنگاه:

(i)ـ اگر I ایده‌الی از C^* باشد، آنگاه $I^\perp$ یک Kـزیرهم‌ـجبر C است.

(ii)ـ D یک Kـزیرهم‌ـجبر C است اگر و فقط اگر $D^\perp$ ایده‌الی از C^* باشد. در این حالت $\frac{C^*}{D^\perp} \simeq D^*$.

اثبات: (قضیه ۱.۳.۲ در [۲]).

تعریف ۰.۱.۶: یک Kـزیرهم‌ـجبر غیرصفر M از Kـهم‌ـجبر C را Kـزیرهم‌ـجبر ساده گوییم اگر M شامل هیچ زیرهم‌ـجبری غیر از صفر و خودش نباشد.

تعریف ۰.۱.۷: حاصل جمع همهٔ Kـزیرهم‌ـجبرهای سادهٔ C را، هم‌ـرادیکال C نامیم و آنرا با $(Corad\ C)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۰.۱.۸: هم جبر C را هم‌ـنیم‌ـساده گوییم هرگاه C با هم‌ـرادیکال C مساوی باشد.

تعریف ۰.۱.۹: هم‌ـجبر C را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه C تنها یک زیرهم‌ـجبر ساده داشته باشد.

تعریف ۰.۱.۱۰: هم‌ـجبر C را نقطه‌ای گوییم هرگاه بعد همهٔ زیرهم‌ـجبرهای ساده C برابر یک باشد.

تعریف ۰.۱.۱۱: یک هم‌ـجبر تحویل‌ناپذیر و نقطه‌ای را همبند گوییم.

تعریف ۰.۱.۱۲: فرض کنید V یک فضای برداری و S زیرمجموعه V، گوییم S در V چگال است اگر $S^\perp = \{۰\}$.

قضیه ۰.۱.۵. تناظر یک به یکی بین ایده‌الهای بیشین C^* که چگال نیستند و زیرـهم‌ـجبرهای ساده

C وجود دارد.

اگر a زیرهم-جبر ساده غیرصفر از هم-جبر C باشد آنگاه $a^{\perp}$ یک ایده‌ال بیشین از جبر C^* است و اگر I ایده‌ال بیشین در C^* و $I^{\perp} \neq 0$ آنگاه $I^{\perp}$ زیرهم-جبر ساده C است.

اثبات: (قضیه ۲.۳.۴ در [۲]).

قضیه ۶.۱.۰. فرض کنید V فضای برداری و A زیرمجموعه V باشد آنگاه $A^{\perp\perp} = A$.

اثبات: (قضیه ۱ در ضمیمه ۱ در [۱]).

تعریف ۱۳.۱.۰: فرض کنید X و Y دو زیرفضای K-هم-جبر C باشند. همچنین σ، ترکیب دو نگاشت $C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C$ و نگاشت کانونی $C \otimes C \xrightarrow{\pi} \frac{C}{X} \otimes \frac{C}{Y}$ ($\sigma = \pi o \Delta$)، باشد آنگاه قرار دهید $X \wedge Y = ker\ \sigma$.

بنابراین $X \wedge Y = \Delta^{-1}(C \otimes Y + X \otimes C)$ و $X \wedge Y = (X^{\perp}Y^{\perp})^{\perp}$. ضمناً می‌پذیریم $\wedge^{0} X = \{0\}$، $\wedge^{1} X = X$ و $\wedge^{n} X = (\wedge^{n-1} X) \wedge X$.

تعریف ۱۴.۱.۰: فرض کنید D یک K-زیرهم-جبر از هم-جبر C باشد و $D_n = \wedge^n D$ برای $n = 0, 1, 2, \ldots$، قرار دهید $D_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$. اگر $D_\infty = C$ آنگاه گوییم D هم-پوچتوان است.

قضیه ۷.۱.۰. اگر X و Y دو زیر هم-جبر از هم-جبر C باشند، آنگاه $X \wedge Y$ زیر هم-جبر C است.

اثبات: (قضیه ۹.۰.۰ در [۱]).

قضیه ۸.۱.۰. اگر X و Y و Z زیر هم-جبرهای C باشند آنگاه

$$(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z) = X \wedge Y \wedge Z$$

اثبات: (قضیه ۹.۰.۰ در [۱]).

قضیه ۹.۱.۰: فرض کنید C یک Kـهم-جبر و D یک Kـزیرهم-جبر هم-پوچتوان C. اگر رادیکال C^* $(rad\ C^*)$ اشتراک ایده‌الهای بیشین C^* باشد. آنگاه $D^\perp \subseteq rad\ C^*$.

اثبات: (لم ۲.۳.۸ در [۲]).

قضیه ۱۰.۱.۰: فرض کنید C یک Kـهم-جبر باشد. آنگاه

(۱)ـ $rad\ C^* = (Corad\ C)^\perp$.

(۲)ـ D یک Kـزیرهم-جبر هم-پوچتوان C است اگر و فقط اگر $Corad\ C \subseteq D$.

اثبات: (قضیه ۲.۳.۹ در [۲]).

قضیه ۱۱.۱.۰. فرض کنید C یک Kـهم‌جبر و X و Y زیرفضاهای C^* (دوگان C) باشند. اگر ρ نگاشت خطی با ضابطه زیر باشد

$$\rho : C^* \otimes C^* \longrightarrow (C \otimes C)^*$$

$$< \rho(a^* \otimes b^*), c \otimes d > = < a^*, c > < b^*, d >$$

برای هر $a^*, b^* \in C^*$ و $c, d \in C$. آنگاه $[\rho(X \otimes Y)]^\perp = X^\perp \otimes C + C \otimes Y^\perp$.

اثبات: (قضیه ۴ در ضمیمه۱ در [۱]).

لم ۱۲.۱.۰. فرض کنید X و Y دو زیرهم-جبر از هم-جبر C باشد آنگاه $X + Y \subseteq X \wedge Y$.

اثبات: فرض کنید $x + y$ عضوی از $X + Y$ باشد. از این که X و Y زیرهم-جبر هستند داریم:

$$\Delta(x+y) = \Delta(x) + \Delta(y) \in X \otimes X + Y \otimes Y \in X \otimes C + C \otimes Y$$