

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

گروه آمار

عنوان پایان نامه

برآورد پارامترها در مدل های رگرسیون سری زمانی تکراری

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته آمار ریاضی

نویسنده

پروین رحیم پور

استاد راهنما

جناب آقای دکتر مسعود یار محمدی

استاد همکار

جناب آقای دکتر پرویز نصیری

شهریور ۱۳۸۸

چکیده

یکی از مدل های آماری مورد استفاده مدل رگرسیون خطی است که خطاهایش به طور دنباله وار وابسته و از یک الگو سری زمانی پیروی می کند. در این پایان نامه کاربرد روش شبه کمترین مربعات را برای برآورد پارامترها در مدل رگرسیون سری زمانی با خطای اتورگرسیو از مرتبه p مورد بررسی و مطالعه قرار می گیرد. روش شبه کمترین مربعات توسط چاگانتی (۱۹۹۷) برای تحلیل داده های طولی معرفی شد. استفاده از این روش نیازمند هیچگونه فرضی درباره توزیع داده ها نیست. لذا از دیدگاه کاربردی از این جهت حایز اهمیت است که حتی اگر متغیر پاسخ نرمال نباشد می توان به عنوان یک روش بهینه مورد استفاده قرار گیرد. در ادامه روشهای دیگری نظیر برآوردهای گشتاوری و ماکسیمم درستنمائی معرفی می شود. سپس با استفاده از روشهای شبیه سازی به مقایسه کارایی این روشها می پردازیم. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که روش برآورد بهتر از روش برآورد گشتاوری بوده و می تواند به عنوان یک رقیب مناسب در مقایسه با روش برآوردهای ماکسیمم درستنمائی در نظر گرفته شود.

واژه های کلیدی: مدل رگرسیون سری زمانی تکراری، برآوردهای گشتاوری، برآوردهای ماکسیمم

درستنمائی، برآوردهای شبه کمترین مربعات، کارائی نسبی مجانبی

پیش‌گفتار

فصل اول : مقدمه و تعاریف

مقدمه

- ۱-۱ نکات و تعاریف اساسی.....۱
- ۲-۱ مدل رگرسیون سری زمانی تکراری.....۵
- ۳-۱ برآورد پارامترهای مدل۸
- روش برآورد گشتاوری.....۹
- روش برآورد ماکسیمم درستنمایی.....۱۰
- روش برآورد شبه کمترین مربعات.....۱۱

فصل دوم : روش های برآورد مدل رگرسیون سری زمانی با خطای $AR(1)$

- ۱-۲ مدل.....۱۳
- ۲-۲ برآوردهای گشتاوری.....۱۴
- ۳-۲ ماکسیمم درستنمایی.....۱۵
- ۴-۲ برآوردهای شبه کمترین مربعات.....۱۷
- ۵-۲ خصوصیات مجانبی.....۱۷
- خصوصیات مجانبی MLE ها.....۱۸
- ۶-۲ یک حالت خاص.....۲۶
- برآورد روش شبه کمترین مربعات با ساختار جدید ماتریس کوواریانس.....۲۸
- ۷-۲ کارائی نسبی مجانبی (ARE).....۲۹

فصل سوم: روش های برآورد مدل رگرسیون سری زمانی با خطای $AR(2)$

- ۱.۳ مدلی با ساختار همبستگی $AR(2)$۳۸
- ۲-۳ برآوردهای گشتاوری.....۴۰
- ۳-۳ برآوردهای ماکسیمم درستنمایی.....۴۱
- ۴-۳ برآوردهای شبه کمترین مربعات.....۴۳
- ۵-۳ یک حالت خاص.....۴۵

۴۵ ۳ - ۶ خصوصیات مجانبی

۴۷ ۳ - ۷ مقایسه برآوردها از طریق شبیه سازی

فصل چهارم: روش های برآورد مدل رگرسیون سری زمانی با خطای $AR(p)$

۵۵ ۴ - ۱ مدلی با خطاهای $AR(P)$

۵۷ ۴ - ۲ برآوردهای گشتاوری

۵۹ ۴ - ۳ برآوردهای ماکسیمم درستنمایی

۶۲ ۴ - ۴ برآوردهای شبه کمترین مربعات

۶۴ ۴ - ۵ مقایسه برآوردها از طریق شبیه سازی

پیوست الف

پیوست ب

پیوست ج

پیوست د

جدول

صفحه

جدول ۱-۲ کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_m$ و $\hat{\phi}_q$ نسبت به $\hat{\phi}_l$ وقتی که داده ها نرمال هستند..... ۳۰

جدول ۲-۲ کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_m$ ، $\hat{\phi}_q$ و $\tilde{\phi}_q$ نسبت به $\hat{\phi}_l$ وقتی که داده ها از توزیع t -استیودنت شبیه سازی شده اند..... ۳۴

جدول ۲-۳ کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_m$ و $\hat{\phi}_q$ نسبت به $\hat{\phi}_l$ وقتی که داده ها از توزیع $Beta(1.01,1.01)$ شبیه سازی شده اند..... ۳۵

جدول ۱-۳ کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_{1q}$ نسبت به $\hat{\phi}_{1l}$ ، وقتی که داده ها نرمال است..... ۴۹

جدول ۲-۳ کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_{1m}$ نسبت به $\hat{\phi}_{1q}$ ، وقتی که داده ها نرمال است..... ۵۰

جدول ۳-۳ کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_{1q}$ نسبت به $\hat{\phi}_{1l}$ وقتی که داده ها از توزیع نرمال مرکب $0.5N(0,4) + 0.5N(1,4)$ شبیه سازی شده اند..... ۵۲

جدول ۳-۴ کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_{1m}$ نسبت به $\hat{\phi}_{1q}$ وقتی که داده ها از توزیع نرمال مرکب $0.5N(0,4) + 0.5N(1,4)$ شبیه سازی شده اند..... ۵۳

جدول ۱-۴ کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_q$ و $\hat{\phi}_m$ نسبت به $\hat{\phi}_l$ وقتی که داده ها از توزیع نرمال شبیه سازی شده اند..... ۶۵

جدول ۲-۴ کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_q$ و $\hat{\phi}_m$ نسبت به $\hat{\phi}_l$ وقتی که داده ها از توزیع t -استیودنت شبیه سازی شده اند..... ۶۶

جدول ۳-۴ کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_q$ و $\hat{\phi}_m$ نسبت به $\hat{\phi}_l$ وقتی که داده ها از توزیع $0.5N(0,4) + 0.5N(1,4)$ شبیه سازی شده اند..... ۶۷

فهرست شکل ها

صفحه

شکل

شکل ۲- ۱ نمودار کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_m$ و $\hat{\phi}_q$ نسبت به $\hat{\phi}_l$ وقتی که داده ها نرمال هستند و $t = 10$ ۳۱

شکل ۲- ۲ نمودار کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_m$ و $\hat{\phi}_q$ نسبت به $\hat{\phi}_l$ وقتی که داده ها نرمال هستند و $t = 30$ ۳۱

شکل ۲- ۳ نمودار کارائی نسبی مجانبی $\hat{\phi}_q$ نسبت به $\hat{\phi}_l$ وقتی که داده ها نرمال هستند ۳۲

شکل ۲- ۴ نمودار کارائی نسبی مجانبی $\hat{\phi}_q$ نسبت به $\hat{\phi}_m$ وقتی که داده ها نرمال هستند ۳۳

شکل ۲- ۵ نمودار کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_m$ ، $\hat{\phi}_q$ و $\tilde{\phi}_q$ وقتی که داده ها از توزیع t - استیودنت شبیه سازی شده اند $t = 10$ ۳۵

شکل ۲- ۶ نمودار کارائی های نسبی مجانبی $\hat{\phi}_m$ و $\hat{\phi}_q$ وقتی که داده ها از توزیع $Beta(1.01,1.01)$ شبیه سازی شده اند $t = 30$ ۳۶

شکل ۲- ۷ نمودار کارائی نسبی مجانبی $\hat{\phi}_q$ وقتی که داده ها از توزیع $Beta(1.01,1.01)$ شبیه سازی شده اند ۳۶

شکل ۳- ۱ نمودار نواحی ممکن ϕ_1 و ϕ_2 ۳۹

شکل ۳- ۲ نمودار کارائی نسبی مجانبی $\hat{\phi}_{1q}$ نسبت به $\hat{\phi}_{1l}$ ، وقتی که داده ها نرمال است ۴۹

شکل ۳- ۳ نمودار کارائی نسبی مجانبی $\hat{\phi}_{1m}$ نسبت به $\hat{\phi}_{1q}$ ، وقتی که داده ها نرمال است ۵۰

شکل ۳- ۴ نمودار کارائی نسبی مجانبی $\hat{\phi}_{1q}$ نسبت به $\hat{\phi}_{1l}$ وقتی که داده ها از توزیع نرمال مرکب $0.5N(0,4) + 0.5N(1,4)$ شبیه سازی شده اند ۵۲

شکل ۳- ۵ نمودار کارائی نسبی مجانبی $\hat{\phi}_{1m}$ نسبت به $\hat{\phi}_{1q}$ وقتی که داده ها از نرمال مرکب $0.5N(0,4) + 0.5N(1,4)$ شبیه سازی شده اند ۵۳

شکل ۳- ۶ نمودار اریبی $\hat{\phi}_{1m}$ ، $\hat{\phi}_{1q}$ و $\hat{\phi}_{1l}$ وقتی که داده ها از توزیع نرمال مرکب $0.5N(0,4) + 0.5N(1,4)$ شبیه سازی شده اند و $\phi_2 = -0.5$ ۵۴

شکل ۴- ۱ نمودار کارائی نسبی مجانبی $\hat{\phi}_{1q}$ و $\hat{\phi}_{1m}$ نسبت به $\hat{\phi}_{1l}$ وقتی که داده ها از توزیع نرمال شبیه سازی شده اند. ۶۵

شکل ۴- ۲ کارائی نسبی مجانبی $\hat{\phi}_{2q}$ و $\hat{\phi}_{2m}$ نسبت به $\hat{\phi}_{2l}$ وقتی که داده ها از توزیع t - استیودنت شبیه سازی شده اند ۶۷

شکل ۴- ۳. ۴. ARE ها از $\hat{\phi}_m$ و $\hat{\phi}_q$ نسبت به $\hat{\phi}_l$ وقتی که داده ها از توزیع $0.5N(0,4) + 0.5N(1,4)$ شبیه سازی شده اند ۶۸

پیشگفتار

یک مدل معروف برای تحلیل اندازه داده های تکراری که در دنیای واقعی رخ می دهد، مدل رگرسیون سری زمانی است که خطاهای آن از یک مدل اتو رگرسیو میانگین متحرک $ARMA(p, q)$ مانا پیروی می

کند. اندرسون^۱ (۱۹۷۸) برخی از ویژگیهای اساسی اندازه های مکرر را برای فرآیند های اتورگرسیو معرفی و مورد مطالعه قرار داده است. روش ماکسیمم درستنمایی تقریبی برای این فرآیندها توسط هاروی و فلیپس^۲ (۱۹۷۹)، روچون و هلمس^۳ (۱۹۸۹) و روچون (۱۹۹۲) پیشنهاد شده است. همچنین لایرد^۴ (۱۹۸۷) روشهای برآورد ماکسیمم درستنمایی و ماکسیمم درستنمایی محدود برای مدل $ARMA(p, q)$ با استفاده از الگوریتم EM را معرفی کرده است. از طرف دیگر چیانگ و رینسل^۵ (۲۰۰۰) کاهش آریبی را برای برآوردهای ماکسیمم درستنمایی در مدل $AR(P)$ مورد بررسی قرار داده است.

در این پایان نامه مدل رگرسیون سری زمانی که خطای آن از یک مدل اتورگرسیو از رتبه p ($AR(P)$) است، در چهار فصل به شرح ذیل مورد بحث و بررسی قرار می گیرد:

در فصل اول مدل رگرسیون سری زمانی تکراری را تعریف کرده و روشهای برآورد پارامترهای مجهول مدل شامل گشتاوری^۶ (MOM)، ماکسیمم درستنمایی^۷ (MLE) و روش شبه کمترین مربعات^۸ (QLS) معرفی می شوند. امتیاز روش برآورد شبه کمترین مربعات (QLS) نسبت به روش های دیگر این است که به هیچ نوع فرضی درباره توزیع داده ها نیاز ندارد. در قسمت دیگر این فصل، تعاریف اساسی و نمادهای که در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته فهرست بندی شده است.

در فصل دوم روشهای برآورد مدل رگرسیون سری زمانی تکراری با خطای $AR(1)$ را مورد مطالعه قرار می دهیم. ویژگیهای مجانبی هر سه روش MOM ، MLE و QLS بوسیله قضایا شرح داده و نتایج شبیه سازی وقتی که داده ها به ترتیب دارای توزیع نرمال، t -استیودنت و بتا باشند را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم. برای داده های که توزیع شان نرمال است، روشها را بوسیله پیدا کردن توزیع مجانبی شان مورد مقایسه قرار می دهیم. حال وقتی که داده ها دارای توزیع t -استیودنت یا بتا هستند، روشها بوسیله شبیه سازی مقایسه خواهند شد. ویژگی های مجانبی و نتایج شبیه سازی نشان می دهد که روش برآورد شبه کمترین مربعات بهتر از روش گشتاوری و رقیب خوبی برای روش برآورد ماکسیمم درستنمایی است. هنگامی که داده ها از توزیع بتا باشند، روش QLS بهتر از روش ML عمل می کند.

در فصل سوم کاربردی از روشهای برآورد مدل رگرسیون سری زمانی تکراری با خطای $AR(2)$ را مورد مطالعه قرار می گیرد. و همانند فصل دوم جزئیات روشها را تشریح می کنیم. چون در این حالت بدست آوردن نتایج روشن از توزیع های مجانبی شان سخت است، آنها را با استفاده از شبیه سازی مقایسه می کنیم.

فصل چهارم تعمیمی از نتایج فصل های قبل است. در اینجا، مدل های رگرسیون سری زمانی تکراری با خطای اتورگرسیو از مرتبه p مورد بررسی قرار می گیرد. وقتی که خطاها از یک فرآیند $AR(P)$

^۱ - Anderson

^۲ - Harvey and Phillips

^۳ - Rochon and Helms

^۴ - Laird

^۵ - Cheang and Reinsel

^۶ - Moment

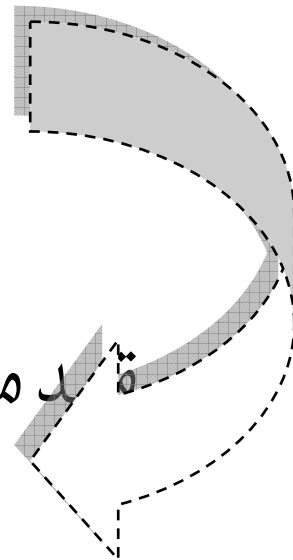
^۷ - Maximum likelihood

^۸ - Quasi - least squares

پیروی کنند، پیدا کردن توزیع های مجانبی آنها بشدت پیچیده است. به همین علت بدست آوردن مقدار دقیق MLE سخت و فقط مقدار تقریبی شان در دسترس است .

فصل اول

مقدمه و تعاریف



مقدمه

در این فصل، خلاصه ای از نکات و تعاریف اساسی که در پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرد را بیان می کنیم. سپس مدل رگرسیون سری زمانی تکراری را معرفی کرده و بطور خلاصه روشهای متداول شامل: روش ماکسیمم درستنمایی و روش گشتاوری را برای برآورد پارامترهای این مدل معرفی می کنیم، در

ادامه اشکالات وارد به این روشها را بررسی کرده و روش شبه کمترین مربعات را بعنوان یک روش دیگری برای برآورد کردن پارامترها معرفی می کنیم .

۱.۱ نکات و تعاریف اساسی

نکات و تعاریف زیر در سرتاسر این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته اند :

۱- گیریم که دنباله داده های $\{y_j\}$ وابسته و از یک مدل رگرسیون خطی به صورت

$$y_j = \mathbf{x}'_j \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_j \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (\times)$$

پیروی کند، بطوری که $t > 2p$ ، تعداد مشاهدات و $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jr})'$ یک بردار r بعدی از متغیرهای تصادفی و $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_r)'$ یک بردار از پارامترهای مجهول رگرسیون است که رابطه بین y_j و \mathbf{x}_j را نشان می دهد. گیریم n تکرار وجود دارد، که واکنش درون تکرار ها ناهمبسته هستند. برای i امین تکرار، پاسخ ها به صورت یک بردار y_i نوشته می شود، در اینصورت مدل ماتریسی رابطه (\times) به صورت زیر است :

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \mathbf{L}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\times \times)$$

بردار پارامترهای مجهول رگرسیون $\boldsymbol{\beta}$ برای همه تکرار ها یکی است و $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{it_i})'$ و \mathbf{L}_i یک ماتریس قطری پائین مثلثی، که عناصر روی قطر آن مثبت است.

۲- برای i امین تکرار، $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{it_i})'$ یک بردار پاسخ $t_i \times 1$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{it_i})'$

یک بردار خطا $t_i \times 1$ است. \mathbf{X}_i یک ماتریس متغیر تصادفی، که رتبه اش در

$$\begin{bmatrix} x_{i11} & \dots & x_{i1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{it_i1} & \dots & x_{it_i r} \end{bmatrix}_{t_i \times r}$$

r کامل است .

۳- برای هر تکرار، دنباله خطا $\{\varepsilon_j\}$ از یک فرآیند مانا $ARMA(p, q)$ با میانگین صفر و واریانس مجهول σ^2 پیروی می کنند، بنابراین :

$$\varepsilon_j = \phi_1 \varepsilon_{j-1} + \dots + \phi_p \varepsilon_{j-p} + a_j - \theta_1 a_{j-1} - \dots - \theta_q a_{j-q},$$

که $\{a_j\}$ یک فرآیند نوفه سفید با میانگین صفر و واریانس σ^2 است. تعریف می کنیم

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{it_i})'$$

۴- پارامترهای اتورگرسیون را با $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$ ، پارامترهای میانگین متحرک را با $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$ و نشان می دهیم $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{\theta}')$ مانا و وارون پذیر است .

۵- ماتریس تویپلیتز^۱ یا ماتریس ثابت قطری، ماتریسی است که قطرهای آن از چپ و راست نزولی است . به عنوان مثال ماتریس زیر ماتریس تویپلیتز است :

۱- Toeplitz matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & \dots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & \dots & \dots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

۶- اگر A یک ماتریس متقارن و معین مثبت باشد، در اینصورت A می تواند به صورت زیر تجزیه شود

$$A = LL'$$

که L یک ماتریس قطری پائین مثلثی، که عناصر روی قطر آن مثبت است. L' ترانهاده L است. این تجزیه چولسکی^۱ است.

۷- تابع اتوکواریانس در تاخیر k ام از $\{\varepsilon_j\}$ برابر با $\gamma_k = Cov(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+k})$ و تابع خودهمبستگی در تاخیر k ام برابر با $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$ است، که $\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2$ واریانس دنباله $\{\varepsilon_j\}$ است. ماتریس اتوکواریانس $\Gamma_{t \times t}$ یک ماتریس توپلیتز از $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{t-1})$ ، که عناصر قطر k ام آن γ_{k-1} است همچنین ماتریس خودهمبستگی $\mathbf{P}_{t \times t}$ یک ماتریس توپلیتز از $(1, \rho_1, \dots, \rho_{t-1})$ ، که عناصر قطر k ام آن ρ_{k-1} است. $\mathbf{V} = (\sigma_\varepsilon^2 / \sigma^2) \mathbf{P}$ یک ماتریس $t \times t$ است. ماتریس های \mathbf{V}, \mathbf{P} و Γ با اندیس p نشان می دهد که بعدشان بجای t ، p است. شرایط مانایی ایجاب می کند که ماتریس های \mathbf{V}, \mathbf{P} و Γ معین مثبت باشند. ماتریس خود همبستگی نمونه $t \times t$ را با \mathbf{R} نمایش می دهیم. بردار خود همبستگی و خودهمبستگی نمونه را به ترتیب با $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)'$ و $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_p)'$ تعریف می کنیم. ماتریس پائین مثلثی $L_{t \times t}$ تجزیه چولسکی از $\mathbf{V}^{-1} = LL'$ یعنی \mathbf{V}^{-1} است. تعریف می کنیم:

$$\Delta(\boldsymbol{\rho}) = 1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \dots - \phi_p \rho_p = 1 - \boldsymbol{\phi}' \boldsymbol{\rho}$$

۸- ε_i دارای میانگین 0 و کوواریانس $\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_i = \sigma^2 \mathbf{V}_i$ است، بنابراین

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \mathbf{0}, \quad Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = Cov(\mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{a}_i) = \sigma^2 \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{L}_i^{-1} = \sigma^2 \mathbf{V}_i = \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

۹- تعریف می کنیم:

$$\mathbf{U}_i(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i' = (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})(\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})'$$

$$\hat{\mathbf{U}}_i = \mathbf{U}_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

۱۰- مجموع مربعات خطا را بصورت زیر نمایش می دهیم:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_i' \mathbf{V}_i^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^n tr(\mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{U}_i).$$

۱۱- برای بدست آوردن MLE واقعی، تحت مدل رگرسیونی $(\times \times)$ و نرمال بودن $\mathbf{a}_i \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ تابع

درستمنائی عبارت است از:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n\bar{t}/2} \prod_{i=1}^n |\mathbf{V}_i|^{1/2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})}{2\sigma^2}\right)$$

که در این رابطه $\bar{t} = \sum_{i=1}^n t_i / n$ است. از این رو، لگاریتم تابع درستنمایی برابر است با :

$$\log L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma^2) = -\frac{n\bar{t}}{2} \log(2\pi) - \frac{n\bar{t}}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log |\mathbf{V}_i| - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}) .$$

$\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma^2)$ ماتریس اطلاع است .

۱۲- وقتی که ماتریس اتوکواریانس برابر با $\boldsymbol{\Gamma} = \sigma^2 \mathbf{V}$ باشد، برآورد پارامترهای اتورگرسیو و میانگین متحرک با نماد ' $\hat{\cdot}$ ' نمایش داده و این یک نماد قرار دادی برای همه برآوردها است. اگر $\boldsymbol{\Gamma} = \sigma^2 \mathbf{P}$ باشد، برآوردها را با نماد ' \sim ' نمایش داده می شوند. در این پایان نامه بحث مان فقط روی حالت $\boldsymbol{\Gamma} = \sigma^2 \mathbf{V}$ است. مگر برای حالت $AR(1)$. در زیر نویس برآوردها بعنوان اندیس برآورد کمترین مربعات تعمیم یافته است، l بعنوان اندیس برآورد ماکسیمم درستنمایی، m بعنوان اندیس برآورد گشتاوری، q بعنوان اندیس برآورد شبه کمترین مربعات، u بعنوان اندیس برآورد کمترین مربعات غیر شرطی، al بعنوان اندیس برآورد ماکسیمم درستنمایی تقریبی است. برآورد واریانس مجانبی را با v نمایش داده می شود .

۱۳- ماتریس \mathbf{C}_{ikl} ، $t_i \times t_i$ تعریف می کنیم به طوری که $\mathbf{C}_{ikl} = \mathbf{C}_{ilk}$ و برای $k > l$ ، $k = 1, \dots, p$ و $l = 0, 1, \dots, p$ ماتریس $2\mathbf{C}_{ikl}$ دارای $(t_i - k - l)$ تا عدد یک روی $(k - l)$ امین قطرهای بالا و پائین قطر اصلی است، بجز l عنصر اول و آخر روی این قطر ها و بقیه جاها عدد صفر قرار می گیرد. ماتریس \mathbf{C}_{ikk} ، $k = 0, 1, \dots, p$ دارای $(t_i - 2k)$ تا عدد یک روی قطر اصلی است. بجز k تاعنصر اول و آخر قطر و بقیه جاها عدد صفر قرار می گیرد. در این صورت داریم که ماتریس \mathbf{C}_{i00} یک ماتریس همانی $t_i \times t_i$ است (منظور \mathbf{I}_i). \mathbf{C}_{k0}^p یک ماتریس، که بعد آن برابر p است. برای مثال ماتریس $2\mathbf{C}_{521}$ به صورت زیر نشان داده می شود :

$$2\mathbf{C}_{521} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

۱۴- \mathbf{e}_k برای $k = 1, 2, \dots, p-1$ یک بردار واحد $p \times 1$ که در k امین موقعیت عدد یک، در بقیه جاها عدد صفر قرار می گیرد.

\mathbf{I}_i یک ماتریس همانی با رتبه t_i است. \mathbf{D} یک ماتریس قطری که بر روی قطر اصلی آن $(1, 2, \dots, p)$ قرار دارد و بقیه جاها صفر است .

۱۵- تعریف می کنیم :

$$c_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n tr(\mathbf{C}_{ikl} \mathbf{U}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=l+1}^{t_i-k} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{i(j+k-l)} \quad , \quad k, l = 0, 1, \dots, p$$

$$\hat{c}_{kl}^* = \hat{c}_{k0} / (\bar{t} - k - l) \quad , \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, p$$

داریم: $c_{kl} = c_{lk} \quad , \quad c_{kl}^* = c_{lk}^*$

به علاوه تعریف می کنیم: $\mathbf{c}_0 = (c_{10}, c_{20}, \dots, c_{p0})'$ و $\mathbf{c}_0^* = (c_{10}^*, c_{20}^*, \dots, c_{p0}^*)'$

\mathbf{C} یک ماتریس $p \times p$ ، که عضو (k, l) امین آن c_{kl} است. \mathbf{C}^* یک ماتریس $p \times p$ که عضو (k, l) امین آن c_{kl}^* است.

۱۶- اگر \mathbf{A}, \mathbf{B} دو ماتریس به صورت زیر باشند:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

در اینصورت داریم:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \mathbf{B} & a_{12} \mathbf{B} \\ a_{21} \mathbf{B} & a_{22} \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

که (\otimes) ضرب کرونگر است.

۱۷- مشتق جزئی تابع اسکالر $l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2)$ نسبت به $\boldsymbol{\phi}$ ، یک بردار $p \times 1$ است:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2)}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \left(\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2)}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2)}{\partial \phi_p} \right)'$$

که ϕ_1, \dots, ϕ_p اجزاء بردار $\boldsymbol{\phi}$ هستند.

۱۸- مشتق جزئی دوم تابع اسکالر $l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2)$ نسبت به $\boldsymbol{\phi}$ و $\boldsymbol{\beta}'$ ، یک ماتریس $p \times r$ است:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2)}{\partial \boldsymbol{\phi} \partial \boldsymbol{\beta}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \phi_1 \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 l}{\partial \phi_1 \partial \beta_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \phi_p \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 l}{\partial \phi_p \partial \beta_r} \end{bmatrix}$$

در بالا ϕ_1, \dots, ϕ_p و β_1, \dots, β_r به ترتیب اجزاء بردار $\boldsymbol{\phi}$ و $\boldsymbol{\beta}$ هستند.

۱۹- اثر (trace)

اثر ماتریس $n \times n$ ، $\mathbf{A} = (a_{ij})$ یک تابع عددی است که به صورت مجموع اعضای قطری \mathbf{A} تعریف می شود یعنی $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. برای مثال ، فرض کنید :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$tr(\mathbf{A}) = 8 - 3 + 9 = 14 \text{ در این صورت}$$

خواص اثر:

$$tr(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) \pm tr(\mathbf{B}) \quad 1- \text{اگر } \mathbf{A} \text{ و } \mathbf{B} \text{ ماتریس های } n \times n \text{ باشند:}$$

$$2- \text{اگر } \mathbf{A} \text{ ماتریس } n \times n \text{ و } \mathbf{P} \text{ یک ماتریس ناویژه } n \times n \text{ باشد آنگاه:}$$

$$tr(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = tr(\mathbf{A})$$

مرتبه r

$$tr(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = r$$

۲۰- ناویژه : یک ماتریس مربع با رتبه کامل را ناویژه گویند.

۲۱- ماتریس معین مثبت : ماتریس متقارن \mathbf{A} ، به ازای تمام مقادیر ممکن y ، به غیر از $y = 0$ ، در نظر می گیریم اگر $y'\mathbf{A}y > 0$ باشد ، صورت درجه دوم $y'\mathbf{A}y$ را معین مثبت گوئیم و ماتریس \mathbf{A} را ماتریس معین مثبت گوئیم . اگر برای تمام y ها ، غیر از $y = 0$ ، $y'\mathbf{A}y \geq 0$ باشد آنگاه \mathbf{A} را ماتریس نیمه معین مثبت گوئیم .

۲۲- داده های طولی : یک مجموعه از داده ها، داده های طولی هستند اگر برای هر فرد یا موضوع خاص یکسری مشاهدات تکراری در زمانهای مختلف داشته باشیم. برای مثال، قسمتی از مجموعه داده های طولی می تواند شامل معدل دانشجویان در هشت ترم تحصیلی متوالی باشد.

۲-۱ مدل رگرسیون سری زمانی تکراری

یک مدل معروف برای تحلیل اندازه داده های تکراری که در زندگی واقعی رخ می دهد، مدل رگرسیون سری زمانی است که خطاهای آن از یک مدل اتو رگرسیو میانگین متحرک $ARMA(p, q)$ مانا پیروی می کند. در حقیقت علیرغم اینکه تحلیل سری زمانی اساساً برای مطالعه یک دنباله از مشاهدات رخ داده در طول زمان می باشد، ولی موقعیت های وجود دارد که تحلیل داده های طولی برای دنباله های مستقل از مشاهدات مکرر مورد نظر می باشد . در رگرسیون سری زمانی تکراری تعداد مشاهدات در هر تکرار کوچک ولی تعداد دنباله های (تکرارهای) مستقل آن زیاد است بنابراین طبیعی است که اگر تعداد دنباله

های مستقل به سمت ∞ میل کند، بتوانیم توزیع های حدى آنرا بیابیم. حال، یک مدل رگرسیون سرى زمانى ساده را معرفی می کنیم :

فرض کنید که $\{y_j\}$ ها از یک مدل رگرسیون خطى به صورت

$$y_j = \mathbf{x}'_j \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (1-1)$$

پیروى کنند، به طوری که $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jr})'$ یک بردار r بعدى از متغیرهای تصادفى یا قطعى^۱ و $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_r)'$ یک بردار از پارمترهای مجهول رگرسیون است که رابطه بین y_j و \mathbf{x}_j را نشان می دهد. پیرو باکس^۲ (۱۹۹۴)، فرض می کنیم y_j ها وابسته و خطاها یعنی $\{\varepsilon_j\}$ ها از یک فرآیند مانا $ARMA(p, q)$ با میانگین صفر و واریانس مجهول σ_ε^2 پیروى کنند، به طوری که :

$$\varepsilon_j = \phi_1 \varepsilon_{j-1} + \dots + \phi_p \varepsilon_{j-p} + a_j - \theta_1 a_{j-1} - \dots - \theta_q a_{j-q} \quad , \quad (2-1)$$

که می توان این فرآیند را به شکل فرآیند خطى کلی زیر نوشت :

$$\varepsilon_j = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k a_{j-k} \quad ,$$

که $\{a_j\}$ یک فرآیند نوفه سفید با میانگین صفر و واریانس مجهول σ^2 و ψ_k ها ضرایب مجهول هستند. به طوری که وزنهاى ψ_k به شکل زیر است :

$$\psi_0 = 1$$

$$\psi_1 = -\theta_1 + \phi_1$$

$$\psi_2 = -\theta_2 + \phi_2 + \phi_1 \psi_1$$

.

.

$$\psi_k = -\theta_k + \phi_p \psi_{k-p} + \dots + \phi_1 \psi_{k-1}$$

پارامترهای اتورگرسیون را با $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$ و پارامترهای میانگین متحرک را با

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$$
 مشخص کرده و مجموعه ای از هر دو پارامتر را با $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{\theta}')$

نشان می دهیم.

در این صورت داریم :

$$E(\varepsilon_{j+k} a_j) = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{j+k-i} a_j\right] = \psi_k \sigma^2 \quad k \geq 0$$

بنابراین تابع اتوکواریانس بایستی در رابطه زیر صدق کند که در آن $\theta_0 = -1$ و اگر $k > q$ باشد آخرین مجموع صفر خواهد بود .

^۱ - Deterministic

^۲ - Box

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E(\varepsilon_{j+k} \varepsilon_j) = E\left[\left(\sum_{i=1}^p \phi_i \varepsilon_{j+k-i} - \sum_{j=0}^q \theta_j a_{j+k-i}\right) \varepsilon_j\right] \\ &= \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{k-i} - \sigma^2 \sum_{i=k}^q \theta_i \psi_{i-k}\end{aligned}\quad (3-1)$$

در رابطه (۳-۱)، با استفاده از اینکه $\gamma_{-k} = \gamma_k$ و به ازای $j > q$ ، $\theta_j = 0$ است، داریم:

(۴-۱)

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} - \sigma^2 (\theta_k \psi_0 + \theta_{k+1} \psi_1 + \dots + \theta_q \psi_{q-k}) \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, \quad k \geq q+1,\end{aligned}$$

با قرار دادن $k = 0$ در معادله (۴-۱) داریم:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma^2 (1 - \theta_1 \psi_1 - \dots - \theta_q \psi_q), \quad (5-1)$$

در معادله (۵-۱)، $\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2$ واریانس $\{\varepsilon_j\}$ است. برای بدست آوردن $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ ، رابطه (۴-۱) را

برای p معادله حل می‌کنیم. بگیریم که $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ تابع خود همبستگی از $\{\varepsilon_j\}$ در تاخیر k ام است.

در اینصورت داریم:

$$\begin{aligned}\rho_k &= \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k \geq q+1, \\ \rho_k &= \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} - \frac{\sigma^2 (\theta_k \psi_0 + \theta_{k+1} \psi_1 + \dots + \theta_q \psi_{q-k})}{\phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma^2 (1 - \theta_1 \psi_1 - \dots - \theta_q \psi_q)}, \quad 0 \leq k \leq q.\end{aligned}\quad (6-1)$$

حال فرض کنیم n دنباله مستقل از داده‌ها را داریم. با داشتن یک نمونه از t_i ($t_i > 2p$) تا مشاهده،

گیریم $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{it_i})'$ یک بردار پاسخ $t_i \times 1$ برای تکرار i ام $i = 1, \dots, n$ و

$\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ شامل همه مشاهدات است. طبق چیانگ^۱ (۲۰۰۰)، بردار خطا

$\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{it_i})'$ دارای میانگین صفر و کوواریانس $\Gamma_i(\boldsymbol{\Lambda}, \sigma^2)$ است، دارای میانگین $\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}$ و

کوواریانس

$$\Gamma_i(\boldsymbol{\Lambda}, \sigma^2) = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{P}_i(\boldsymbol{\Lambda}) = \sigma^2 \mathbf{V}_i(\boldsymbol{\Lambda}) \quad (7-1)$$

است. در رابطه (۷-۱)، $\Gamma_i(\boldsymbol{\Lambda}, \sigma^2)$ یک ماتریس کوواریانس t_i بعدی که عناصر قطر k ام آن،

$\mathbf{P}_i(\boldsymbol{\Lambda})$ و γ_{k-1} یک ماتریس خود همبستگی t_i بعدی که عناصر قطر k ام آن، ρ_{k-1} است و داریم

$\mathbf{V}_i(\boldsymbol{\Lambda}) = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{P}_i(\boldsymbol{\Lambda}) / \sigma^2$. شرط مانایی دلالت بر این دارد که Γ_i ، \mathbf{P}_i و \mathbf{V}_i معین مثبت می‌باشند.

ماتریس متغیر تصادفی \mathbf{X}_i را به صورت

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_{i11} & \dots & x_{i1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{it_11} & \dots & x_{it_1r} \end{bmatrix}$$

در \mathbf{X}_i تعریف می کنیم که \mathbf{X}_i در

مرتبه r کامل است. طبق چیانگ (۲۰۰۰)، مدل (۱-۱) می تواند به صورت ماتریسی زیر نوشته شود:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \mathbf{L}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\lambda-1)$$

که در این رابطه، $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{it_i})'$ و \mathbf{L}_i تجزیه چولسکی از \mathbf{V}_i^{-1} است، بنابراین

$$\mathbf{V}_i^{-1} = \mathbf{L}_i' \mathbf{L}_i \text{ است.}$$

۳-۱ برآورد پارامترهای مدل

مشکل اساسی در مدل رگرسیون سری زمانی تکراری برآورد تعداد $(r + p + q + 1)$ پارامترهای $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma^2)$ در مدل (۱-۱) است. اگر با مدل همچون یک مدل رگرسیونی بدون هیچ فرض اضافی رفتار شود، می توان از شیوه معادله برآورد تعمیم یافته^۱ (GEE) استفاده کرد. از طرف دیگر، اگر با مدل نظیر یک مدل سری زمانی رفتار شود، می توان از روش کمترین مربعات غیر شرطی باکس جینکینس و روش بیز استفاده کرد (باکس ۱۹۹۴). اما روشهای برآورد ماکسیمم درستنمایی^۲ (MLE) و گشتاوری^۳ (MOM) به عنوان روشهای قدیمی و رایج شناخته شده است. چیانگ و رینسل (۲۰۰۰) روش ماکسیمم درستنمایی محدود^۴ $(REML)$ برای مدلی که خطاهایش $AR(P)$ است مطرح کرده اند. این محققان اساساً تمرکز شان روی نتایج برآورد گشتاوری (MOM) و ماکسیمم درستنمایی (ML) بوده و کارائی نسبی بدست آمده از این روش را نسبت به روشهای دیگر مقایسه کرده اند.

طبق چیانگ و رینسل (۲۰۰۰)، تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n\bar{r}/2} \prod_{i=1}^n |\mathbf{V}_i|^{1/2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})}{2\sigma^2}\right)$$

بنابراین برای بدست آوردن برآورد $\boldsymbol{\beta}$ ، باید مجذور مربعات خطا

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_i' \mathbf{V}_i^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}) = \\ &= \sum_{i=1}^n [\mathbf{y}_i' \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{y}_i - 2 \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}_i' \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{y}_i + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}_i' \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}] \quad (9-1) \end{aligned}$$

^۱ - Generalized estimating equation

^۲ - Maximum likelihood estimates

^۳ - Moment estimates

^۴ - Restricted maximum likelihood

را نسبت به β مینیمم می کنیم. رابطه (۹-۱) می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$S(\beta, \lambda) = \sum_{i=1}^n tr[(V_i^{-1} U_i)] \quad , \quad (10-1)$$

در این رابطه "tr" به عنوان اثر و

$$U_i(\beta) = \varepsilon_i \varepsilon_i' = (y_i - X_i \beta)(y_i - X_i \beta)' \quad .$$

اگر از $S(\beta, \lambda)$ در معادله (۹-۱) نسبت به β مشتق جزئی بگیریم، داریم:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^n X_i' V_i^{-1} y_i + 2 \left(\sum_{i=1}^n X_i' V_i^{-1} X_i \right) \beta \quad ,$$

که نتیجه می دهد

$$\hat{\beta}_g = \left(\sum_{i=1}^n X_i' V_i^{-1} X_i \right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n X_i' V_i^{-1} y_i \quad , \quad (11-1)$$

در این رابطه g به عنوان اندیسی برای برآورد کمترین مربعات تعمیم یافته بوده، ضمناً کوواریانس این برآورد برابر است با:

$$COV(\hat{\beta}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i' V_i^{-1} X_i \right)^{-1} \quad . \quad (12-1)$$

یک برآورد ناریب از σ^2 به صورت زیر

$$(13-1)$$

$$\hat{\sigma}_g^2 = \frac{1}{nt} S(\beta, \lambda) = \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^n tr(V_i^{-1} U_i) \quad ,$$

بیان می شود. که $\bar{t} = \sum_{i=1}^n t_i / n$ است.

روش برآورد گشتاوری

یک روش ساده برای برآورد λ ، روش برآورد گشتاوری است. با داشتن "باقیمانده" $\hat{\varepsilon}_i = y_i - X_i \hat{\beta}$ از مدل رگرسیون (۸-۱)، برآورد گشتاوری از λ را با قرار دادن $E(\varepsilon_i \varepsilon_i') = \hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_i'$ بدست آورده، این معادله را حل می کنیم، که این معادل است با اینکه $\Gamma_i = \hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_i'$ قرار دهیم. چون $\Gamma_i = Cov(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i \varepsilon_i') - E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_i') = E(\varepsilon_i \varepsilon_i')$ با حل این معادله $(t_i - k)$ تا برآورد اتوکوواریانس γ_k برای i امین تکرار در تاخیر k ام بوجود می آید که آنها را با میانگین شان برآورد می کنیم، از این رو γ_k با $\hat{c}_{k0} / (\bar{t} - k)$ برآورد می شود، که در آن

$$(14-1)$$

$$\hat{c}_{k0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{t_i-k} \hat{\varepsilon}_{ij} \hat{\varepsilon}_{i(j+k)} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, p$$