دانشگاه شیراز

دانشکده ی علوم

پایان نامه ی کارشناسی ارشد در رشته ی ریاضی محض- جبر وتوپولوژی

اصل ایده آل اول یکطرفه برای حلقه های ناجابجایی

به وسیلهی

شیما عرب زاده

استاد راهنما

آقای دکتر بابک امینی

شهریور ماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب شیما عرب زاده (۸۸۰۶۱۱) دانشجوی رشته ی ریاضی محض گرایش جبر و توپولوژی دانشکده ی علوم اظهار می کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته ام. همچنین اظهار می کنم که تحقیق و موضوع پایان نامه ام تکراری نیست و تعهد می نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه حقوق این اثر مطابق با آیین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است .

نام و نام خانوادگی : شیما عرب زاده

تاریخ و امضا : ۱۳۹۱/۲/۴

به نام خدا

اصل ایده آل اول یکطرفه برای حلقه های ناجابجایی

به کوشش

شیما عرب زاده

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه شیراز به عنوان بخشی

از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی کمیته‌ی پایان نامه، با درجه‌ی: عالی

دکتر بابک امینی، استادیار بخش ریاضی (رئیس کمیته)..............................

دکتر مجید ارشاد لنگرودی، استاد بخش ریاضی..............................

دکتر افشین امینی، استادیار بخش ریاضی..............................

شهریور ماه ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادرم دو فرشته ای که از خود گذشتگی ها و زحمات بی دریغشان باعث شد من به این جایگاهی که اکنون هستم ، برسم.

تقدیم به همسرم که دشواری های مسیر را برایم آسان نمود و از رفتارش ، محبت و از صبرش ، ایستادگی آموختم.

تقدیم به خواهرم که وجودش مایه ی آرامش و شادی بخش زندگی من است.

و تقدیم به تمام آموزگارانم و به تمامی کسانی که نیک می اندیشند و عقل و منطق را پیشه خود نموده و جز رضای الهی و پیشرفت و سعادت جامعه، هدفی ندارند.

سپاسگزاری

شکر و سپاس خدای را که به من این فرصت را داد تا به این مرحله از علم رسیده و از هیچ محبتی دریغ نکرد و در تمام مراحل زندگیم مرا قوت قلب بود. هر چه دارم از اوست ...

نمی توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر بر زبانم جاری سازم و سپاس خود را در وصف استادان خویش آشکار نمایم، که هر چه گویم، کم گفته ام...

سپاس فراوان از زحمات تمامی اساتید محترم بخش ریاضی به خصوص استاد ارجمند جناب آقای دکتر بابک امینی که با صبر و حوصله ، با راهنمایی های خود راهگشای من بوده اند و سپاس فراوان از اساتید مشاورمحترم، آقای دکتر مجید ارشاد وآقای دکتر افشین امینی که از راهنمایی های ایشان بهره بردم.

چکیده

اصل ایده آل اول یکطرفه برای حلقه های ناجابجایی

به کوشش

شیما عرب زاده

ایده آلهای راست کاملاً اول را می توان یک تعمیم یک طرفه از مفهوم ایده آل در حلقه جا بجایی به حساب آورد. برخی از خصوصیات اولیه و پایه ای آنها به دست آورده شده است و به تشابهات و تفاوت های بین این ایده الهای راست در حلقه های جابجایی و در نقطه مقابل آن یعنی در حلقه های نا جابجایی اشاراتی گردیده است.

در این پایان نامه اصل ایده آلهای کاملاً اول که بیانگر این مطلب است که ایده آلهای راست ماکسیمال حتماً یک ایده آل کاملاً اول هستند را بیان و اثبات می کنیم و به تعدادی از کاربرد های اصل ایده آل کاملاً اول که از دیدگاههای مختلفی در حلقه ها و مدول ها جمع آوری شده اشاره خواهیم کرد که این کاربردها بیانگر این مطلب اند که چگونه ایده آلهای راست کاملاً اول ساختار یک طرفه حلقه را کنترل می کنند.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول

مقدمه

ایده آل های اول نقش مهمی در مطالعه ی جبر جابجایی ایفا می کنند. در واقع می توان گفت ایده آل های اول یک حلقه ی جابجایی، ساختار آن حلقه را کنترل می کنند. دلایل بسیاری برای اثبات این ادعا وجود دارد؛ که از آن جمله می توان به دو قضیه ی مشهور کوهن [1] اشاره کرد:

٭**قضیه ۱.۱ :** حلقه ی جابجایی R نوتری است، اگر و تنها اگر، هر ایده آل اول R، متناهیاً تولید شده باشد.

٭**قضیه۲.۱ :**حلقه ی جابجایی $R \neq 0$، یک دامنه ی ددکیند است، اگر و تنها اگر، هر ایده آل اول ناصفر R، وارون پذیر باشد.

البته توجه داشته باشید که در اصل، کوهن، قضیه ی ۲.۱ را برای دامنه های جابجایی $R \neq 0$ اثبات کرده است. اما می توان این نتیجه را به حلقه های جابجایی ناصفر نیز گسترش داد.

با توجه به آنچه گفته شد، در این پژوهش، بر آن هستیم که این مطلب را در حلقه های ناجابجایی بررسی کنیم.

ممکن است این طور به نظر بیاید که ایده آل های دو طرفه اول حلقه های ناجابجایی، گزینه ی مناسبی برای تعمیم آنچه گفته شد به حلقه های ناجابجایی هستند. اما با اطمینان می توان گفت چنین نیست و این ایده آل ها نمی توانند ساختار حلقه های ناجابجایی را کنترل کنند. یک دلیل این موضوع آن است که بسیاری از حلقه های پیچیده ایده آل های دو طرفه ی کمی دارند. به عنوان مثال حلقه های ساده را در نظر بگیرید که تنها یک ایده آل اول دارند، اما

---

[1] I.S.Cohen

این حلقه ها ساختار یک طرفه ی بسیار جالبی دارند.

با توجه به آنچه گفتیم، نیازمند گونه ای دیگر از ایده آل ها در حلقه های ناجابجایی هستیم. بنابراین ایده آل های کاملاً اول را در این پژوهش معرفی می کنیم. می توان گفت ایده آل های کاملاً اول نوعی از ایده آل های یک طرفه اول هستند و ساختار یک طرفه ی حلقه ی ناجابجایی را کنترل می کنند. قضایای کوهن، که بدان ها اشاره کردیم، نوع قضایای ساختاری را که در این پژوهش در صدد بیان و اثبات آنها هستیم، روشن تر می سازند.

در فصل دوم، ایده آل های راست کاملاً اول را به طور کامل معرفی می کنیم. ایده ی تعریف این گونه ایده آل ها، به ایده ی تعریف ایده آل های اول یک طرفه و در نتیجه به تعریف ایده آل اول در حلقه های جابجایی بازمی گردد. پس از معرفی ایده آل های کاملاً اول، برای بررسی بیشتر آنها در حلقه های ناجابجایی، تعدادی قضیه را بیان و اثبات می کنیم.

گفتیم در صدد آن هستیم که ثابت کنیم ایده آل های کاملاً اول، چگونه، ساختار یک حلقه ی ناجابجایی را کنترل می کنند. یک دلیل برای این ادعا، بیان و اثبات قضیه کوهن، برای حلقه های ناجابجایی است، که در فصل سوم این پژوهش بدان پرداخته می شود. اما قبل از بیان آن، به مفاهیم مهم دیگری نیازمندیم.

یک قضیه ی مهم که قبل از قضیه ی ناجابجایی کوهن بیان و اثبات خواهد شد، اصل مهمی است به نام "اصل ایده آل کاملاً اول " که برای بیان این اصل، نیازمند معرفی خانواده مهمی از ایده آل ها هستیم، که به آنها "خانواده های اُکا" می گویند.

یکی از قسمت های اصلی در اثبات های قدیمی قضایای کوهن، نشان دادن این است که ایده آل یک حلقه ی جابجایی، که نسبت به متناهیاً تولید شده نبودن (یا وارون پذیر نبودن)، ماکسیمال است، یک ایده آل اول می باشد، قضایای بسیار دیگری در جبر جابجایی هست که بیان می کنند ایده آل های یک حلقه که نسبت به یک خاصیت معین ماکسیمال هستند ، باید اول باشند. اصل ایده آل اول که در منبع [۱۱]، بیان و اثبات شده است؛ تعداد زیادی از این نتایج را با استفاده از مفهوم خانواده های اُکا از ایده آل ها در حلقه های جابجایی، یکپارچه کرده است. اصل ایده آل کاملا اول، تعمیمی از اصل ایده آل اول، به ایده آل های یک طرفه ی یک حلقه ی ناجابجایی است. به اختصار به این اصل " $CPIP$ "می گوییم. این نتیجه تعمیمی از فلسفه ی"ماکسیمال بودن، اول بودن را نتیجه می دهد " است؛ ایده آل های راستی که نسبت

به خصوصیت معینی ماکسیمال هستند، کاملاً اول می باشند. بنابراین مشاهده می کنید که $CPIP$، ابزار اصلی ما برای ارتباط ایده آل های راست کاملاً اول با ساختار یک طرفه ی حلقه می باشند، که به طور مثال به کمک آن می توان قضیه ی کوهن(۱.۱) را در حلقه های ناجابجایی داشت.

برای اینکه به طور مؤثری بتوانیم از $CPIP$ استفاده کنیم، نیازمند ساختن خانواده های اُکای راست هستیم. در فصل ۴، به چگونگی ساختن مثال هایی از خانواده های اکای راست (از کلاس های مدول های دوری که تحت توسیع، بسته اند) می پردازیم و نهایتاً در فصل ۵، کاربردهایی از اصل ایده آل کاملاً اول را بیان می کنیم.

این پژوهش از منبع [۱۵] استخراج گردیده است.

قراردادها

۱. در این پژوهش، علامت $=:$ به معنای آن است که طرف چپ تساوی برابر با طرف راست تساوی تعریف شده است.

۲. تمام حلقه ها، یکدار و تمام زیرحلقه ها، مدول ها و همریختی های حلقه ای، یکانی فرض شده اند.

۳. با در نظر گرفتن حلقه ی R، می گوییم R حلقه ی نیم ساده است اگر R_R یک مدول نیم ساده باشد.

۴. $I_R \subseteq R$ به این معنی است که Iیک ایده آل راست و $I \lhd R$ بدین معنی است که I یک ایده آل دو طرفه ی محض در R می باشد.

۵. عبارت "ایده آل " همواره به ایده آل دو طرفه اشاره دارد، به استثنای عبارت "اصل ایده آل کاملاً اول" (قضیه ۳.۳).

۶. $Spec(R)$ نشان دهنده ی مجموعه ی ایده آل های دو طرفه ی اول R است.

۷. عضو منظم R، عضو ناصفری از R است که مقسوم علیه صفر چپ و راست R نیست.

۸. با در نظر گرفتن خانواده ی F از ایده آل های راست R، F'، نشان دهنده مکمل F با مجموعه ی تمام ایده آل های راست است.

۹. $Max(F')$ نشان دهنده ی مجموعه ی تمام اعضای ماکسیمال F' است.

۱۰. با در نظر گرفتن R-مدول M_R ، $Soc(M)$ نشان دهنده ی $socle(M)$ (مجموع تمام زیر مدول های ساده ی M) است.

۱۱. َتوجه کنید که در سراسر این پژوهش با فرض این که M_R یک $R-$ مدول و $m \in M_R$ و N یک زیر مدول $R-$ مدول M_R باشد، ایده آل راست $m^{-1}N$ را بدین صورت تعریف میکنیم:

$$m^{-1}N := \{r \in R : mr \in N\}$$

که البته در این پژوهش این ساختار به صورت $a^{-1}I$ است که $a \in R$ و I یک ایده آل راست R است.در جبر جابجایی این ایده آل معمولا به صورت $(I : a)$ نشان داده می شود.

فصل دوم

ایده آل های راست کاملاً اول

در این بخش ایده آل های راست کاملاً اول را تعریف کرده و به بررسی برخی از خصوصیات آن ها می پردازیم.

❋**تعریف ۱.۲ (ایده آل راست کاملاً اول) :** ایده آل راست $P_R \subsetneq R$، کاملاً اول است، اگر برای هر $a , b \in R$ که $aP \subseteq P$ و $ab\in P$ داشته باشیم $a\in P$ یا $b\in P$.

❋**لم ۲.۲ :**ایده آل راست $P_R \subsetneq R$ کاملاً اول است، اگر و تنها اگر برای هر $a\in R$ که $aP\subseteq P$ و $a \notin P$ داشته باشیم $a^{-1} P = P$.

اثبات: ⇦فرض کنیم $P\subsetneq R$ یک ایده آل راست کاملاً اول باشد و وجود داشته باشد $a\in R$، به قسمی که $aP\subseteq P$ و $a \notin P$. می خواهیم ثابت کنیم $a^{-1} P = P$. فرض کنیم $r\in a^{-1}P$. پس داریم $ar\in P$ و چون P یک ایده آل راست کاملاً اول است و $aP\subseteq P$ پس داریم $a\in P$ یا $r\in P$ و چون طبق فرض $a\notin P$، پس $r\in P$. بنابراین $a^{-1}P\subseteq P$. (۱)

حال فرض کنیم $b\in P$. می خواهیم ثابت کنیم $b\in a^{-1}P$. چون $b\in P$ ، پس $ab\in aP$ و چون طبق فرض $aP\subseteq P$، پس $ab\in P$. بنابراین داریم $P\subseteq a^{-1}P$.(۲)

حال با توجه به (۱)و(۲) داریم $a^{-1} P = P$.

⇨ فرض کنیم برای هر $a\in R$، که $aP\subseteq P$ و $a\in P$ داشته باشیم $a^{-1}P=P$. می خواهیم ثابت کنیمPیک ایده آل راست کاملاً اول است. فرض کنیم $a , b \in R$ به گونه ای باشند که $aP\subseteq P$ و $ab\in P$. باید ثابت کنیم $a\in P$ یا $b\in P$. فرض کنیم $a\notin P$. ثابت می کنیم $b\in P$. طبق فرض داریم $P=a^{-1}P$. از آنجایی که $ab\in P$ پس $b\in a^{-1}P$. پس$b\in P$. ■

***تعریف ۳.۲(ایده آل کاملاً اول) :** $P \lhd R$، یک ایده آل کاملاً اول است، اگر برای هر $a, b \in R$ که $ab \in P$ داشته باشیم $a \in P$ یا $b \in P$.

***گزاره ۴.۲** : برای هر حلقه ی R، $P \lhd R$ به عنوان یک ایده آل راست، کاملاً اول است اگر و تنها اگر یک ایده آل کاملاً اول باشد. به خصوص ایده آل P، به عنوان یک ایده آل راست کاملاً اول است، اگر و تنها اگر به عنوان ایده آل چپ، کاملاً اول باشد.

اثبات : ⇦ فرض کنیم $P \lhd R$ به عنوان یک ایده آل راست، کاملاً اول باشد، می خواهیم ثابت کنیم P یک ایده آل کاملاً اول است. فرض کنیم $a, b \in R$ به گونه ای باشند که $ab \in P$. باید ثابت کنیم $a \in P$ یا $b \in P$. از آنجایی که P یک ایده آل دو طرفه است، پس همواره داریم $aP \subseteq P$ و چون P به عنوان ایده آل راست کاملاً اول است، بنابراین داریم، $a \in P$ یا $b \in P$.

⇨ فرض کنیم $P \lhd R$ ، یک ایده آل کاملاً اول باشد، می خواهیم ثابت کنیم P به عنوان یک ایده آل راست، کاملاً اول است. فرض کنیم $a, b \in R$ به گونه ای باشند که $aP \subseteq P$ و $ab \in P$. از آنجایی که Pیک ایده آل کاملاً اول است و $ab \in P$ داریم $a \in P$ یا $b \in P$. مشابه همین اثبات را برای $P \lhd R$ که به عنوان یک ایده آل چپ، کاملاً اول است داریم. بنابراین قسمت دوم قضیه به وضوح برقرار است.■

بنابراین ایده آل های راست کاملاً اول، توسیع مفهوم ایده آل های کاملاً اول در حلقه های ناجابجایی و تعمیم مفهوم ایده آل اول در حلقه های جابجایی هستند.

در این جا یک نوع ایده آل اول به نام ایده آل راست شدیداً اول را تعریف می کنیم:

***تعریف ۵.۲ (ایده آل راست شدیداً اول) :** ایده آل راست $P \subsetneq R$ را یک ایده آل شدیداً اول گوییم اگر برای هر $a, b \in R$که $ab \in P$ داشته باشیم $a \in P$ یا $b \in P$.

اکنون این سوال پیش می آید که شاید ایده آل های راست شدیداً اول، بهتر از ایده آل های راست کاملاً اول ساختار حلقه را کنترل کنند. اما ادعا می کنیم که ایده آل های راست کاملاً اول در مواردی که ایده آل های شدیداً اول غائب هستند، حضور دارند. در واقع در نتیجه ی ۱۱.۲ نشان خواهیم داد که هر ایده آل راست ماکسیمال یک حلقه، کاملاً اول است و

این اثبات می کند که هر حلقه ی ناصفر، حداقل یک ایده آل راست کاملاً اول دارد. از طرف دیگر مثال های بسیاری از حلقه های ناصفر وجود دارد که هیچ ایده آل راست شدیداً اولی ندارند.

به گزاره ی زیر توجه کنید :

***گزاره ۶.۲ :**فرض کنید R، یک حلقه ساده باشد که عضو خودتوان غیربدیهی دارد. آنگاه R هیچ ایده آل راست شدیداً اولی ندارد.

اثبات: به کمک برهان خلف این گزاره را ثابت می کنیم:

فرض خلف : فرض کنیم $I \subsetneq R$ یک ایده آل راست شدیداً اول باشد. می دانیم که طبق فرض، R عنصر خودتوان غیربدیهی دارد. بنابراین برای هر عضو خودتوان $e \neq 1,0$، اگر قرار دهیم $f := 1 - e \neq 0$ ، آن گاه $R\,f\,R$ یک ایده آل R است چون R حلقه ی ساده است و $RfR \neq 0$، پس $RfR=R$.

از طرفی داریم $(eRf)^2=0$ زیرا:

$$(eRf)^2 = eRf\ eRf=eR(1-e)eRf=0$$

و همواره

$$0\subseteq I$$

پس:

$$(eRf)^2 = 0\subseteq I$$

حال چون I یک ایده آل راست شدیداً اول است.بنابراین :

$$eRf \subseteq I$$

(اثبات : فرض کنیم $erf \in eRf$ پس $(erf)\ (erf) \in (eRf)^2 \subseteq I$ و I یک ایده آل راست شدیداً اول است، بنابراین $erf\in I$ پس $eRf \subseteq I$).

از این رو :

$$eR = eRfR \subseteq I$$

به همین ترتیب ثابت می شود که $fR\subseteq I$.

حال چون Rدارای عضو خود توان غیربدیهی e است ؛ پس :

$$R=eR + (1-e)R = eR + fR \subseteq I$$

بنابراین $R\subseteq I$ و چون $I \subsetneq R$ پس $R=I$ که این تناقض است. زیرا فرض کرده بودیم $I \subsetneq R$

بنابراین R هیچ ایده آل راست شدیداً اولی ندارد. ■

یک مثال ساده از این گونه حلقه ها را بررسی می کنیم :

***مثال ۷.۲** : فرض کنید K یک حلقه ی تقسیم باشد. قرار دهید $R=M_n(K)$ که $n>1$.

می دانیم که ایده آل های R برابرند با $M_n(I)$ که I یک ایده آل K است.

چون تنها ایده آل های K برابر با 0 و K هستند پس R ایده آل غیر بدیهی ندارد. پس R یک حلقه ی ساده است که به وضوح عضو خودتوان غیر بدیهی دارد. پس طبق گزاره قبل هیچ ایده آل راست شدیداً اولی ندارد.

در ادامه به بررسی برخی از ویژگی های ایده آل های راست کاملاً اول می پردازیم.

قبل از آن به معرفی یک زیرحلقه از حلقه ی R نیازمندیم.

***تعریف ۸.۲ : (ایده آل ساز)**

برای حلقه ی R و ایده آل راست $J_R\subseteq R$، ایده آل ساز ایده آل راست J_R به صورت زیر تعریف می شود :

$$I_R(J):=\{x\in R : xJ\subseteq J\}$$

***لم۹.۲:** برای حلقه ی R و ایده آل راست $J_R\subseteq R$، ایده آل ساز J_R بزرگترین زیر حلقه ی R، شامل J است که در آن J یک ایده آل دو طرفه می باشد.

اثبات : $I_R(J)$ یک زیرحلقه از R است که شامل J می باشد زیرا برای هر $a\in J$ داریم $aJ\subseteq J$.حال چون J در R ، ایده آل راست است، پس برای هر $x\in I_R(J)$ داریم $Jx \subseteq J$ و بنابراین J در $I_R(J)$ یک ایده آل راست است . از طرفی طبق تعریف $I_R(J)$ برای هر $x \in I_R(J)$ داریم $xJ \subseteq J$. پس J در $I_R(J)$ یک ایده آل چپ می باشد، بنابراین J در $I_R(J)$ یک ایده آل دوطرفه است.

حال فرض کنیم S یک زیرحلقه از R باشد که شامل J است و J در آن یک ایده آل دو طرفه است. می خواهیم ثابت کنیم $S\subseteq I_R(J)$. فرض کنیم $x\in S$. باید ثابت کنیم $xJ\subseteq J$. از آنجایی که J در S یک ایده آل دو طرفه است، داریم $xJ\subseteq J$. پس$S \subseteq I_R(J)$. بنابراین $I_R(J)$ بزرگترین زیر

حلقه ی R است که شامل J می باشد و J در آن یک ایده آل دو طرفه است. ■

*****لم ۱۰.۲** : برای حلقه ی R و ایده آل راست $J\subseteq R$ همواره داریم :

$$End_R(\frac{R}{J}) \cong \frac{I_R(J)}{J}$$

اثبات : تابع f را بدین صورت تعریف می کنیم :

$$f: I_R(J) \to End_R(\frac{R}{J})$$
$$x \to \lambda_x$$

$$f(x) = \lambda_{(x)} : \frac{R}{J} \to \frac{R}{J}$$
$$\lambda_x(r+J) = xr + J$$

۱)اثبات خوش تعریفی λ_x و f :

فرض کنیم $x\in I_R(J)$. باید ثابت کنیم برای هر $r_1+J \in \frac{R}{J}$ و r_2+J , اگر $r_1+J = r_2+J$ داریم:

$$xr_1 + J = xr_2+J$$

طبق فرض $r_1+J=r_2+J$ بنا براین:

$$J\in(r_1-r_2)$$

حال طبق تعریف $I_R(J)$، برای هر $x\in I_R(J)$ داریم :

$$xJ\subseteq J$$

بنابراین برای هر $x\in I_R(J)$ داریم $x(r_1-r_2)\in J$، پس:

$$xr_1 - xr_2 \in J$$

در نتیجه :

$$xr_1+J=xr_2+J$$

پس λ_x خوش تعریف است. خوش تعریفی f، واضح است.

۲) f به وضوح یک همریختی حلقه ای است .

۳)اثبات می کنیم $ker f = J$:

$x\in ker f$ اگر و تنها اگر:

$$f(x) = \lambda_x = 0$$

اگر و تنها اگر به ازای هر $r+J \in \frac{R}{J}$ داشته باشیم:

$$\lambda_x(r+J) = 0$$

اگر و تنها اگر به ازای هر $r\in R$ داشته باشیم:

$$xr+J = J$$