بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه الزهرا(س)
دانشکده علوم‌پایه

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از روش گالرکین

استاد راهنما:

دکتر یداله اردوخانی

استاد مشاور:

دکتر علیمردان شاهرضایی

دانشجو:

مریم زمانیان نجف آبادی

اسفند ۱۳۹۱

چکیده

هدف اصلی در این رساله حل معادلات انتگرال فردهلم به شکل زیر با استفاده از روش گالرکین می باشد:

$$y(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,t)\,[y(t)]^p dt; \quad 0 \leq x \leq 1,$$

که در آن y تابعی مجهول ، k تابعی معلوم در $L^2\left([0,1]\times[0,1]\right)$ و f تابعی معلوم در $L^2\left([0,1]\right)$ می باشدو p یک عدد صحیح مثبت است.

با استفاده از روش گالرکین بر پایه موجک لژاندر،جواب را به صورت $C^T\psi\left(x\right)$ تقریب می زنیم که در آن C بردار مجهول و $\psi\left(x\right)$ بردار پایه‌ی موجک لژاندر می‌باشد. در این روش با استفاده از پایه موجک لژاندر و خواص آن،مسأله تبدیل به یک دستگاه غیرخطی می‌شود که از حل آن جواب معادله انتگرال غیرخطی تقریب زده می‌شود.

برای این منظور ابتدا روش را برای معادله انتگرال خطی فردهلم و ولترای نوع اول، معادله انتگرال خطی ولترا -فردهلم نوع دوم و در انتها معادله ولترای غیرخطی نوع دوم به ترتیب به صورت زیر به کار می‌بریم :

$$f(x) = \int_0^1 k(x,t)y(t)dt, \qquad f(x) = \int_0^x k(x,t)y(t)dt,$$

$$y(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,t)y(t)dt + \int_0^x k(x,t)y(t)dt,$$

$$y(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)\,[y(t)]^p dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

و نتایج کامپیوتری حاصل از محاسبات را بررسی خواهیم نمود .

کلمات کلیدی: روش گالرکین، موجک لژاندر، معادله انتگرال خطی فردهلم، معادله انتگرال ولترا، معادله انتگرال غیر خطی، انتگرال گیری گاوس لژاندر .

فهرست مطالب

مقدمه

بسیاری از مسائل ریاضی، فیزیک، مهندسی و علوم دیگر مرتبط با آن به معادلات انتگرال منتهی می شود.
روش‌های تحلیلی برای حل معادلات انتگرال بر حسب اینکه از چه نوعی باشند به کار می‌رود ولی با توجه به اینکه در بسیاری از معادلات انتگرال حل تحلیلی میسر نیست لذا برای حل معادلات انتگرال بایستی از روش‌های عددی استفاده کرد. تا به حال روش‌های زیادی برای حل عددی معادلات انتگرال شناخته شده است. از جمله درمرجع [1] روش‌هایی برای تقریب جواب معادله انتگرال فردهلم غیرخطی معرفی شده و درمنبع [2] روش نیستروم بیان گردیده است . پتپت [3] از جمله کسانی است که معادلات انتگرال ولترا - فردهلم آمیخته را مورد بررسی قرار داد ،در [4] روش هم محلی برای معادلات انتگرال ولترا - فردهلم بیان شده و در [5] روش هم محلی برای معادلات انتگرال ولترا - فردهلم غیر خطی مورد بحث و بررسی قرار داده شده است . همچنین در [6] روش نیستروم برای حل معادلات انتگرال ولترا - فردهلم خطی به کار گرفته شده است .
امروزه استفاده از توابع متعامد جهت حل معادلات انتگرال مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است . ویژگی اصلی این تکنیک آن است که این گونه معادلات را به دستگاه‌هایی با معادلات جبری تبدیل می‌کند . برای این منظور سری قطع شده توابع متعامد با ضرایب مجهول را به عنوان تقریبی از جواب مسئله در نظر گرفته سپس با استفاده از نقاط مناسب دستگاه را به یک دستگاه جبری خطی یا غیرخطی تبدیل می‌کنند .
روش گالرکین برای حل معادلات انتگرال در سال ۱۹۹۷ توسط اتکینسون[۱] مطرح شد . و از آن سال در کتب مختلف روش گالرکین با پایه های مختلفی برای حل معادلات انتگرال به کار گرفته شد . به طور مثال در کتاب دلویس[۲] روش گالرکین بر پایه چند جمله ای چبیشف در نظر گرفته شد . در کتاب بکر[۳] روش گالرکین بر پایه چندجمله ای فوریه در نظر گرفته شد .
ما در این پایان نامه موجک لژاندر را به عنوان پایه در نظر می‌گیریم. محتوای ریاضی و توانایی بالای موجک‌ها توجه مهندسان و افراد با تخصص‌های گوناگون را برای حل مسائل مختلف جلب کرده است. که ایده اصلی نمایش تابع به قسمت های ساده تر است . همه ساله آثار بسیاری با عنوان موجک منتشر می‌شود [$10-7$] . پایه های موجکی مختلفی چون موجک دابیشز [11] ،اسپلاین خطی [12] ، موجک هارتلی [13] ، تا به حال برای حل معادلات انتگرال به کار گرفته

[۱] Atkinson
[۲] Delvis
[۳] Baker

شده که اغلب دشوار و پیچیده بوده است. یک حل ساده استفاده از موجک‌های دیگری چون موجک هار [14] ،چبیشف [15] و لژاندر [16] می‌باشد .

این پایان نامه مشتمل بر ۴ فصل می‌باشد . در فصل اول مقدماتی از آنالیز حقیقی و عددی که مورد نیاز فصل های بعدی می‌باشند ارائه می‌گردد. در فصل دوم حل تحلیلی معادلات انتگرال بررسی می‌شود و در فصل سوم نظریه موجک ها و موجک لژاندر را معرفی می‌کنیم . در فصل چهارم حل عددی معادلات انتگرال را به روش گالرکین بر پایه موجک لژاندر بیان می‌کنیم و با ارائه مثال های عددی و حل آنها به‌وسیله برنامه متمتیکا[۴] روش را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم .

[۴] Mathematica

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مهم از آنالیز حقیقی [17, 18] و آنالیز عددی [19] می‌پردازیم که نقش عمده ای برای درک بهتر مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعدی ایفا می‌کنند.

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای برداری (خطی) متشکل است از:
۱) یک میدان F از اسکالرها،
۲) یک گروه آبلی $(V,+)$ به نام بردارها،
۳) یک نگاشت $\sigma : F \times V \longrightarrow V$ با ضابطه $\sigma(\alpha, x) = \alpha x$ به نام ضرب اسکالر که در اصول موضوعه زیر صدق کند. :

$$\text{i)}\quad \forall \alpha \in F, \forall x, y \in V;\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$\text{ii)}\quad \forall \alpha, \beta \in F, \forall x \in V;\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$\text{iii)}\quad \forall \alpha, \beta \in F, \in V;\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$$

$$\text{iv)}\quad \forall x \in V;\ \ 1.x = x.$$

در تعریف بالا V را یک فضای برداری روی میدان F می نامیم . عمل جمع در گروه آبلی $(V,+)$ را جمع برداری می نامیم. اگر $F = R$ آن‌گاه V را یک فضای برداری حقیقی واگر $F = C$ آن‌گاه V را فضای برداری مختلط گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. یک خانواده غیرتهی از زیرمجموعه‌های X چون m را یک جبر گویند، هرگاه برای

هر A و B در m داشته باشیم:

۱) $A\cup B\in m$،

۲) $X-A\in m$.

تعریف ۳.۱.۱. یک خانواده غیرتهی از زیر مجموعه‌های X چون m را یک $\sigma-$ جبر گویند، هرگاه اجتماع شمارش‌پذیر از عناصر m در مجموعه m قرار داشته باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و m یک $\sigma-$ جبر روی X باشد، $\mu : m\rightarrow [0,\infty)$ را یک اندازه گوییم هرگاه داشته باشیم:

۱)$\mu\left(\varnothing\right)=0$

۲)اگر $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله از مجموعه‌های مجزا در m باشد آنگاه $\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\Sigma_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i\right)$
.

تعریف ۵.۱.۱. مجموعه $B\in m$ را اندازه پذیر گوییم هرگاه برای هر مجموعه دلخواه $A\in m$ داشته باشیم:

$$\mu\left(A\right)=\mu\left(A\cup B\right)+\mu\left(A\cap\overline{B}\right),$$

که در آن $\overline{B}$ متمم B نسبت به X است.

تعریف ۶.۱.۱. تابع $f : X\rightarrow R$ را اندازه پذیر گوییم ،اگر برای هر زیرمجموعه‌ی باز O از R ، $f^{-1}\left(O\right)$ اندازه پذیر باشد ،آنگاه f را اندازه پذیر گوییم.

تعریف ۷.۱.۱. برای تابع $f : X\rightarrow R$ عبارات زیر معادل هستند:

۱) f اندازه پذیر است.

۲)برای هر بازه بازکراندار (a,b) از R ، $f^{-1}((a,b))$ اندازه پذیر است.

۳)برای هر زیرمجموعه بسته C از R، $f^{-1}\left(C\right)$ اندازه پذیر است.

۴)برای هر $a\in R$ ، $f^{-1}\left([a,\infty)\right)$ اندازه پذیر است.

۵)برای هر $a\in R$ ، $f^{-1}\left((-\infty,a]\right)$ اندازه پذیر است.

۶)برای هر زیر مجموعه بورل B از R ، $f^{-1}\left(B\right)$ اندازه پذیر است.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری (خطی) روی R باشد. به تابع $\|.\|$ از V به R یک نرم گوییم هرگاه:

۱)به ازای هر $x \in V$ ، $\|x\| \geq 0$ و $x = 0$ اگر و تنها اگر $\|x\| = 0$ ،
۲) به ازای هر $\alpha \in R$ ، $x \in V$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ ،
۳)به ازای هر $x, y \in V$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف ۹.۱.۱. به فضای خطی X که دارای یک نرم است فضای خطی نرم دار گوییم.
اگر X یک فضای خطی نرم دار باشد و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x, y) = \|x - y\|$ به d یک متر روی X گوییم (d یک متر تو لید شده به وسیله نرم است) . بنابراین هر فضای نرم‌دار یک فضای متری است.

تعریف ۱۰.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرم‌دار X به x نرم همگرا گوییم هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

تعریف ۱۱.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرم دار X کشی[1] گوییم هرگاه:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists N \qquad \forall m, n \in Z^+ \qquad m, n > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، نرم $\|.\|_c$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|f\|_c = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)| = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|.$$

تعریف ۱۳.۱.۱. هرگاه هر دنباله کشی در فضای خطی نرم دار X، همگرا به نقطه‌ای در X، باشد X را فضای کامل گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱. فضای خطی نرم دار X را یک فضای باناخ [2]گوییم هرگاه X نسبت به متریک تولید شده کامل باشد یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

مثال ۱.۱.۱. ساده ترین فضای باناخ ،فضای اعداد مختلط $\mathbb{C}$ با متریک زیر می باشد:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \qquad d(x, y) = |x - y|.$$

[1] Cauchy
[2] Banach

تعریف ۱۵.۱.۱. برای $1 \leq p \leq \infty$ فضای متشکل از تمام توابع اندازه پذیر $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ که $\int_a^b |f(x)|^p < \infty$، فضای $L^p[a, b]$ گوییم. پس:

$$L^p\,[a,b] = \left\{ f | f : [a,b] \to \mathbb{C}, \text{اندازه پذیر} f, \int_a^b |f(x)|^p < \infty \right\}.$$

قضیه ۱.۱.۱. $L^p[a, b]$ ، $1 \leq p \leq \infty$ فضای کامل است.

$L^p[a, b]$ فضایی برداری است و با نرم زیر یک فضای باناخ است:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

در حالت خاص $L^2[a, b]$، یعنی:

$$L^2[a,b] = \left\{ f | f : [a,b] \to \mathbb{C}, \text{اندازه پذیر} f, \left(\int_a^b |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

با نرم $\|f\|_2 = (\int_a^b |f(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای نرم‌دار X باشد، گوییم سری $\Sigma_{n=0}^{\infty} x_n$ در X همگرا به x است هرگاه دنباله $s_n = \Sigma_{i=0}^{n} x_i$ به x همگرا باشد در این صورت می‌نویسیم $\Sigma_{n=0}^{\infty} x_n = x$.

سری $\Sigma_{n=0}^{\infty} x_n$ را همگرای مطلق می‌گوییم هرگاه $\Sigma_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

قضیه ۲.۱.۱. فضای نرم دار X باناخ است اگر و تنها اگر هر سری همگرای مطلق، همگرا باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱. فضای خطی مختلط (یا حقیقی) X را یک فضای ضرب داخلی گوییم هرگاه یک تابع مختلط (یا حقیقی)روی $X \times X$ که آن را با نماد $(\quad , \quad)$ نشان می‌دهیم، وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

۱) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ،

۲) $(x, y) = \overline{(y, x)}$،

۳) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$،

۴) $(x, x) \geq 0$ و $((x, x) = 0 \iff x = 0)$.

آنگاه (x, y) ضرب داخلی x و y نامیده می‌شود.

تذکر: این ضرب داخلی یک نرم به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\forall x \in X \qquad \|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

قضیه ۳.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد. آن‌گاه به ازای هر $x, y \in X$ داریم:
۱)نامساوی کشی -شوارتز [۳]: $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$ ،
۲)نامساوی مثلثی: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ،
۳)اتحاد متوازی الاضلاع: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

مثال ۲.۱.۱. فضای $L^2(a,b)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای ضرب داخلی است:

$$\forall f, g \in L^2(a,b) \qquad (f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

همچنین فضای $L^2(a,b)$ با ضرب داخلی زیر نسبت به تابع وزن ω روی $[a,b]$ یک فضای ضرب داخلی است:

$$\forall f, g \in L^2(a,b) \qquad (f,g)_\omega = \int_a^b \omega(t) f(t)\overline{g(t)}dt.$$

تعریف ۱۸.۱.۱. اگر $k(x,y)$ تابعی در $L^2((a,b)\times(a,b))$ باشد آنگاه تابع:

$$\|k\|_2 = (\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dxdy)^{\frac{1}{2}},$$

یک نرم است.

قضیه ۴.۱.۱. اگر $k(x,y)$ تابعی در $L^p((a,b)\times(a,b))$ باشد و $p > 1$ آن‌گاه:

$$(\int_a^b (\int_a^b |k(x,y)|dy)^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq \int_a^b (\int_a^b |k(x,y)|^p dx)^{\frac{1}{p}} dy.$$

عبارت فوق را فرم انتگرالی نامساوی مینکوفسکی [۴] گوییم.

[۳] Cauchy–Schowarz
[۴] Minkowski Inequality

تعریف ۱۹.۱.۱. فضای ضرب داخلی H را یک فضای هیلبرت [۵] گوییم هرگاه H نسبت به نرم تولید شده از ضرب داخلی $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ یک فضای باناخ باشد.

مثال ۳.۱.۱. $L^2(a,b)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است:

$$\forall f,g \in L^2(a,b) \qquad (f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

تعریف ۲۰.۱.۱. دنباله $\{x_n\}$ در فضای هیلبرت X ضعیف همگرا به x است اگر

$$\forall z \in X \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n, z) = (x, z).$$

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید X و Y فضای خطی نرم‌دار باشند، عملگر خطی $T: X \to Y$ را پیوسته گوییم هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ که به x همگرا باشد، داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx\| = 0.$$

تعریف ۲۲.۱.۱. یک زیرمجموعه از فضای نرم دار X را نسبتاً فشرده گوییم هرگاه بستار آن فشرده باشد.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار خطی باشند ، عملگر خطی $T: X \to Y$ را فشرده گوییم هرگاه تصویر هر مجموعه ی تحت T مجموعه ای نسبتاً فشرده باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. عملگر خطی $T : X \to Y$ را کاملا پیوسته گوییم هرگاه برای هر دنباله ی ضعیف همگرا چون $\{x_n\}$ در X، دنباله‌ی $\{T(x_n)\}$ در Y نرم همگرا باشد.

۲.۱ تعامد

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی بوده و $x, y \in X$ متمایز باشند، x را بر y عمود گوییم هرگاه برای $x \neq y$ داشته باشیم $(x,y) = 0$ و آن را با نماد $x \perp y$ نمایش می‌دهیم. اگر به ازای هر $x, y \in A$:

$$(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ \alpha > 0 & x = y \end{cases}$$

[۵] Hilbert

آنگاه زیر مجموعه $A \subset X$ را متعامد گوییم.
اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| = 1$ مجموعه A را متعامد یکه یا نرمال گوییم.

قضیه ۱.۲.۱. اگر A زیر مجموعه متعامد یکه از فضای ضرب داخلی X باشدو $y \in X$ ، آنگاه
۱) $\{x \in A|(y,x) \neq 0\}$ شمارش پذیر است ،
۲) $\Sigma_{x\in A}|(y,x)|^2 \leq \|y\|^2$ (نامساوی بسل [۶]).

قضیه ۲.۲.۱. اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد،آنگاه سری فوریه $\Sigma_{x\in A}(y,x)x$ مستقل از ترتیب جملات همگراست.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید A یک زیرفضای فضای ضرب داخلی X باشد.متمم متعامد A ،که با $A^{\perp}$ نشان داده میشود مجموعه همه ی بردارهایی از X میباشد که به A عمود هستند.

تعریف ۳.۲.۱. اگر X یک فضای ضرب داخلی و A زیر مجموعه ای از X باشد A را کامل گوییم هرگاه

$$A^{\perp} = \{0\}.$$

تعریف ۴.۲.۱. اگر X یک فضای ضرب داخلی و A یک زیرمجموعه متعامد یکه از X باشد، آنگاه A را یک پایه متعامد یکه برای X گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم :

$$y \doteq \sum_{x\in A}(y,x)x,$$

که در آن $\doteq$ به مفهوم تقریباً همه جا می‌باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید A یک زیرفضا با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی X باشد. برای هر بردار $y \in X$ تصویر متعامد y بر روی A، بردار یکتای $x \in A$ است که نزدیکترین بردار به y می‌باشد، یعنی:

$$\|y - x\| = \min_{z\in A} \|y - z\|.$$

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنید A زیر فضایی با بعد متناهی از یک فضای ضرب داخلی X و $y \in X$ و x تصویر متعامد y روی A باشند، در این صورت بردار $y - x$ بر هر بردار در A عمود است.

[۶] Bessel

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنید A یک زیر فضای با بعد متناهی از یک فضای ضرب داخلی X باشد.هربردار $y \in X$ را می توان به طور یکتا به صورت $y = x + z$ ، که $x \in A$ و $z \in A^{\perp}$ می باشد، نوشت . یعنی:

$$X = A + A^{\perp}.$$

اثبات: فرض کنید y متعلق به X و x تصویر قائم آن روی A باشد و فرض کنیم $z = y - x$. آنگاه

$$y = x + (y - x) = x + z.$$

طبق قضیه قبل ، z بر هر بردار A عمود است.بنابراین ، z متعلق به $A^{\perp}$ است.

قضیه ۵.۲.۱. اگر A یک مجموعه ی متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد آنگاه شرایط زیر معادل هستند :

۱)برای هر $y \in H$ داریم $\|y\|^2 = \Sigma_{x\in A}|(y,x)|^2$ (اتحاد پارسوال [۷]) ،

۲) A کامل است،

۳)A یک پایه متعامد یکه است.

با توجه به این قضیه ،اگر A یک زیر مجموعه متعامد یکه کامل از فضای هیلبرت H باشد ، آنگاه هر عضو $y \in H$ را می توان به صورت سری فوریه $\Sigma_{x\in A}(y,x)x$ بسط داد که سری فوریه مذکور بدون ترتیب جملات به y همگراست. دنباله توابع متعامد ، مستقل خطی هستند.

تعریف ۶.۲.۱. دستگاه متعامد نرمال $\{f_i\}$ را یک دستگاه متعامد نرمال کامل گوییم ، هرگاه هیچ دستگاه متعامد نرمال وسیعتر از آن وجود نداشته باشد . به عبارت دیگر ،اگر

$$\exists f, \qquad \forall i \qquad (f, f_i) = 0 \Rightarrow f \doteq 0.$$

در بحث تقریب توابع ، تقریب کمترین مربعات نقش اساسی دارد.

قضیه ۶.۲.۱. اگر $f_1, f_2, \cdots, f_n$ دنباله ای از توابع متعامد نرمال (یکه)در $L^2(a,b)$ و همچنین $f \in L^2(a,b)$ باشد آنگاه $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ی هست که $\|f - \Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\|$ مینیمم است و به $\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i f_i$ تقریب کمترین مربعات گوییم.

---

[۷] parseval

اثبات :

$$\|f-\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\|^2=(f-\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i f_i, f-\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i f_i)$$
$$=(f,f)-\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i(f_i,f)-\Sigma_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}(f,f_j)+\Sigma_{i=1}^{n}\Sigma_{j=1}^{n}\alpha_i\overline{\alpha_j}(f_i,f_j).$$

فرض می کنیم $\eta_i=(f_i,f_j)$ پس داریم

$$\|f-\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\|^2=\|f\|^2-\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\eta_i}-\Sigma_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i}\eta_i+\Sigma\alpha_i\overline{\alpha_i}$$
$$+\Sigma_{i=1}^{n}\eta_i\overline{\eta_i}-\Sigma_{i=1}^{n}\eta_i\overline{\eta_i}$$
$$=\|f\|^2+\Sigma_{i=1}^{n}(\alpha_i-\eta_i)(\overline{\alpha_i}-\overline{\eta_i})-\Sigma_{i=1}^{n}|\eta_i|^2.$$

در نتیجه

$$\|f-\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\|^2=\|f\|^2-\Sigma_{i=1}^{n}|\eta_i|^2+\Sigma_{i=1}^{n}|\alpha_i-\eta_i|^2.$$

این عبارت وقتی مینیمم است که برای $i=1,2,\cdots,n$، داشته باشیم $\alpha_i=\eta_i$ در این صورت

$$\|f-\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\|^2=\|f\|^2-\Sigma_{i=1}^{n}|\eta_i|^2.$$

پس اگر $f\in L^2(a,b)$ و $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ دستگاه متعامد نرمال در $L^2(a,b)$ باشد آنگاه

$$\|f-\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\|$$

حداقل است . به عبارت دیگر اگر $f\simeq\Sigma_{i=1}^{n}(f,f_i)f_i$ ، آنگاه، $\|f-\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\|$ حداقل است.

۳.۱ آنالیز فوریه

در این بخش به بیان تعاریفی مقدماتی از آنالیز فوریه می پردازیم که در بحث موجک ها مورد استفاده قرار میگیرند.

تعریف ۱.۳.۱. برای $p\geq 1$ فضای $L^p[0,2\pi]$ شامل تمام توابع اندازه پذیر مانند f با دوره تناوب 2π است بطوریکه

$$\|f\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

در تعریف فوق ضریب $\frac{1}{2\pi}$ برای نرمال سازی است.

تعریف ۲.۳.۱. تبدیل فوریه ی تابع $f \in L^2(R)$ را چنین تعریف میکنیم :

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f(x)e^{-iwx}dx, \qquad w \in R.$$

تعریف ۳.۳.۱. برای $f \in L^2(0, 2\pi)$ سری فوریه f به صورت

$$\Sigma_{k\in Z} c_k e^{ikx},$$

است که در آن

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

$k-$ امین ضریب فوریه ی f است.

تعریف ۴.۳.۱. اگر a و b اعداد حقیقی باشند ، عملگر های انتقال و اتساع را روی $L^2(R)$ چنین تعریف می کنیم :

$$T_a : L^2(R) \to L^2(R), \qquad (T_a f)(x) = f(x-a),$$

$$D_b : L^2(R) \to L^2(R), \qquad (D_b f)(x) = \sqrt{b} f(bx).$$

تعریف ۵.۳.۱. عملگر $U : L^2(R) \to L^2(R)$ یکانی است ،اگر یک به یک و پوشا بوده و $(Uf, Ug) = (f, g)$ برای هر $f, g \in L^2(R)$.

تذکر: در تعریف فوق عملگرهای T_a و D_b یکانی هستند.

۴.۱ انتگرال گیری عددی

در انتگرال گیری عددی اغلب لازم است که انتگرال معین تابعی حساب شود که هیچ پادمشتق صریحی ندارد و یا پادمشتق آن به آسانی به دست نمی آید . روش تقریب $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ روش انتگرال گیری عددی نامیده می شود و عموماً شامل فرمولی از نوع

$$I_{n+1} = \Sigma_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

برای تقریب $I(f)$ است .خطای این تقریب را به صورت

$$E_{n+1}(f) = I(f) - I_{n+1}(f)$$

نمایش می دهیم و هدف مینیمم سازی این خطا می باشد .
در روش های انتگرال گیری عددی اغلب مفید است که تقریب ارائه شده به ازای چه رده ای از چندجمله ای ها نتیجه دقیق می دهند . تعریف زیر برای این منظور ارائه شده است.

تعریف ۱.۴.۱. درجه دقت ،یا صحت یک فرمول انتگرال گیری ،عدد صحیح و مثبت n است بطوریکه به ازای هر چندجمله ای P_k از درجه نابیشتر از n ، $E(P_k) = 0$ ولی به ازای چندجمله ای از درجه ی $n+1$ ، $E(P_{k+1}) \neq 0$.
باتوجه به خطی بودن انتگرال می توان تعریف فوق را به صورت زیر بیان نمود:
درجه دقت یک فرمول انتگرال گیری عددی n است اگر و تنها اگر به ازای هر $k = 0, \cdots, n$ داشته باشیم $E(x^k) = 0$ ولی $E(x^{n+1}) \neq 0$.
معمولا روش های انتگرال گیری عددی به روی چندجمله ای های درونیاب بنا شده است .یک رده از روش های انتگرال گیری عددی ،روش نیوتن –کاتس [۸] می باشدکه در این روش نقاط متساوی الفاصله با گره های x_i در نظر گرفته می شود که

$$x_i = x_0 + ih \qquad i = 0, \cdots, n$$

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

و داریم :

$$\int_a^b f(x)dx = \Sigma_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + E_{n+1}(f)$$

و اگر $f \in C^{n+1}[a,b]$ آنگاه

$$E_{n+1}(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(c)\Pi_{j=0}^{n}(x - x_j)dx$$

ضرایب a_i را به گونه ای محاسبه می کنند که مقدار انتگرال برای توابع $1, x, \cdots, x^n$ دقیق باشد.
روش هایی مانند ذوزنقه ساده و سیمپسون[۹] حالت خاص از روش نیوتن - کاتس می باشند.

---
[۸] newton–cotes
[۹] Simpson